

# 旋转振动圆柱绕流周期解和 Floquet 稳定性<sup>1)</sup>

孙 亮 胡国辉 孙德军 尹协远

(中国科技大学力学和机械工程系, 合肥 230027)

(中国科学院力学研究所非线性国家重点实验室, 北京 100080)

**摘要** 对低雷诺数旋转振动圆柱绕流问题运用低维 Galerkin 方法将 N-S 方程约化为一组非线性常微分方程组. 运用打靶法数值求解了这组方程的周期解, 并用 Floquet 理论对周期解的稳定性进行了分析, 研究了流动失稳的机制.

**关键词** Floquet 理论, 圆柱尾迹, 分岔, 稳定性, 打靶法

## 引 言

圆柱的振动(包括横向、流向和旋转振动)是对尾迹进行主动控制的重要方式, 从研究流场的稳定性出发, 对于了解流场的动力学特性, 探索流动的控制机理具有非常重要的意义. 目前对静止圆柱定常流场的稳定性研究清楚地说明了流场在雷诺数  $Re = 45$  左右经历一次 Hopf 分岔(雷诺数定义为  $Re = 2aU_\infty/\nu$ ,  $a$  为圆柱半径,  $U_\infty$  为无穷远来流速度,  $\nu$  为运动学黏性系数,  $Re = 45$  被称为临界雷诺数), 流动由定常流转变为周期流, 并导致了 Karman 涡街的形成. 这些分析与实验和数值模拟符合得很好<sup>[1,2]</sup>. 对于定常旋转的圆柱尾流, 数值计算还发现了在一定的雷诺数和旋转速度比  $\alpha = a\Omega/U_\infty$  ( $\Omega$  是圆柱旋转的角速度)下涡街可能消失, 从而导致涡脱落停止<sup>[3]</sup>. 稳定性分析的结果也证实在低雷诺数下旋转效应可以轻微地延迟涡街的产生<sup>[4]</sup>.

当圆柱受外部周期强迫力作用时, 流场的响应可以分为两类: 一是锁定状态, 流场中的控制频率为外部激发频率; 二是非锁定情况, 流场中控制频率为自然脱涡频率. 流场是周期的还是准周期的取决于外部控制的频率和振幅大小. 因此, 研究强迫振动圆柱绕流流场的稳定性时, 问题非常复杂.

对于非定常流动中较简单的周期性流场(稳定或不稳定)的情况, 目前已经有较成熟的理论. 这一理论框架建立在关于常微分方程周期解的稳定性 Floquet 理论上, 它通过定义周期解的 Poincaré 截面, 将周期解的稳定性问题转化为对 Poincaré 映射的不动点稳定性的求解. 对由有限差分或有限元等高精度算法所得到的流场进行这样的分析是非常困难的, 这主要因为求解 Floquet 矩阵时对计算速度和内存要求都非常高, 使得算法实现时极其困难. 本文所用的 Galerkin 方法通过选取适当的基本模态, 可以用较少的模得到定性正确、定量合理的结果<sup>[4,5]</sup>, 因此是进行 Floquet 稳定性分析的很好工具.

1999-05-25 收到第一稿, 2000-03-13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目(19393100-6A).

进行 Floquet 理论稳定性研究的一个前提是必须得到扰动尚未发展的周期性基本流场, 有时这样的解可以由直接数值积分得到. Noack & Eckelmann<sup>[5]</sup> 首先得到了对  $Re < 200$  的二维圆柱周期流场, 然后运用 Floquet 理论研究了流动对于三维扰动的稳定性问题. 孙德军<sup>[6]</sup> 则用了强迫对称的办法得到了流向振动圆柱的周期解, 并用 Floquet 稳定性理论研究了周期解的稳定性. 但对于一般的情况, 比如本文所研究的旋转振动圆柱绕流, 数值积分方法无法得到稳定性研究所必须的不稳定周期解. 为此, 我们借助了求解非线性常微分方程组周期解的打靶法<sup>[7]</sup>. 其主要思想是, 先将周期解问题化为一个非线性常微分方程的边值问题, 再转化为一个非线性代数方程组, 然后用 Newton 迭代方法来求解. 只要给出较好的初始点, 算法能很快收敛. 与直接数值积分相比, 它不仅能求出方程组的不稳定周期解, 并且具有精度高, 收敛速度快等特点.

## 1 低维 Galerkin 方法

首先用低维 Galerkin 方法计算旋转振动圆柱绕流问题, 它的优点在于只要用较少的工作量, 就可以得到定性正确定量合理的结果. 虽然流场精度和其他高精度数值方法相比有一定的差距, 但是在进行流场动力学分析时却有很大的优越性. Galerkin 方法在极坐标下求解 Navier-Stokes 方程, 将其化为一组非线性常微分方程组. 设流函数可以展开为以下的形式

$$\Psi = \Psi^0(r, \theta) + \sum_{i,j} a_{ij}(t) R_i(r) \Theta_j(\theta), \quad i = 0, \dots, K; \quad j = -L, \dots, L \quad (1)$$

其中  $\Psi_0$  是满足旋转振动圆柱绕流问题边界条件的基本模态,  $R_i(r)$  和  $\Theta_j(\theta)$  分别为我们选定的径向和周向模态, 它们是 Hilbert 空间中满足齐次边界条件的正交函数<sup>[8,9]</sup>, 将 (1) 式代入涡量 - 流函数形式的二维不可压 N-S 方程, 并进行 Galerkin 投影可以得到一个关于  $a_{ij}$  的非线性常微分方程组

$$\frac{da_{ij}}{dt} = c_{ij} + \sum_{kl} l_{ij,kl} a_{kl} + \sum_{klmn} q_{ij,klmn} a_{kl} a_{mn} \quad (2)$$

对于旋转振动圆柱问题, 其外部控制由两个参数确定, 它们分别为强迫振幅  $\alpha$  和频率  $f_e$ . 用一般的数值算法, 如四阶 Runge-Kutta 法, 可以求解此方程组, 得到旋转振动圆柱的流场. 进行 Floquet 稳定性分析时, 需要得到系统 (2) 的稳定或不稳定的周期解, 为此使用了打靶法.

## 2 求解非线性振动系统周期解的打靶法和 Floquet 理论

首先一般地讨论如何求解非线性常微分方程 (组) 周期解的问题. 若用矢量  $\mathbf{X}(t)$  表示  $a_{ij}$ , 比如令  $x_p = a_{ij}$ , 其中下标  $p = (j + L)(K + 1) + i + 1$ , 则求非线性常微分方程 (组) (2) 的周期解, 就是求满足下面两点边值问题的函数

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \\ \mathbf{X}(0) - \mathbf{X}(T) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{X}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^n \quad (3)$$

其中满足上式的最小正数  $T$  称为解的周期. 问题 (3) 中只要已知初值  $\mathbf{X}(0)$ , 方程就可以通过直接的数值积分求解出周期解来, 因此我们可以将它看成关于初始条件  $\mathbf{X}(0)$  的非线性代数方程组. 实际计算过程中该问题可以分成两类: 对于较简单的情况, 解的周期  $T$  是已知的, 我们将

它称为问题 A, 此时仅需确定  $X(0)$ ; 当周期  $T$  是未知数时, 由于周期有待确定, 未知数个数较问题 A 多, 因此我们必须已知  $X(0)$  的一个分量, 方程才可能被求解, 该情况称为问题 B.

对于问题 A, 我们引入参数向量  $s$ , 可以设  $s = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))^T$ ; 对于问题 B, 我们不妨设  $X(0)$  中已知的分量为  $x_1(0) = c$ , 此时参数向量  $s$  取为:  $s = (T, x_2(0), \dots, x_n(0))^T$ , 则问题转化为对参量  $s$  的求解. 方程 (3) 相应地变为

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= f(X, t; g(s)), \\ F(s) &\equiv X(0; s) - X(T; s) = 0, \end{aligned} \right\} X, f \in R^n \quad (4)$$

其中  $g(s)$  是一个维数任意的函数, 描述方程对  $s$  的依赖性. 对于问题 A, 我们可以简单地取  $g(s) = 0$ ; 对于问题 B, 取  $g(s) = T$ . 在上式中,  $X(T, s)$  通过求解下列初值问题得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= f(X, t) \\ X|_{t=0} &= s \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对于  $T$  未知的情况, 该方程数值积分上限是向量  $s$  中的第一个分量  $T$ . 由式 (4) 中  $F(s) = 0$ , 看出这是一个非线性方程组求根的问题, 运用 Newton 法可以求解  $s$

$$s^{i+1} = s^i - F'(s^i)s^i \quad (6)$$

其中  $F'(s^i)$  是  $F(s)$  的 Jacobi 矩阵, 它由差分公式  $F'(s^i) = (F(s^i + \Delta s) - F(s^i))/\Delta s$  给出.

为了考察方程 (3) 的周期解  $\bar{X}(t)$  的稳定性, 我们将非线性方程组在周期解附近线性展开, 得到周期系数线性方程组

$$\dot{Y} = A(t)Y \quad (7)$$

其中  $Y = X - \bar{X}$ , Jacobi 矩阵  $A(t) = \partial f / \partial X|_{X=\bar{X}}$ . 根据 Floquet 理论, 对于该线性化系统的基本解矩阵  $\Phi(t)$ , 存在一个非奇异矩阵  $E$ , 它满足等式  $\Phi(t+T) = E\Phi(t)$ , 即  $E = \Phi(t)^{-1}\Phi(t+T)$ . Floquet 矩阵  $E$  的特征值  $\mu_i (i = 1, 2, \dots, n)$  称为特征乘数, 它在复平面内可以表达为  $\mu = e^{r+i\theta}$  ( $-\pi < \theta < \pi$ ). 周期解  $\bar{X}(t)$  的稳定性的判别准则是: (1) 若所有  $|\mu_i| < 1$ , 系统为渐进稳定; (2) 若某一  $|\mu_i| > 1$ , 系统为不稳定.

我们定义特征指数  $\rho_i$  为:  $e^{\rho T} = \mu (-\pi < \text{Im}(\rho T) \leq \pi)$ , 并记  $\rho_i = \sigma_i + \omega_i i$ , 则  $\sigma_i$  为扰动增长率,  $\omega_i$  为扰动模态圆频率, 且有  $\omega_i = \theta/T$ . 当有一个实特征值或一对共轭的复特征值的模大于 1 时, 不妨设为  $|\mu_k| > 1$ , 则有  $\sigma_k > 0$ . 周期解失稳后系统中出现由  $\omega_k$  确定的周期  $T_k = 2\pi/\omega_k$ , 且有关系式  $T/T_k = \theta/2\pi$ . 根据特征指数虚部, 系统的动力学行为可以分为: (1) 当特征值从负实轴穿出单位圆时,  $\theta = \pi$ , 新模式频率正好是原来频率的一半, 此时发生了倍周期分岔现象; (2) 当特征值从正实轴穿出单位圆,  $\theta = 0$ , 发生间歇现象; (3) 当有一对复特征值穿出单位圆, 此时发生的是 Hopf 分岔现象, 不稳定模态的频率可以由  $\omega_i$  确定. 关于 Floquet 理论的证明和更详细的论述可参考文献 [10].

### 3 结果分析

本文旨在研究超临界雷诺数 ( $Re > 45$ ) 下不同激发频率对流场的影响, 并力图从分岔理论的角度来说明旋转振动绕流中流动失稳的情况. 在计算中不妨取雷诺数  $Re = 60$ , 此时自然涡脱

落(无激发)频率  $f_s = 0.077$ . 且设  $\alpha = 1$ , 主要考虑流动在不同强迫频率下的响应. 运用 Galerkin 方法求解流场时, 流函数表达式 (1) 中  $K = 6, L = 4$ .

### 3.1 倍周期分岔现象

我们首先考虑  $f_e = 2.0f_s$  时流场的频率响应, 采用固定周期  $T$  的 A 类打靶法求解周期性的基本流场, 其中流场的周期设定为外部激励的周期. 我们绘制了该流场在一个周期内变化的流线图(图 1), 与我们通常所看到的数值积分得到的流场图(图 2)相比, 打靶法求得的解有以下特点: 圆柱后面始终存在两个涡, 它们并不随时间的增长交替脱落, 只是在原来的位置上随圆柱的旋转而交替增强或削弱, 说明此时没有生成 Karman 涡街, 流场的周期性是由强迫振动引

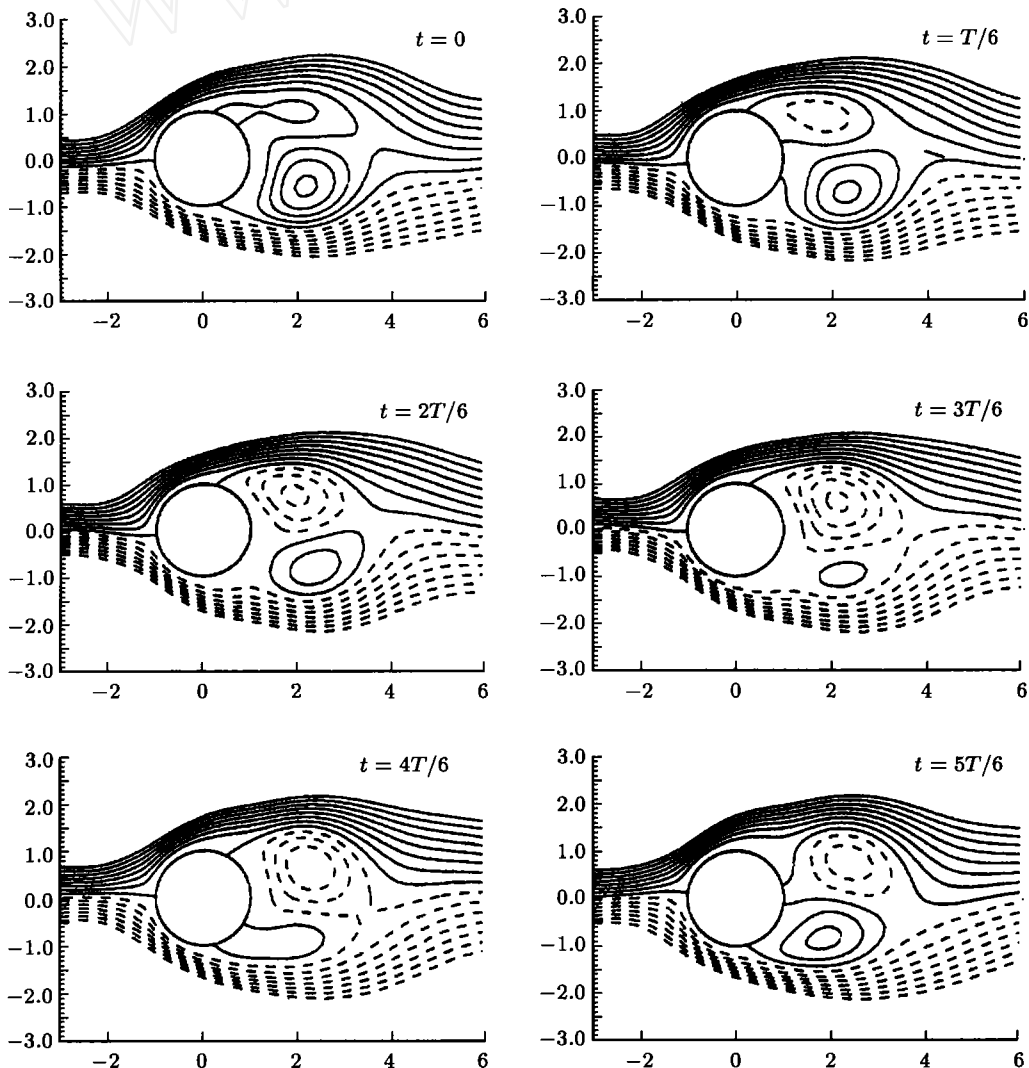


图 1 打靶法求得的周期流场 ( $f_e = 2.0f_s$ ), 流动无 Karman 涡街脱落, 流场频率是强迫频率  
Fig.1 Periodic flow field without vortex shedding obtained by shooting method for  $f_e = 2.0f_s$ .  
The frequency of the solution equals to the forced frequency

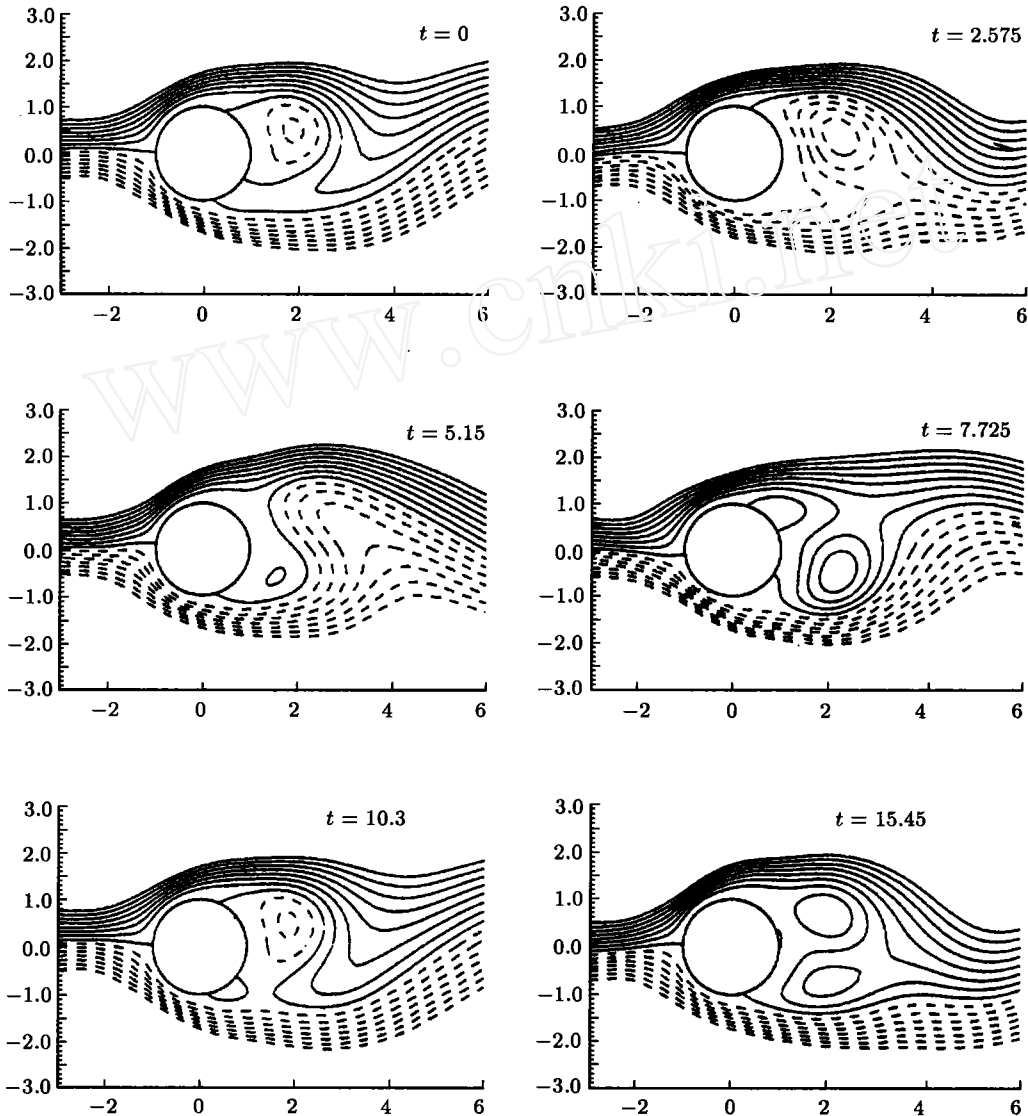
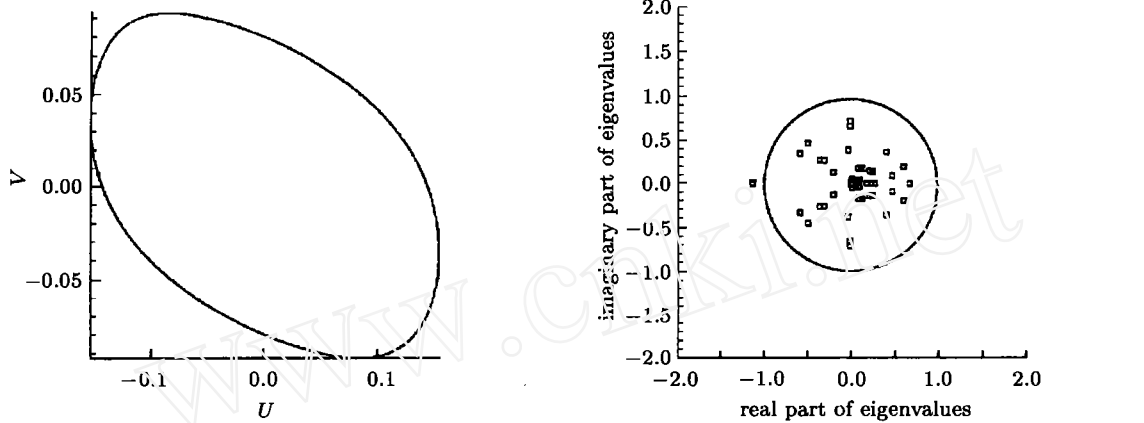


图 2 直接积分的准周期流场 ( $f_e = 2.0f_s$ ), 可以观察与图 1 的不同是涡脱落现象

Fig.2 Quasi-periodic flow field obtained by direct integration for  $f_e = 2.0f_s$ , in which vortex shedding phenomenon is observed in contrast to Fig 1

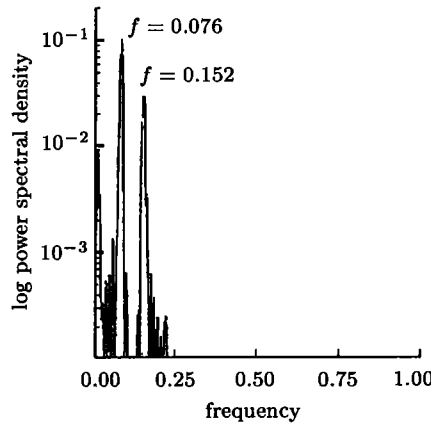
起的. 由该周期性的基本流场出发, 我们研究了流场的 Floquet 稳定性. 图 3(a)(b) 分别是打靶法所得的  $x = 2, y = 1$  处流场的速度相图和 Floquet 矩阵的特征值. 从图上, 我们可以看到最大的 Floquet 乘数  $\mu_1 = -1.1494$  从负实轴穿出单位圆. 根据 Floquet 理论知道, 这个周期性基本流场是不稳定的, 在引入扰动后将产生倍周期分岔现象, 产生一个半频模态, 可以计算出这个模态的频率为  $f = 0.077$ , 是自然涡脱落频率.

直接数值积分的结果也证实了我们的理论分析, 这可从图 3(c) 的数值积分结果的频谱分析中看出, 峰值频率为  $f_s = 0.076$  和  $f_e = 0.152$ , 此时流动处于半频锁定状态.



(a) 周期流场的速度相图  
(a) Velocity phase diagram of periodic solution

(b) Floquet 特征乘数, 其中最大的乘数从负实轴穿出单位圆  
(b) Floquet characteristic multipliers, the largest one crosses the unit circle from negative real axis



(c) 直接数值积分流场的频谱分析, 峰值频率对应涡脱落频率及其倍频  
(c) Spectral analysis of quasi-periodical flow field, where two peaks correspond to the vortex shedding frequency and its double respectively

图 3 倍周期分岔现象 ( $f_e = 2.0f_s$ )  
Fig.3 Double periodic bifurcation ( $f_e = 2.0f_s$ )

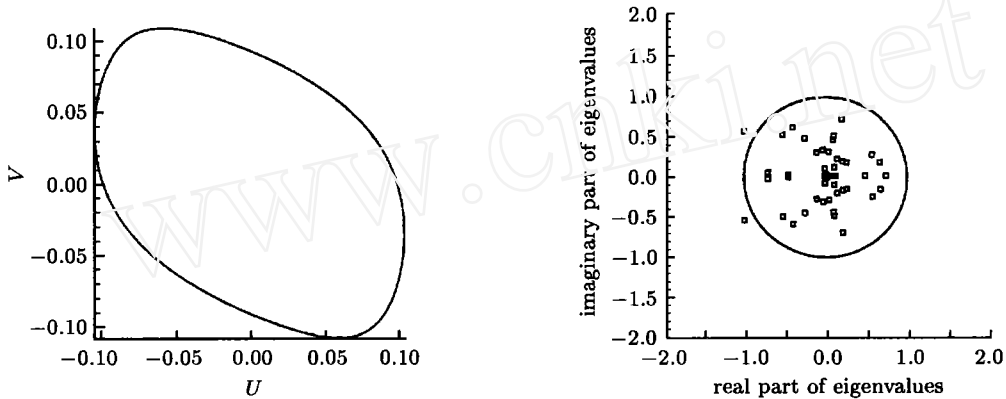
### 3.2 Hopf 分岔现象

现在我们研究  $f_e = 2.4f_s$  时的情况. 选取固定周期  $T$  的 A 类打靶法求解周期性的基本流场, 其周期同样设定为外部激励的周期. 根据打靶法得到的结果, 与  $f_e = 2.0f_s$  的情况相似, 此时得到的周期流场仍然没有观察到涡脱落的产生.

由周期性基本流场出发, 我们计算了周期解的 Floquet 稳定性. 图 4(a) 是周期流场的速度相图, 图 4(b) 则为 Floquet 矩阵的特征值. 从图上我们可以观察到有一对共轭复根穿出单位圆 ( $\mu_{1,2} = -1.0115 \pm 0.54649i$ ). 根据 Floquet 理论知道, 这个周期解是不稳定的, 而且最大模的特

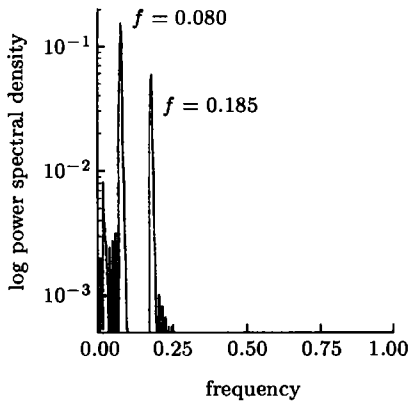
征值是从单位圆中穿出的一对复根，因此将产生 Hopf 分岔现象，产生一个与特征值虚部相关的模态。我们的计算表明这个模态的频率为 0.077，与涡脱落频率是一致的。

我们同样采用直接数值积分与上述结果作比较，得到的准周期流场的频谱图和速度相图(图 4(c)(d))与 Floquet 稳定性分析符合得很好。

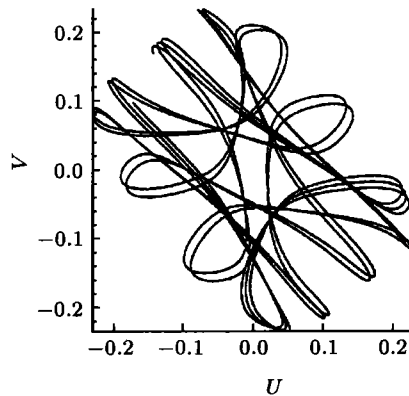


(a) 周期流场的速度相图  
(a) Velocity phase diagram of periodic solution

(b) Floquet 特征乘数，其中一对共轭虚根穿出单位圆  
(b) Floquet characteristic multipliers, a pair of conjugate imaginary roots crosses the unit circle



(c) 直接数值积分流场的频谱分析，峰值频率对应涡脱落频率及强迫频率  
(c) Spectral analysis of quasi-periodic solution, the peaks correspond to the forced frequency and the vortex shedding frequency



(d) 直接数值积分准周期流场的速度相图  
(d) Velocity phase diagram of quasi-periodic solution obtained by direct integration

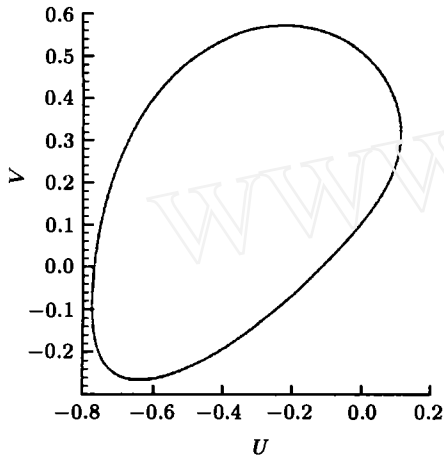
图 4 Hopf 分岔现象 ( $f_e = 2.4f_s$ )  
Fig.4 Hopf bifurcation( $f_e = 2.4f_s$ )

### 3.3 锁定现象

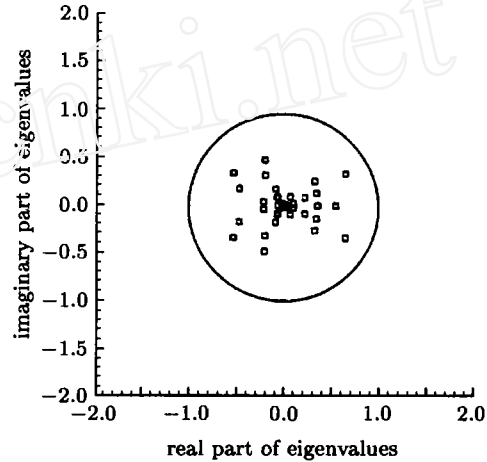
我们还研究了锁定情况下流场的稳定性，选取外部激励为  $f_e = 1.2f_s$  的情况进行分析。采用周期未知的 B 类打靶法来求解此时的周期解。图 5(a) 是所得周期解的速度相图，通过观察我们发现打靶法所得的周期解和直接数值积分的结果是相同的。用 Floquet 稳定性理论分析的

结果表明, 此时的流动在二维扰动下是稳定的 (图 5(b)).

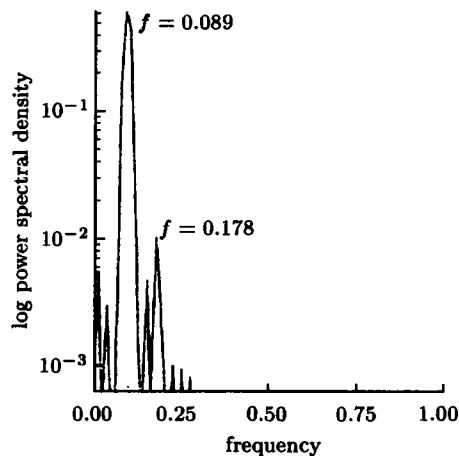
非线性系统的直接数值积分结果的频谱分析见图 5(c), 其峰值频率等于  $f_e = 0.089$ . 从这些结果可以认为, 流场此时为稳定的周期运动, 且流场的控制频率是强迫频率, 即流动处于锁定状态.



(a) 周期流场的速度相图  
(a) Velocity phase diagram of periodic solution



(b) Floquet 特征乘数皆在单位圆内, 表明流动是稳定的  
(b) All Floquet characteristic multipliers are with in the unit circle, indicating a stable flow



(c) 直接数值积分流场的频谱分析, 峰值频率对应外部强迫频率  
(c) Spectral analysis of periodic solution obtained by direct integration, in which the peaks correspond to the forced frequency

图 5 锁定情况的流动分析 ( $f_e = 1.2f_a$ )  
Fig.5 Lock-in phenomenon ( $f_e = 1.2f_a$ )

## 4 结 论

本文运用低维 Galerkin 方法研究了低  $Re$  数下圆柱尾迹的定性性质, 并结合运用打靶法获



得了圆柱旋转振荡绕流尾迹的不稳定周期解, 同时利用 Floquet 理论, 对圆柱绕流周期流场的稳定性和分岔进行了研究. 结果表明在超临界雷诺数下, 由打靶法获得的圆柱尾迹失稳前的周期性基本流场中, 圆柱后面的两个涡只是发生交替增强和削弱, 而不是交替脱落, 没有卡门涡街的产生. 对周期解的 Floquet 稳定性分析表明, 流动由周期解过渡到准周期解的过程是复杂的. 我们分析其中存在的倍周期分岔和 Hopf 分岔等情况, 这些结果与直接数值积分都吻合很好. 在整频锁定情况下, 由于圆柱的脱涡频率为外部激振频率所俘获, 打靶法求得的流场也是涡街已经脱落的周期解, 因此总是稳定的. 这些结果加深了我们对尾迹动力学特性的认识, 并对实现流动的控制有重要的参考价值.

### 参 考 文 献

- 1 Jackson CP. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J Fluid Mech*, 1987, 182: 23~45
- 2 Zebib A. Stability of various flow past a circular cylinder. *J Eng Math*, 1987, 21: 155~165
- 3 凌国平, 凌国灿. 绕旋转圆柱流动涡尾流结构和临界状态特性. *力学学报*, 1997, 29(1): 8~16 (Ling Guoping, Ling Guocan. Numerical study on vortex patterns and critical state characters in the wake of a rotating circular cylinder. *Acta Mech Sinica*, 1997, 29(1): 8~16 (in Chinese))
- 4 Hu GH, Sun DJ, Yin XY, Tong BG. Hopf bifurcation in wakes behind a rotating and translating circular cylinder. *Physics of Fluids*, 1996, 8(7): 1972~1974
- 5 Noack BR, Eckelmann H. A global stability of stability analysis of steady and periodic cylinder wake. *J Fluid Mech*, 1994, 270: 297~330
- 6 孙德军. 钝体尾迹的稳定性分析及控制. [博士论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 1995 (Sun Dejun. Stability analyses and control of wakes past a circular cylinder. [Ph D Thesis]. Hefei: University of Science and Technology of China, 1995 (in Chinese))
- 7 凌复华. 非线性振动系统周期解的数值分析. *应用数学和力学*, 1983, 4(4): 489~506 (Ling Fuhua. The numerical analyses of the periodic solutions of nonlinear oscillating systems. *Applied Math and Mech*, 1983, 4(4): 489~506 (in Chinese))
- 8 Noack BR, Eckelmann H. On chaos in wakes. *Physica D*, 1992, 56: 151~164
- 9 孙德军, 胡国辉, 尹协远, 童秉纲. 圆柱绕流低维 Galerkin 方法的推广. *中国科学技术大学学报*, 1997, 27(3): 266~273 (Sun Dejun, Hu Guohui, Yin Xieyuan, Tong Binggang. Generalizations of the low-dimensional Galerkin method for flows round a circular cylinder. *J China Univ Sci Tech*, 1997, 27(3): 266~273 (in Chinese))
- 10 Jordan DW, Smith P. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford University Press, 1977

# PERIODIC SOLUTIONS AND THEIR FLOQUET STABILITIES OF FLOWS AROUND A ROTATIONALLY OSCILLATING CIRCULAR CYLINDER<sup>1)</sup>

Sun Liang    Hu Guohui    Sun Dejun    Yin Xieyuan

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

**Abstract** Oscillation of a circular cylinder is an important manner for the active control of its wakes. Understanding the dynamical characteristics of the flows will be helpful for us to explore the mechanism of the control. In present study a low dimensional Galerkin method (LDGM), which has been confirmed to be an ideal tool for investigation on global stability and theoretical analysis of chaos, is applied to reduce the Navier-Stokes equations to a set of nonlinear ordinary differential equations (ODEs). Periodic solutions (stable or unstable) of the equations are obtained by a shooting method for the flows over a rotationally oscillating circular cylinder at low Reynolds number. The bifurcation characteristics of these periodic flows are analyzed with the help of Floquet theorem.

Results show that in the unstable periodic flow obtained by the shooting method at supercritical Reynolds number, the two vortices behind the circular cylinder just become strong and weak periodically, rather than shedding alternately, i.e., no Karman vortex street is formed. The Floquet stability analyses describe the complicated transition procedure from the periodic flow to the quasi-periodic flow at a fixed Reynolds number  $Re = 60$  with natural vortex shedding frequency  $f_s$ . The double periodic bifurcation, Hopf bifurcation, and lock-in phenomenon are observed for different forcing frequencies  $f_e$ , and the obtained theoretical results agree with the direct numerical integration and fast Fourier transformation (FFT) analyses of the ODE system. When  $f_e = 2.0f_s$ , the largest Floquet multiplier crosses the unit circle from negative real axis, which indicates the occurrence of double periodic bifurcation of the flow. When  $f_e = 2.4f_s$ , a pair of conjugate imaginary Floquet multipliers cross the unit circle, which suggests the onset of Hopf bifurcation. The lock-in phenomenon is observed when  $f_e = 1.2f_s$ , and the corresponding periodic solution obtained from the shooting method is always stable since the vortex shedding frequency is captured by the forcing frequency.

An interesting extension of the present work is to determine the stability region of the periodic solutions in the parameter space  $f_e$ , forcing amplitude, and Reynolds number. It is hard to perform such analyses because of the complexity of the flows leading to huge computation. However, this work is being undertaken.

**Key words** Floquet theorem, wakes behind circular cylinders, bifurcation, stability, shooting method

Received 25 May 1999, revised 13 March 2000.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19393100-6A).