

## 压电材料椭圆切口的力学分析<sup>1)</sup>

邓其林 王自强

(中国科学院力学研究所 LNM 国家重点实验室, 北京 100080)

**摘要** 在线性压电本构方程框架下, 用复势函数方法对椭圆切口模型进行了精确的数值计算. 完整地考虑了各向异性力电耦合效应以及切口内不同电介质的介电性质. 给出了切口内部不同介电性质对压电材料内部应力的影响. 指出了 Sosa 文章里的一些计算错误. 由于现在文献中很少有关于电导通边界条件下理论解的数值结果, 所以本文同时提供了不同电边界条件下的理论解的数值结果. 最后通过最小势能原理建立了 8 结点有限元模型, 对椭圆切口问题进行了计算并与理论解进行了仔细比较.

**关键词** 压电材料, 椭圆切口, 孔洞, 数值解, 有限元

### 引 言

压电材料在智能元件中得到广泛应用. 它既可作具有感知功能的传感器, 又可用作具有制动功能的执行器. 由于电和力的耦合作用, 压电材料的电致断裂、电致疲劳时有发生. 对于压电材料断裂行为研究日益受到重视.

已有很多学者对线性压电材料的断裂行为进行了理论研究. Parton<sup>[1]</sup> 基于电动力学的基本原理, 建立了裂纹面上电可导通条件. Deeg<sup>[2]</sup>, Pak<sup>[3]</sup> 认为裂纹内介质的介电系数远远小于压电材料的介电系数, 因此可以将裂纹视为绝缘裂纹, 提出了裂纹面上电位移法向分量为零的电边界条件 (D-P 边界条件).

McMeeking<sup>[4]</sup>, Dunn<sup>[5]</sup> 将裂纹处理为扁平椭圆切口, 在压电基体与椭圆切口的界面上, 采用面力、法向电位移及电势连续条件, 分析了裂纹面上不同电边界条件对裂尖场的影响. 指出当  $\frac{b}{a} \gg \frac{\epsilon_f}{\epsilon_m}$  时, 绝缘裂纹假设才可以成立. 由于 D-P 电边界条件可以简化裂纹问题的求解, 因此国际上比较流行 (Sosa<sup>[6]</sup>, Suo<sup>[7]</sup> 等).

Sosa 采用复势方法对压电材料椭圆切口在 D-P 边界条件下进行了理论分析, 得到了椭圆切口的应力集中因子等可参考数据. 但是在他的结果中出现了部分计算错误, 本文将予以指正.

Chung 和 Ting<sup>[8]</sup> 将 Stroh 方法运用到压电介质中, 提出了求解压电介质椭圆切口问题的一般方法. 给出了在无限远处受均匀场作用时, 压电介质与椭圆切口内的应力、电位移求解公式, 但未给出任何具体问题的数值结果. 另外 Du 等<sup>[9]</sup> 也对椭圆夹杂问题进行了理论推导, 也未给出任何数值结果.

Kumar 和 Sing<sup>[10]</sup>, Qi 和 Fang<sup>[11]</sup> 采用有限元方法对压电介质的裂纹问题和椭圆切口问题进行了分析, 他们的有限元结果与 Sosa<sup>[6]</sup> 的理论结果基本符合. 但是不难发现, 他们并未给出在远场为电位移载荷情况下, 椭圆切口界面上的应力分布图和电场强度法向分量图的有限元结果与 Sosa<sup>[6]</sup> 理论结果的比较.

2001-03-02 收到第一稿, 2001-07-02 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (19704100) 及中国科学院自然科学基金 (KJ951-1-20) 资助项目.

本文对 Chung 和 Ting<sup>[8]</sup> 的方法进行了一些改进, 求解更为方便. 并在此基础上进行了大量的计算, 对比了椭圆切口内部不同介电性质对应力、电位移矢量的影响. 而且在给出理论解的同时, 与有限元解进行了比较.

## 1 求解公式

众所周知, 压电材料内部应力及电位移场可以用下式表示<sup>[7,8]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i2} &= 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{K=1}^4 B_{iK} f'_K(z_K) \right\}, & D_2 &= 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{K=1}^4 B_{4K} f'_K(z_K) \right\} \\ \sigma_{i1} &= -2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{K=1}^4 B_{iK} p_K f'_K(z_K) \right\}, & D_1 &= -2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{K=1}^4 B_{4K} p_K f'_K(z_K) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

根据 Chung 和 Ting<sup>[8]</sup> 及 Wang<sup>[12]</sup> 的工作, 可以把椭圆切口问题简化为求解下列方程组

$$\left. \begin{aligned} Bq + \overline{Bq} &= t_2^\infty \\ BPq + \overline{BPq} &= -t_1^\infty \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中未知列向量  $q$  表征了复势函数  $f_K(z_K)$  在无穷远处的性质

$$\left. \begin{aligned} f_K(z_K) &= q_K z_K, & z_K &\rightarrow \infty \\ q &= \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$t_1^\infty$  和  $t_2^\infty$  是无穷远处的广义应力值,  $t_1^\infty = \{t_{11}^\infty, t_{21}^\infty, t_{31}^\infty, -D_1^\infty\}$ ,  $t_2^\infty = \{t_{12}^\infty, t_{22}^\infty, t_{32}^\infty, -D_2^\infty\}$ , 其它各量的具体含义参见文献 [12].

因为  $t_{12}^\infty \equiv t_{21}^\infty$ , 即

$$\sum_{K=1}^4 (b_{1K} q_K + \overline{b_{1K} q_K}) \equiv - \sum_{K=1}^4 (b_{2K} p_K q_K + \overline{b_{2K} p_K q_K}) \quad (4)$$

所以方程 (2) 相当于 7 个方程含 8 个未知数, 不能直接求解出复数矢量  $q$ . 我们考虑无穷远处位移方程, 不难得到

$$Aq + \overline{Aq} = \gamma_1^\infty \quad (5)$$

$\gamma_1^\infty$  为无穷远处广义应变, 假设远场刚体转动  $\omega^\infty = 0$ , 我们有  $\gamma_1^\infty = \{\gamma_{11}^\infty, \gamma_{21}^\infty, 2\gamma_{31}^\infty, -E_1^\infty\}$  根据线弹性本构方程和  $t_1^\infty, t_2^\infty$  可以求出  $\gamma_{21}^\infty$ , 得到方程

$$\sum_{K=1}^4 (a_{2K} q_K + \overline{a_{2K} q_K}) = \gamma_{21}^\infty \quad (6)$$

通过方程 (2), (6) 联立可以很容易地求解出矢量  $q$ . 将  $q$  按照文献 [12] 的方法代入到式 (1), 就可以求出无穷大压电体含椭圆切口问题的应力、电位移场的解.

## 2 算例

在这一节里我们以 PZT-4 陶瓷为例进行计算. 我们采用的压电材料系数来自文献 [13],  $x_2$  轴为极轴, 对中心椭圆切口内部为硅油和采用 D-P 边界条件的问题进行多组计算, 并将计算结

果进行比较. 本文理论计算的数值结果为通过 Mathematica 进行计算的结果, 可以达到 100 位有效数字的精度, 避免了中间求解过程所带来的计算误差.

2.1 D-P 边界条件下中心圆孔

我们计算一个无限大体压电材料含一中心圆孔问题, 圆孔的半径为  $a$ . 边界条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{\infty} &= \sigma_0 \text{ 或 } D_2^{\infty} = D_0 \\ \sigma_r &= \sigma_{r\theta} = D_r = 0, \text{ 在 } r = a \text{ 上} \end{aligned}$$

$x_2$  轴为压电材料的极轴. 以下计算中同时提供了解析解和有限元计算结果. 有限元计算时采用边长为  $2L$  的正方形代替无限大体. 在直角坐标系下此问题是关于  $y$  轴对称, 力场关于  $x$  轴对称, 电势关于  $x$  轴反对称. 所以有限元计算模型为  $1/4$  个样品.

以下给出本文的计算结果, 其中所用的单位是  $[\sigma] = \text{Nm}^{-2}$ ,  $[E] = \text{Vm}^{-1}$ ,  $[D] = \text{Cm}^{-2}$ .

(1) 当只施加  $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_0$  时, 圆孔边界上的应力  $\sigma_{\theta}$ , 电位移  $D_{\theta}$  和电场  $E_r, E_{\theta}$  的分布, 如图 1, 图 2, 图 3 所示. 图中的在有限元值 (FEM) 是在  $L/a = 30$  的情况下计算得出的. 在有限元计算圆孔问题时, 使用了 1120 个 8 结点单元, 共有 3495 个结点. 可以看出理论结果与有限元结果符合得很好, 并且与 Sosa 的理论结果符合得也是相当好.

(2) 当只施加  $D_2^{\infty} = D_2$  时, 圆孔边界上的应力  $\sigma_{\theta}$ , 电位移  $D_{\theta}$  和电场  $E_r, E_{\theta}$  的分布如图 4~ 图 6 所示.

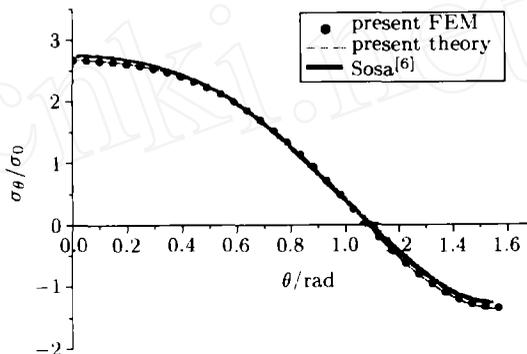


图 1 无穷远力载荷下,  $\sigma_{\theta}$  在圆孔边界上的分布  
Fig.1 Non-dimensional normal stress  $\sigma_{\theta}/\sigma_0$  distribution along circular hole under remote tension  $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_0$

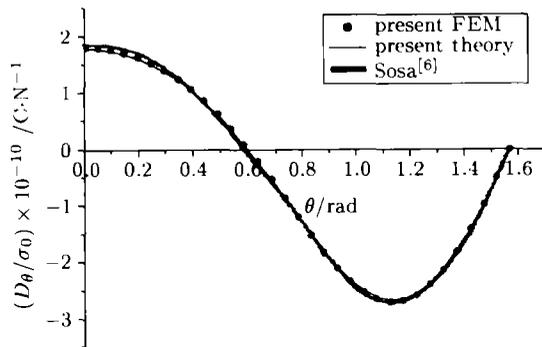


图 2 无穷远力载荷下,  $D_{\theta}$  在圆孔边界上的分布  
Fig.2 The normalized electric displacement  $D_{\theta}/\sigma_0$  (in unit C/N) along circular hole under remote tension  $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_0$

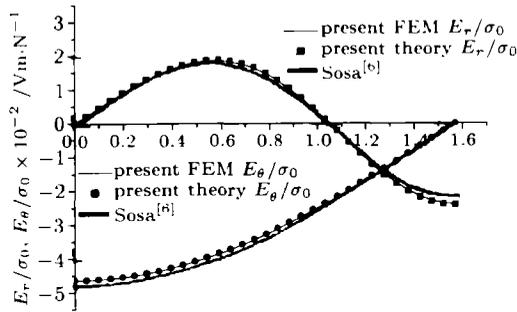


图 3 无穷远力载荷下,  $E$  场在圆孔边界上的分布  
Fig.3 The normalized electric fields  $E_r/\sigma_0$  and  $E_{\theta}/\sigma_0$  (in unit Vm/N) along circular hole under remote tension  $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_0$

图 4~ 图 6 中的有限元结果 (FEM) 是  $L/a = 20$  的情况下计算得到的. 在有限元计算圆孔问题时, 使用了 960 个 8 结点单元, 共有 3009 个结点.

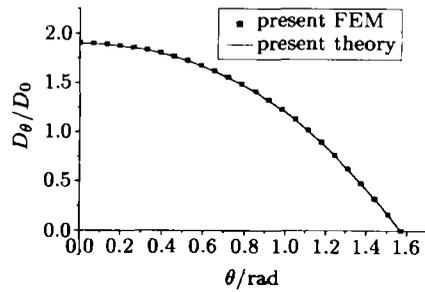


图 4(a) 无穷远电位移载荷下,  $D_\theta$  在圆孔边界上的分布  
Fig.4(a) The non-dimension normal electric displacement  $D_\theta/D_0$  along circular hole under remote electric displacement  $D_2^\infty = D_0$ . Present results

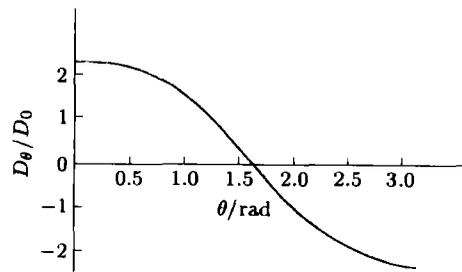


图 4(b) 无穷远电位移载荷下,  $D_\theta$  在圆孔边界上的分布  
Sosa<sup>[6]</sup> 结果  
Fig.4(b) The non-dimension normal electric displacement  $D_\theta/D_0$  along circular hole under remote electric displacement  $D_2^\infty = D_0$ . The results by Sosa<sup>[6]</sup>

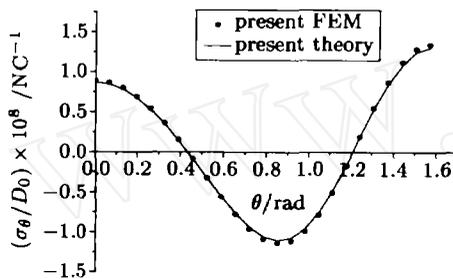


图 5(a) 无穷远电位移载荷下,  $\sigma_\theta$  在圆孔边界上的分布  
Fig.5(a) The normalized stress  $\sigma_\theta/D_0$  (in unit N/C) along circular hole under remote electric displacement  $D_2^\infty = D_0$ . Present results

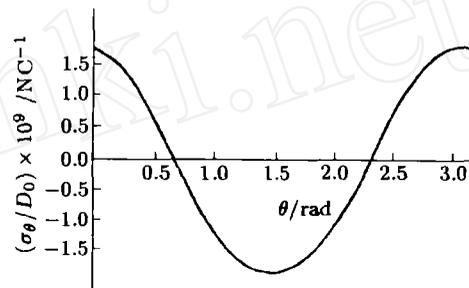


图 5(b) 无穷远电位移载荷下,  $\sigma_\theta$  在圆孔边界上的分布  
Sosa<sup>[6]</sup> 结果  
Fig.5(b) The normalized stress  $\sigma_\theta/D_0$  (in unit N/C) along circular hole under remote electric displacement  $D_2^\infty = D_0$ . The results by Sosa<sup>[6]</sup>

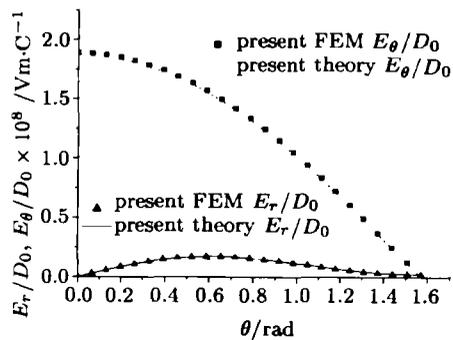


图 6(a) 无穷远电位移载荷下,  $E$  场在圆孔边界上的分布  
Fig.6(a) The normalized electric fields  $E_r/D_0$  and  $E_\theta/D_0$  (in unit Vm/C) along circular hole under remote electric displacement  $D_2^\infty = D_0$ . Present results

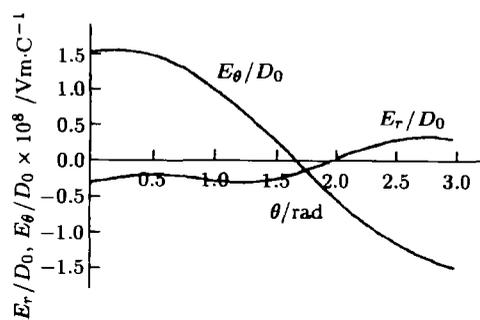


图 6(b) 无穷远电位移载荷下,  $E$  场在圆孔边界上的分布  
Fig.6(b) The normalized electric fields  $E_r/D_0$  and  $E_\theta/D_0$  (in unit Vm/C) along circular hole under remote electric displacement  $D_2^\infty = D_0$ . The results by Sosa<sup>[6]</sup>

本文的计算结果是在 1/4 个周期上表示, Sosa 是在半个周期上表示. 本文的电位移场大

小和走势与 Sosa 的基本相似 (如图 4(a), 图 4(b)). 而应力值和 Sosa 的应力值相差一个量级, 并且分布形状也完全不同 (图 5(a), 图 5(b)). 电场强度数值大小的量级是相同的, 但是  $E_r$  分布形状是不同的. 下面我们定性的分析一下  $E_r$  的性质, 解释为什么说 Sosa<sup>[6]</sup> 的  $E_r$  结果是错误的.

由于 Sosa 采用的是电不导通边界条件, 即  $D_r = 0, \sigma_{r\theta} = 0$  (在圆孔边界上). 根据本构方程

$$\gamma_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl} + g_{kij}D_k$$

$$E_i = -g_{ikl}\sigma_{kl} + \beta_{ik}D_k$$

$x_2$  为其单一极轴, 考虑材料参数的对称性得  $E_1 = \beta_{11}D_1 - g_{15}\sigma_{12}$ . 所以当  $\theta = 0$  时有  $E_r = \beta_{11}D_r - g_{15}\sigma_{r\theta}$ , 即有  $E_r = 0$  (如图 6(a) 所示). 由此可以看出文献 [6] 的  $E_r$  场 (图 6(b)) 是不正确的.

### 2.2 D-P 边界条件与电导通边界条件对比

(1) 在无限大体中, 含有椭圆切口, 椭圆内部为硅油, 相对介电系数为 2.6. 边界条件为在无穷远处

$$\sigma_{22}^\infty = \sigma_0 \text{ 或 } D_2^\infty = D_0$$

不同  $a/b$  值时只施加  $\sigma_{22}^\infty = \sigma_0$ .

表 1  $\sigma_{22}^\infty = \sigma_0$  条件下的  $\sigma_\theta(a, 0)$  和  $D_\theta(a, 0)$

Table 1 The normal stress  $\sigma_\theta(a, 0)$  and normal electric displacement  $D_\theta(a, 0)$  under remote tension  $\sigma_{22}^\infty = \sigma_0$

$\theta = 0, r = a$ $a/b$	D-P electric boundary condition		Electric permeable condition		Relative error	
	$\sigma_\theta/\sigma_0$	$D_\theta/\sigma_0 \cdot 10^{-10}$ C/N	$\sigma_\theta/\sigma_0$	$D_\theta/\sigma_0 \cdot 10^{-10}$ C/N	stress (%)	electric displacement (%)
1/3	1.557 07	0.594 98	1.55 709	0.597 14	0.001	0.36
1	2.671 2	1.784 96	2.67 13	1.794 46	0.004	0.53
3	6.013 61	5.354 89	6.014 15	5.410 58	0.009	1.01
10	17.712	17.849 6	17.71 68	18.346 9	0.027	2.79
30	51.136 1	53.548 9	51.175	57.574 5	0.076	7.52
100	168.12	178.496	168.492	217.02	0.221	21.6
1 000	1 672.2	1 784.96	1 686.89	3 306.25	0.878	85.2

不同  $a/b$  值时只施加  $D_{22}^\infty = D_0$

表 2  $D_{22}^\infty = D_0$  条件下的  $\sigma_\theta(a, 0)$  和  $D_\theta(a, 0)$

Table 2 The normal stress  $\sigma_\theta(a, 0)$  and normal electric displacement  $D_\theta(a, 0)$  under remote electric displacement  $D_2^\infty = D_0$

$\theta = 0, r = a$ $a/b$	D-P electric boundary condition		Electric permeable condition		Relative error	
	$\sigma_\theta/D_0 \cdot 10^8$ N/C	$D_\theta/D_0$	$\sigma_\theta/D_0 \cdot 10^8$ N/C	$D_\theta/D_0$	stress (%)	electric Displacement (%)
1/3	0.289 06	1.299 34	0.288 2	1.298 45	0.3	0.068
1	0.867 17	1.899 02	0.863 44	1.894 16	0.43	0.25
3	2.601 51	3.694 05	2.579 96	3.671 73	0.83	0.60
10	8.671 7	9.980 16	8.481 1	9.782 78	2.2	2.0
30	26.015 1	27.940 5	24.477 4	26.348 1	5.9	5.7
100	86.717	90.801 6	72.022	75.583 9	16.9	16.8
1 000	867.17	899.016	287.176	298.391	66.9	66.8

可以看出, 对于圆孔来说, 两种边界条件所产生的差别不大. 即当  $m = \frac{a}{b} \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \ll 1$ , D-P 边界条件是适用的. 即使是  $a/b = 30$  ( $m \approx 0.1$ ) 时, D-P 边界条件还是只有非常小的误差. 当  $m \rightarrow 1$  或  $m > 1$  时用 D-P 边界条件计算会有很大的误差. 如  $a/b = 100$  ( $m \approx 0.4$ ) 时误差可达到 16%~21%,  $a/b = 1000$  ( $m \approx 4$ ) 时误差可达到 66%~86%.

由于以上计算都是建立在线性基础上的结果, 所以在混合加载时可以把两种结果相加得出最终结果.

### 3 结 论

本文给出了无限大压电体椭圆切口理论解的一批数值结果和有限元计算结果, 对以后的理论、有限元及工程实际有一定的参考价值. 同时指出了 Sosa 的部分结果有错. 而 Sosa 的结果已经成为许多压电材料有限元程序编制者验证程序的准则, 本文的分析指出他部分计算结果有错, 这样可以使后人在检验有限元程序时少走弯路.

### 参 考 文 献

- 1 Parton VZ. Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astronautica*, 1976, (3): 671~683
- 2 Deeg WF. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids. [Ph D Thesis]. Stanford University, 1980
- 3 Pak YE. Crack extension force in a piezoelectric material. *J Appl Mech*, 1990, 57: 647~653
- 4 McMeeking RM. Electrostrictive forces near crack like flaws. *J Appl Phys*, 1989, 40: 615~627
- 5 Dunn ML. The effects of crack face boundary conditions on the fracture mechanics. *Int J Eng Frac Mech*, 1994, 48: 25~39
- 6 Sosa Horacio. Plane problems in piezoelectric media with defects. *Int J Solids Structures*, 1991, 28: 491~505
- 7 Suo Z, Kuo CM, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *J Mech Phys Solids*, 1992, 40: 739~765
- 8 Chung MY, Ting TCT. Piezoelectric solid with an elliptic inclusion or hole. *Int J Solids Struct*, 1996, 33(23): 3343~3361
- 9 Du Shanyi, Liang Jun, Han Jiecai, Wang Biao. General coupled solution of anisotropic piezoelectric materials with an elliptic inclusion. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10(3): 273~281
- 10 Susmit Kumar, Rag N Singh. Influence of applied electric field and mechanical boundary condition on the stress distribution at the crack tip in piezoelectric materials. *Material Science and Engineering*, 1997, A231: 1~9
- 11 Qi Hang, Fang Daining, Yao Zhenhan. FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezoelectric materials. *Computational Materials Science*, 1997, 8: 283~290
- 12 Wang TC. Analysis of strip electric saturation model of crack problem in piezoelectric materials. *Int J Solid Struct*, 2000, 37: 6031~6049
- 13 Park Seungbae Park, Sun Chin-Teh. Fracture Criteria for Piezoelectric Ceramics. *J Am Ceram Soc*, 1995, 78(6): 1475~1480

## STUDY ON AN INFINITE PIEZOELECTRIC SOLID WITH ELLIPTICAL NOTCH<sup>1)</sup>

Deng Qilin      Wang Tzuchiang

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract** The calculation formula of an infinite piezoelectric solid with elliptical notch is simplified theoretically. Accurate numerical results of the analytical solutions are presented for the problem of an infinite piezoelectric solid with an elliptic notch. The effects of different electric constants inside the notch on the stress fields and electric displacement fields are discussed. It is revealed that when the parameter  $m = a\varepsilon_0/b\varepsilon_2 \ll 1$ , D-P electric boundary condition on the notch is suitable. Meanwhile as  $m \geq 1$ , the results based on D-P electric boundary condition on the notch will remarkably deviated from the results of the electric permeable condition across the notch. This conclusion is consistent with the McMeeking's opinion. Under remote tension, the relative error on normal electric displacement  $D_\theta(a, 0)$  at the sharp tip of the elliptical notch with  $a/b = 1000$  can achieve 85.2%. For comparison, the finite element calculation is also carried out in this paper using eight-nodes iso-parametric elements. The finite element results agree very well with the present accurate numerical results. Some mistakes in the numerical results given by Sosa<sup>[6]</sup> are pointed out. This paper also provided two sets of accurate numerical results under two different electric boundary conditions for reference.

**Key words** piezoelectric, elliptical notch, circle hole, numerical solve, FEM

---

Received 2 March 2001, revised 2 June 2001.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19704100) and the project of CAS (KJ951-1-20).