

# 线性张力腿模型与非线性模型比较研究

徐万海, 曾晓辉, 吴应湘

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要:** 平台运动对张力腿的非线性动力响应具有显著的影响。提出了新的更加符合实际的边界条件, 分别采用线性的 Euler-Bernoulli 梁和非线性梁模型, 分析了在不同的张力腿长度和平台激励条件下, 线性张力腿模型与非线性模型在预测其动力响应时所得结果的差异。为了保证数值计算的正确性和可靠性, 运用了两种不同的计算方法: Galerkin 法, 有限差分法进行数值求解。结果表明: 非线性模型所得的张力腿流向响应幅值要比线性模型的小, 且随着张力腿长度以及平台纵荡幅值的增加, 非线性模型与线性模型的预测结果之间的差异会变得越来越显著。

**关键词:** Euler-Bernoulli 梁; 有限差分法; Galerkin 法; 参数振动; 受迫振动

**中图分类号:** TV312 **文献标识码:** A

近年来的能源短缺, 迫使海洋油气的开采逐渐由浅海走向了深海。如图 1 所示的张力腿平台, 是可供选择的典型深海平台之一, 其中张力腿是连接平台本体和海床基础的关键部件之一, 它是空心的细长圆柱结构, 承受着轴向的预张力, 这样可以避免在极限海况下发生松弛破坏。关于海洋工程中细长柱状结构的动力响应问题, 过去已得到了广泛的研究<sup>[1]</sup>。大多都集中在应用简单的线性 Euler-Bernoulli 梁模型计算它的剪力与弯矩, 而不考虑轴向与流向的耦合效应。然而随着水深的增加, 这种耦合效应会变得越来越显著<sup>[2,3]</sup>。Yigit 等<sup>[4]</sup>推导出了隔水管二维轴向与流向的耦合振动方程, 应用假设模态法进行分析及数值求解。Han 等<sup>[2,3]</sup>应用 Hamilton 原理及 Kirchhoff 假设, 得出了顺应塔的轴向与流向的耦合振动方程, 采用有限差分法进行了数值求解。相同的作者<sup>[5]</sup>研究了在随机波作用下, 考虑耦合效应的非线性梁模型与线性梁模型在预测张力腿动力响应时所得结果的差异。Gadagi 等<sup>[6]</sup>研究了顶端承受着预张力的张力腿流向与轴向的耦合动力响应。文献<sup>[2,3,5,6]</sup>中都没有考虑平台运动对张力腿非线性振动的影响, 假设张力腿顶端与平台固连在一起, 底端受到一个扭转弹簧的作用。

在不考虑涡激振动情况下, 真实的海洋环境中, 细长柱状柔性结构的外部激励主要有两种形式, 即波浪及平台纵荡引起的受迫振动和平台垂荡而引起的参数振动, 如图 2 所示。Patei 等<sup>[7]</sup>采用半解析的方法研究了二维情况下张力腿在参数激励及受迫激励共同作用下的动力响应。Park 等<sup>[8]</sup>应用有限元法研究了三维情

形张力腿在参数激励及受迫激励的参数振动问题。

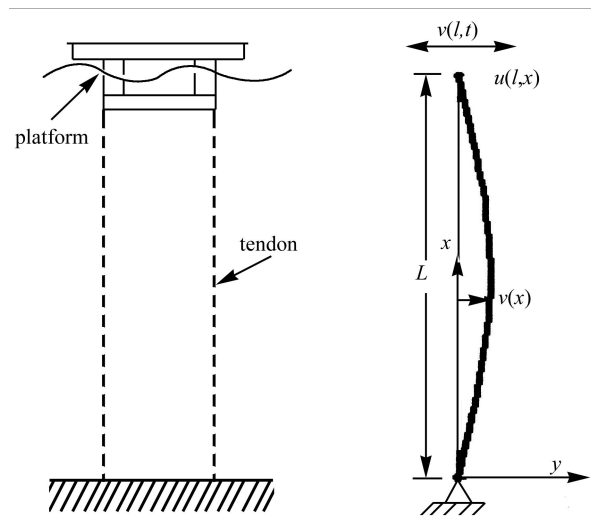


图 1 张力腿平台 图 2 张力腿模型结构示意图

文献 [7, 8] 考虑了平台运动对张力腿非线性振动的影响, 但是采用的是线性 Euler-Bernoulli 梁模型, 没有考虑张力腿轴向与流向振动的耦合效应。Chatjigeorgiou<sup>[10]</sup>运用两种数值模拟方法: Galerkin 法和有限差分法研究了水动力阻尼效应在细长柔性结构的参数振动中的作用, 两种方法的运用是为了保证数值求解的正确性。

本文提出了新的更加符合实际的边界条件, 同时也考虑了平台的运动对张力腿非线性振动的影响, 分别采用线性的 Euler-Bernoulli 梁模型和非线性梁模型, 研究二维情况下张力腿流向的非线性动力响应问题。为了保证数值计算的正确性, 应用两种完全不同的处理方法: Galerkin 法和有限差分法进行数值求解, 分析在不同的张力腿长度和平台激励条件下, 线性 Euler-Bernoulli 梁模型与非线性梁模型在预测张力腿动力响应时的差异, 以期得到线性模型与非线性模型的适用范围。

基金项目: 国家高技术研究发展计划 (863 计划) (课题编号 2006AA09Z350)、中国科学院知识创新工程重要方向项目 (课题编号 KJCX2 - YW - L02) 资助

收稿日期: 2007 - 08 - 06 修改稿收到日期: 2007 - 09 - 29

第一作者 徐万海 男, 博士研究生, 1981 年生

# 1 控制方程及边界条件

## 1.1 控制方程

充分的考虑了细长柱状柔性结构的轴向与流向的耦合效应,不考虑扭转效应与转动惯量的影响,应用二维非线性梁模型<sup>[2,3]</sup>:

$$A\ddot{u} - \left[ EA \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] = f_x \quad (1)$$

$$A\ddot{v} - \left[ EA \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) v \right] + (EIv) = f_y \quad (2)$$

采用文献 [5] 的线性化方法,把非线性耦合方程组 (1), (2) 线性化,得到了线性的 Euler-Bemoulli 梁模型:

$$A\ddot{v} - \left\{ \left[ (A_f - A)g(x-L) + N_0 \right] v \right\} + (EIv) = f_y(x,t) \quad (3)$$

其中“·”代表对时间微分,“’”代表对空间微分,为材料的密度, A 为横截面积, E 为材料弹性模量, I 为张力腿横截面的惯性矩, u, v 为轴向与流向的位移, f<sub>x</sub>, f<sub>y</sub> 分别为轴向与流向单位长度的分布力,其中 f<sub>x</sub> 可以表示成单位长度的浮力与重力的差值:

$$f_x = \rho_f A_f g - Ag \quad (4)$$

f<sub>y</sub> 根据 Morison 方程进行计算:

$$f_y = -C_A \rho_f A_f \ddot{v} - C_D \rho_f r_{outer} v |v| \quad (5)$$

ρ<sub>f</sub> 为海水密度, A<sub>f</sub> 为圆柱所占用的水体横截面积, g 为重力加速度, C<sub>A</sub>, C<sub>D</sub> 分别为附加质量系数和粘性力系数, r<sub>outer</sub> 为圆柱外半径。

## 1.2 边界条件

在文献 [2, 3, 5, 6] 中,均假设张力腿底端受到一个扭转弹簧的作用,顶端与平台固连在一起,没有考虑平台的运动对张力腿非线性振动的影响,而实际的平台运动会引起张力腿的参数振动及受迫振动问题,同时实际的张力腿的底端并不存在扭转弹簧的作用。所以本文提出了新的更加符合实际的边界条件,假设张力腿是两端简支的结构,平台对张力腿的作用通过顶端的位移边界条件来施加:

$$u(0, t) = 0 \quad (6)$$

$$u(L, t) = U_a(t) + U_{L0} \quad (7)$$

$$v(0, t) = 0 \quad (8)$$

$$v(L, t) = V_a(t) \quad (9)$$

$$EIv(0, t) = 0 \quad (10)$$

$$EIv(L, t) = 0 \quad (11)$$

其中 U<sub>L0</sub> = N<sub>0</sub>L/EA 为在初始预张力作用下,张力腿顶端所产生的初始位移, N<sub>0</sub> 为顶端初始预张力, U<sub>a</sub>(t), V<sub>a</sub>(t) 分别为顶端平台垂荡和纵荡的运动形式,可以简单的表示为如下的简谐运动:

$$U_a(t) = U_{L1} \cos t \quad (12)$$

$$V_a(t) = V_{L0} \sin t \quad (13)$$

U<sub>L1</sub>, V<sub>L0</sub> 分别为平台垂荡和纵荡的幅值, ω 为张力腿参数振动与受迫振动的圆频率。

# 2 数值方法

## 2.1 有限差分法

把控制方程 (1), (2) 和相应的边界条件 (6) ~ (11) 应用中心差分格式进行空间离散,沿张力腿长度 L 平均分成 N 等份,得到 N 个计算单元和 N + 1 个节点,单元长度 ΔL = L/N, 第一个节点编号为 0, 第二个为 1, 依次分布直到 N, 根据边界条件 (6), (7), (8), (9) 底端节点 0 与顶端节点 N 的运动形式是已知的,这样就可以得到关于时间 t 的 2(N - 1) 个二阶常微分方程组,经过计算验证发现, N 的取值越大,也即网格划的越密并不能明显增加计算精度,所以取 N = 20, 应用四阶 Runge-Kutta 法数值求解。

相应边界条件的处理:

$$v_N = \frac{w_{+1} - 2w + w_{-1}}{(\Delta L)^2} = 0 \Rightarrow w_{+1} = 2w - w_{-1}$$

$$v_0 = \frac{v_1 - 2v_0 + v_{-1}}{(\Delta L)^2} = 0 \Rightarrow v_{-1} = v_1 \quad (14)$$

虚拟节点 -1 和 N + 1 的数值是计算中需要的。

相应的初始条件可以如下给定,不影响计算得到的稳态解:

$$v(x, 0) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{dv(x, 0)}{dt} = 0 \quad (17)$$

$$u(x, 0) = \frac{(UL_0 + UL_1)x}{L} \quad (18)$$

$$\frac{du(x, 0)}{dt} = 0 \quad (19)$$

编制了相应的有限差分法的 FORTRAN 程序。

## 2.2 Galerkin 法

根据边界条件 (6) - (11) 应用 Galerkin 法,令:

$$u(x, t) = U_a(t) \frac{x}{L} + \frac{xN_0}{EA} + u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (20)$$

$$v(x, t) = V_a(t) \frac{x}{L} + v_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (21)$$

把 (20), (21) 式带入 (1), (2) 中,由振型的正交性,方程两边同时乘以 sin(nπx/L) 并在 [0, L] 上积分,化简可得:

$$\ddot{u}_n(t) + \frac{EA}{A} \left( \frac{n}{L} \right)^2 u_n(t) + \frac{EA}{A} \left( \frac{n}{L} \right)^2 \frac{V_a(t)}{L} v_n(t) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \ddot{U}_a(t) = [1 - (-1)^n] \frac{2}{An} f_x \quad (22)$$

$$\ddot{v}_n(t) = \frac{EI \left( \frac{n}{L} \right)^4 + EA \left( \frac{U_a(t)}{L} + \frac{N_0}{EA} \right) \left( \frac{n}{L} \right)^2 + \frac{3}{2} EA \left( \frac{n}{L} \right)^2 \left( \frac{V_a(t)}{L} \right)^2}{A + C_A \rho_f A_f} v_n(t) +$$

$$\frac{EA \left( \frac{n}{L} \right)^2 \frac{V_a(t)}{L}}{A + C_A + \rho_f A_f} u_n(t) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \ddot{V}_a(t) = \frac{2}{L(A + C_A + \rho_f A_f)} \int_0^L f_y \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (23)$$

仅计算前三阶模态,取  $n = 3$ ,这样足以保证计算的准确性,得到 6 个关于时间  $t$  的二阶常微分方程,应用四阶 Runge-Kutta 法对方程 (22), (23) 进行耦合求解,  $f_y$  表达式如 (5) 所示,采用 Romberg 数值积分法对 (23) 中积分项进行处理,编制了相应的 Galerkin 法的 FORTRAN 程序。

### 3 数值结果和讨论

真实的海洋环境中,张力腿会受到波浪,海流及上部平台的共同作用,本文不考虑海流的影响,随着水深的增加,波浪对张力腿的直接作用也可以忽略不计,而只通过激励平台运动然后施加给张力腿,表 1 给出了典型张力腿 (ISSC TLP) 的相关参数,其中水动力参数  $C_A = 1.0m, C_D = 1.0m$ ,波浪周期  $T = 15.0s, U_{L1}$  分别取  $0.1, 0.14, 0.17m$ ,  $V_{L0}$  分别取  $1.0, 3.0, 5.0m$ ,张力腿长度分别取  $415m, 830m, 1245m$ ,首先保持张力腿长度及平台垂荡幅值不变,  $L = 415m, U_{L1} = 0.17m$ ,研究随着平台纵荡幅值的变化,线性模型与非线性模型在预测张力腿流向动力响应时,所得结果的差异变化情况;其次,保持张力腿长度及平台纵荡幅值不变,  $L = 415m, V_{L0} = 5.0m$ ,研究随着平台垂荡幅值的变化,线性模型与非线性模型在预测张力腿流向动力响应时,所得结果的差异变化情况;最后保持平台纵荡幅值及平台垂荡幅值不变,  $U_{L1} = 0.17m, V_{L0} = 1.0m$ ,研究随着张力腿长度的变化,线性模型与非线性模型在预测张力腿流向动力响应时,所得结果的差异变化情况。为了便于计算结果的比较,整个讨论过程中,张力腿的材料参数及水动力系数均保持不变。

表 1 ISSC 平台张力腿的相关参数

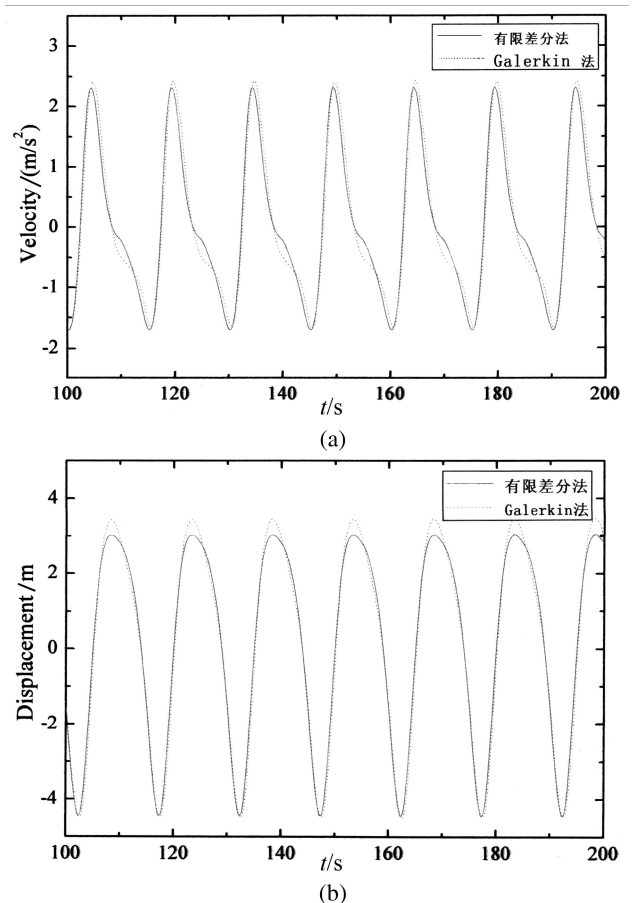
张力腿外半径	$r_o$	0.4000 m
张力腿内半径	$r_i$	0.1732 m
材料密度		7800 kg/m <sup>3</sup>
弹性模量	$E$	204.0 GPa
顶端预张力	$N_0$	3.462e7 N

采用非线性梁模型,应用两种不同的数值计算方法,得到了张力腿中点处流向速度与位移的响应图像,如图 3 所示,可以看出有限差分法 (FDAS) 与 Galerkin 法所得的计算结果吻合的很好,证明了数值求解的准确性。由于 Galerkin 法是一个无穷项展开的过程,为

了计算的方便和简化,只能取有限阶的模态,同时有限差分法计算也会带来误差,所以图 3 中两种的不同计算方法得到的速度与位移曲线并不能完全重合。

图 4 给出了随着平台纵荡振幅的变化,线性的张力腿模型 (Euler-Bernoulli 梁) 与非线性模型在预测张力腿中点处流向位移的差异曲线,由图中观察可以发现:线性模型所得到的流向位移幅值比非线性模型要大,同时随着平台纵荡振幅的增加,线性模型与非线性模型所得到的流向位移振动幅值之间的差异进一步加大,可见平台纵荡振幅是影响线性模型与非线性模型之间差异的一个主要因素。

图 5 给出了随着平台垂荡振幅的变化,线性的张力腿模型 (Euler-Bernoulli 梁) 与非线性模型在预测张力腿中点处流向位移的差异曲线,由图中观察可以得出:线性模型所得到的流向位移幅值比非线性模型要大,但是随着垂荡振幅的增加,线性模型与非线性模型所得到的流向位移振动幅值之间的差异变化并不大,可见平台垂荡振幅变化是影响线性模型与非线性模型之间差异的一个次要因素



(a) 速度图像; (b) 位移图像

图 3 FDAS (有限差分法), Galerkin 法所得张力腿中点处流向的计算结果比较,  $L = 415m, V_{L0} = 5.0m, U_{L1} = 0.10m$

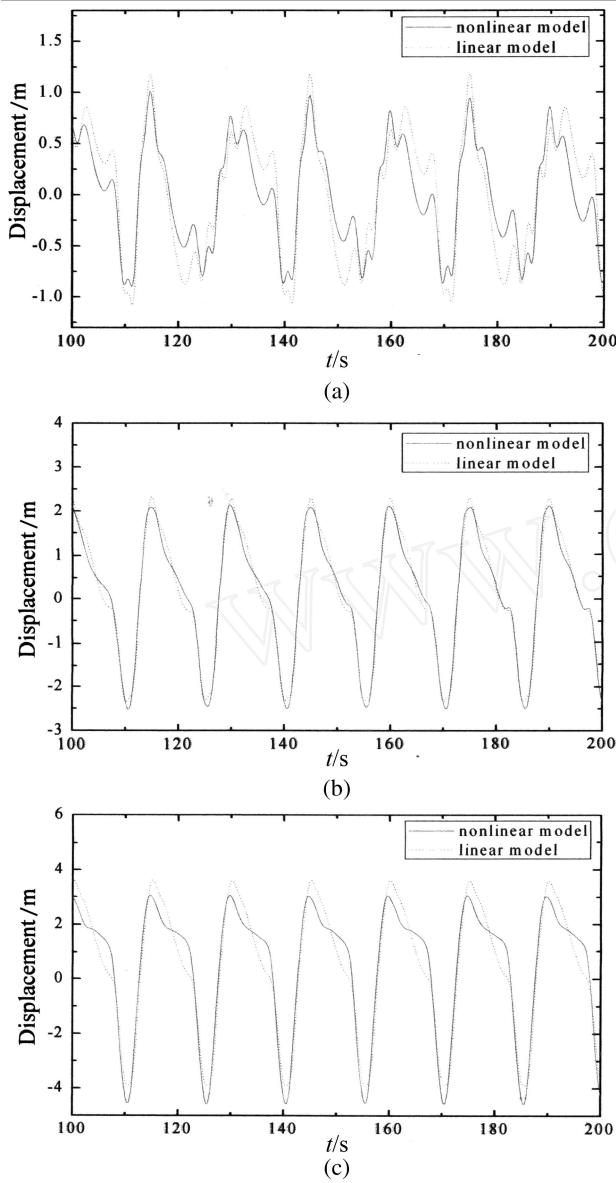


图 4 平台纵荡振幅变化时,线性模型与非线性模型关于张力腿中点处流向位移的预测结果的比较,  $L = 415\text{m}$ ,  $U_{L1} = 0.17\text{m}$  (a)  $V_{L0} = 1.0\text{m}$ ; (b)  $V_{L0} = 3.0\text{m}$ ; (c)  $V_{L0} = 5.0\text{m}$

图 6 给出了随着张力腿长度的变化,线性模型 (Euler-Bernoulli 梁) 与非线性模型在预测张力腿中点处流向位移的差异曲线,由图中观察可以发现:当张力腿长度增加时,预测结果之间的差异会变得越来越显著,可见张力腿长度是影响线性模型与非线性模型之间差异的一个主要因素。

从基本的力学原理解释上面现象发生的原因,在非线性的控制方程 (2) 中,张力腿的轴向力表达式为  $EAu + EA v^2 / 2$ ,其中  $EAu$  代表轴向变形而引起的轴向力,  $EA v^2 / 2$  代表横截面的转角位移引起的轴向张力 [10, 11]。在线性模型中,不考虑横截面的转角位移引起的轴向张力,即忽略  $EA v^2 / 2$  的影响,此时线性

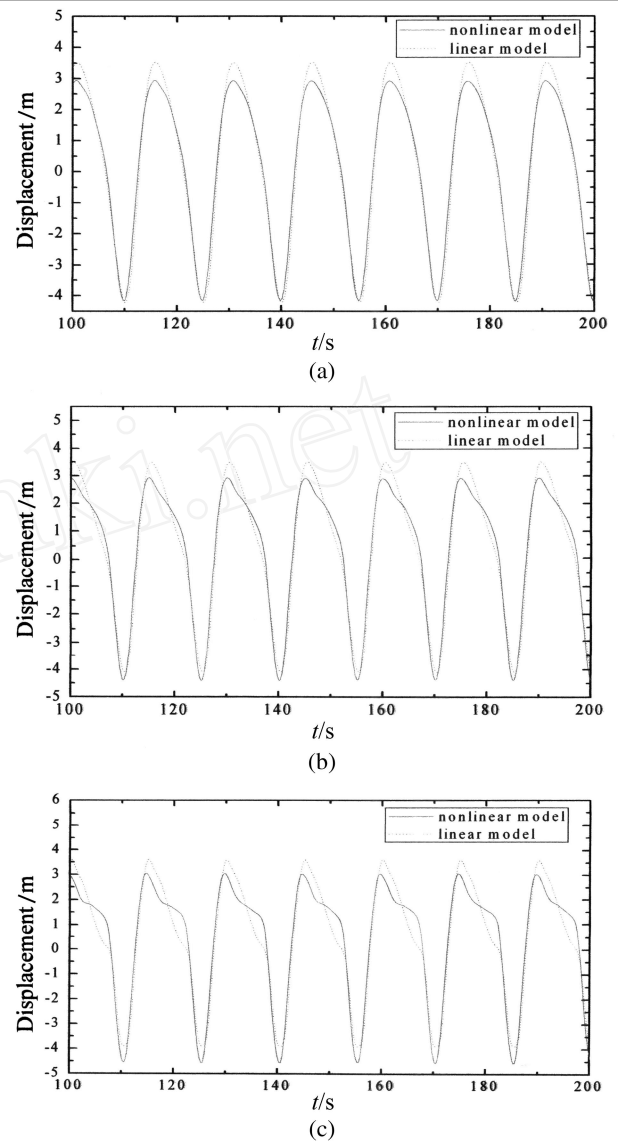


图 5 平台垂荡振幅变化时,线性模型与非线性模型关于张力腿中点处流向位移的预测结果的比较,  $L = 415\text{m}$ ,  $V_{L0} = 5.0\text{m}$  (a)  $U_{L1} = 0.10\text{m}$ ; (b)  $U_{L1} = 0.14\text{m}$ ; (c)  $U_{L1} = 0.17\text{m}$

模型的轴向力相比于非线性模型要小,即张力腿的刚度相应的变小,表现的比较“柔软”,所以线性模型得到的流向位移的预测结果要比非线性模型的大。平台纵荡振幅的增加,引起了张力腿横截面的转角位移增加,也即  $EA v^2 / 2$  增加,张力腿轴向力会随之增大,所以张力腿的刚度会变得越来越,导致了线性模型与非线性模型在预测流向位移时的差异越来越大。保持张力腿长度及平台纵荡幅值不变,  $L = 415\text{m}$ ,  $V_{L0} = 5.0\text{m}$ ,平台垂荡振幅的变化,引起了  $EAu$  的变化,但由于此时平台纵荡振幅较大,相应的轴向变形而引起的轴向力相比于横截面的转角位移引起的轴向力是个小量,即  $EAu \ll EA v^2 / 2$ ,所以在预测张力腿流向位移时,线性模型与非线性模型所得的结果差异并没有发生显著变

化。当张力腿长度增加时,轴向与流向的振动耦合效应会变得越来越显著,所以在预测流向位移时,线性模型与非线性模型所得结果的差异也会越来越显著<sup>[2,3]</sup>。

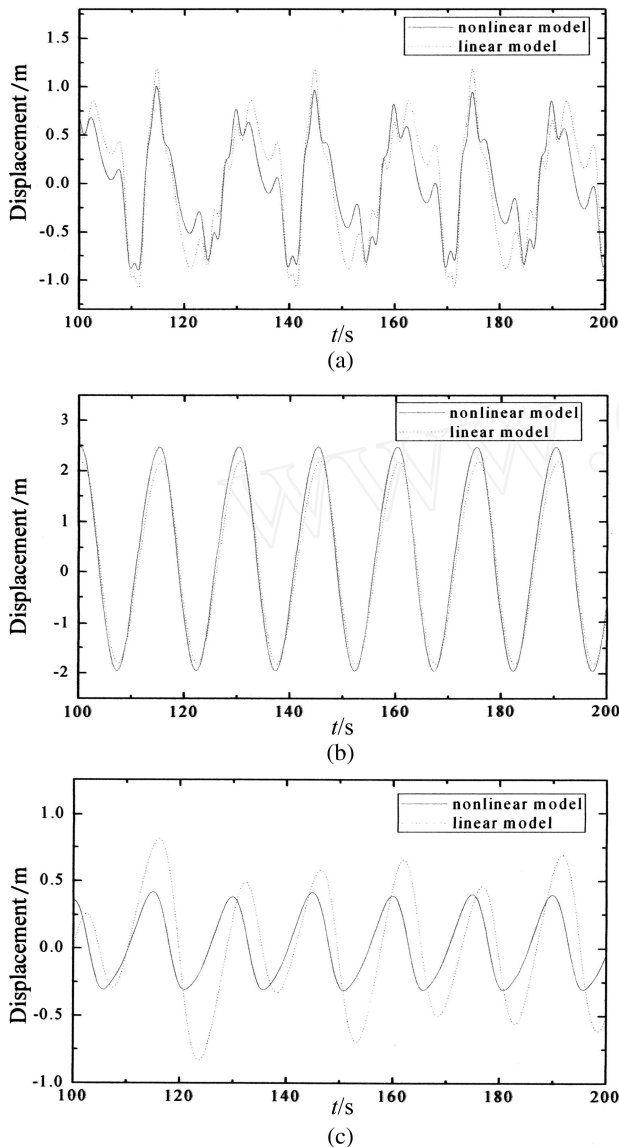


图 6 张力腿长度变化时,线性模型与非线性模型关于张力腿中点处流向位移的预测结果的比较,  $U_{L1} = 0.17\text{m}$ ,  $V_{L0} = 1.0\text{m}$  (a)  $L = 415\text{m}$ ; (b)  $L = 830\text{m}$ ; (c)  $L = 1245\text{m}$

#### 4 结 论

本文考虑了平台运动对张力腿非线性振动的影响,提出了新的更加符合实际的边界条件,采用了两种

不同的计算方法; Galerkin法,有限差分法进行数值求解。得出了如下结论:非线性模型所得的张力腿流向位移幅值要比线性模型的小;随着张力腿长度以及平台纵荡幅值的增加,线性模型与非线性模型所得的流向位移幅值差异会变得越来越显著;并从基本的力学原理出发,分析了产生上述现象的原因。

当张力腿长度较长,平台的纵荡幅值较大时,建议采用非线性梁模型来预测张力腿的非线性动力响应;当张力腿长度较短,平台的纵荡幅值较小时,线性梁模型也是合理的。

#### 参 考 文 献

- [ 1 ] Patel M H, Seyed F B. Review of flexible riser modeling and analysis techniques[J]. Engineering Structure 1995, 17 (4): 293—304.
- [ 2 ] Han S M, Benaroya H. Nonlinear coupled transverse and axial vibration of a compliant structure 1: formulation and free vibration[J]. J Sound Vib, 2000, 237 (5): 837—73.
- [ 3 ] Han S M, Benaroya H. Nonlinear coupled transverse and axial vibration of a compliant structure 2: forced vibration[J]. J Sound Vib 2000, 237 (5): 874—99.
- [ 4 ] Yigit A S, Christoforou A P. Coupled axial and transverse vibrations of oil well drillstrings[J]. Journal of Sound and Vibration 1996; 195 (4): 617—27.
- [ 5 ] Han S M, Benaroya H, Comparison of linear and nonlinear responses of a compliant tower to random wave forces, Chaos [J]. Solitons and Fractals, 2002, 14 (2): 269—291.
- [ 6 ] Gadagi M M, Benaroya H. Dynamic response of an axially loaded tendon of a tension leg platform [J]. J Sound Vib 2006, 293, 38—58.
- [ 7 ] Patel M H, Park H I. Combined axial and lateral responses of tensioned buoyant platform tethers[J]. Engineering Structure 1995, 17: 687—95.
- [ 8 ] Park H I, Jung D H. A finite element method for dynamic analysis of long slender marine structures under combined parametric and forcing excitations [J]. Ocean Eng 2002, 29: 1313—25.
- [ 9 ] Chatjigeorgiou I K. On the parametric excitation of vertical elastic slender structures and the effect of damping in marine applications. Appl Ocean Res 2004, 26: 23—33.
- [ 10 ] 周一峰,唐进元,何旭辉. 轴向受力梁强非线性超谐波与次谐波共振的能量迭代法 [J]. 中南大学学报(自然科学版), 2005, 36 (4): 698—703.
- [ 11 ] 陈树辉,黄建亮. 轴向运动梁非线性振动内共振研究 [J]. 力学学报, 2005, 37 (1): 57—63.

characteristic exponent spectrum of this kind of 2-dimensional continual dynamical systems is plotted by taking advantage of the Mathematica algebra. It shows the existence of chaotic attractor near some special parameter conditions.

**Key words:** normal form; strongly nonlinear oscillation; asymptotic solutions; Hopf bifurcation theorem; chaotic attractor (pp: 130 - 133)

## COMPARATIVE INVESTIGATION OF LINEAR AND NONLINEAR TENDON MODELS

*XU Wan-hai, ZENG Xiao-hui, WU Ying-xiang*

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** The tendon is respectively modeled as a linear Euler-Bernoulli beam and a nonlinear beam which is undergoing coupled transverse and axial motion. The main aim of the paper is to compare the results obtained by linear model with those obtained by nonlinear model, under different platform excitations and with different tendon length. In order to ensure the correctness and the reliability of the numerical predictions, the governing equations are treated using two different solution methodologies, the first is implemented using Galerkin's method; and the second is a finite difference approximation scheme. It is observed that the magnitude of tendon response obtained by nonlinear model is smaller than that obtained by linear model, and the differences between dynamic response predictions according to linear and nonlinear model become more and more obvious when the tendon length and the platform surge amplitude become larger.

**Key words:** Euler-Bernoulli beam; finite difference approximation scheme; Galerkin method; parametric excitation; forced excitation (pp: 134 - 138)

## NUMERICAL ANALYSIS AND TEST STUDY ON DYNAMICAL CHARACTERISTICS OF SHOCK-ISOLATOR

*YI Tai-lian<sup>1</sup>, QIN Jun-ming<sup>2</sup>, HUANG Ying-yun<sup>1</sup>, OUYANG Guang-yao<sup>1</sup>*

(1. Ship and Power College Naval Univ. of Engineering, Wuhan 430033, China;

2. Unit NO 91663, ShanDong QingDao 266102, China)

**Abstract:** A new method of measuring dynamical characteristics of shock-isolator is presented. The shell shot by light-gas cannon strikes the hammering block, which can obtain definite velocity. The shock load on the tested shock-isolator is acted due to hammering block's inertia. The resulted displacement and force can be gotten by the test installation, and the dynamical characteristics of shock-isolator can be identified by analyzing the test data. A dynamic numerical analysis is carried out simultaneously with FEA. The result of dynamical numerical analysis is rather well compared with the result of test. It offers a new means for studying dynamical characteristics of shock-isolator when the condition of test is very difficult.

**Key words:** shock-isolator; light-gas cannon; numerical analyses; dynamical characteristics (pp: 139 - 143)

## IDENTIFICATION OF BRIDGE FLUTTER DERIVATIVES BASED ON PROCESSED SIGNAL BY EMD

*XU Fu-you<sup>1</sup>, CHEN Ai-rong<sup>2</sup>, LIU Jian-feng<sup>2</sup>, WANG Da-lei<sup>2</sup>*

(1. School of Civil & Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The signals collected from bridge wind tunnel tests are inevitably contaminated by noises, and appear certain nonstationarity, which result in precision reduction for bridge flutter derivatives identification. In order to improve the accuracy, the intrinsic mode functions of such signals are sifted using the empirical mode decomposition (EMD), by which the high-frequency noises and low-frequency nonstationary trends are eliminated. Flutter derivatives of Sutong Bridge section model are identified using stochastic search technique based on the original collected signals and the processed ones by EMD. The difference between two sets of results is not ignorable. The analytical results indicate that EMD