

压电类智能梁元的力学特性及最优控制

任秀华 丁 桦* 麦汉超

(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

(* 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

文摘 本文分别从压电的传感器和驱动器的力学和电磁学特性入手, 详细地描述了带有反馈装置的表面铺设传感器和驱动器的智能梁的力学特性, 给出了其微分方程; 同时, 根据有限元理论, 推导了智能梁离散系统的动态微分方程及能量方程。在理论分析的基础上, 对反馈装置带来的控制力进行优化分析, 尽可能地提高了驱动器的使用效率。

主题词 智能材料 压电材料 最优控制

目前, 已有不少文献报道了有关智能材料控制方面的研究, 如: B Pletner, H A bramovich 对智能材料壳体进行了初步的探讨, 并且分析了壳体的静态响应、动态响应的控制方程^[2]。S Hanagud, M W Oba, A J Calise 在“压电传感器和驱动器的最优控制”一文中^[3], 详细地论述了智能梁元的力学特性; 探讨了在不位置上布设传感器和驱动器的最优控制问题, 但没有给出明确的讨论。E F Crawley, J de Luis 在分析智能梁元时, 从压电材料与梁结构之间的相互作用力出发, 最终把压电材料的作用体现在集中剪切力上, 并在此基础上, 对驱动器的反馈电压进行了优化^[4]。

所以, 到目前为止还没有文献对驱动器的最优控制进行过全面的、系统的分析。基于以上各种情况, 本文将在前人工作的基础上, 首先分析一下智能梁的基本的力学特性, 并对智能梁中驱动器的最优控制进行详细的讨论。

1 智能梁元的基本方程

在对智能梁元的分析中, 我们作如下的假设:

- (1) 设弹性结构与压电材料的黏结是理想的, 它们之间不存在相对的位移。
- (2) 电极表面的薄膜相对于压电材料没有质量及刚度, 压电材料本身也不考虑质量及弯曲刚度。
- (3) 压电材料的电容忽略不计。驱动器和传感器之间不存在相互的电磁效应。

任秀华, 女, 汉, 1973年9月生, 硕士研究生。(100083)北京航空航天大学固体力学研究所。

丁 桦, (100080)北京中关村中国科学院力学研究所。

麦汉超, 男, 汉, 1941年1月生, 教授, 博士生导师(100083)北京航空航天大学固体力学研究所。

收稿日期: 1999-04-01

1.1 传感器及驱动器

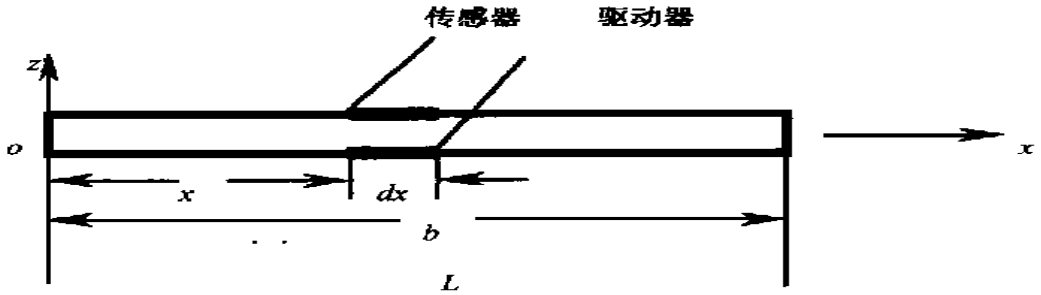


图 1.1 智能梁

根据压电材料的本构方程及位移边界条件, S Hanagud^[3]已经得出传感器的输出电压,

$$V_s(t) = -R_f i_s(t) = K_s \int_a^{a+b} W''(x, t) dx \quad (1.1)$$

其中

$$K_s = b^3 \beta^{-1} H h R_f \quad (1.2)$$

在以上的式子中 β 和 H 为压电常数。

在铺设驱动器的范围内 ($b < x < a + b$), 横截面上任意一点的弯矩是

$$m(x, t) = E I w''(x, t) + m^b \quad (1.3)$$

b^a 为驱动器的宽度, V_D 是驱动器的反馈电压。若在梁的 $x = a$ 处的 $z = +h$ 和 $z = -h$ 都铺设驱动器, 此时梁的附加弯矩为

$$m^b = 2K_D V_D(t) \quad (1.4)$$

在以下的梁的分析中, 我们设在梁的 $x = a$ 处的 $z = +h$ 和 $z = -h$ 都铺设驱动器。驱动器的长度 b 远远小于梁的长度 L 。为了便于分析计算, 我们把由于铺设驱动器所产生的附加弯矩 m^b 简化为在梁的驱动器的铺设处 ($x = a$) 施加的集中力矩 M^b

$$M^b(x, t) = 2K_D V_D(t) \quad (1.5)$$

引入函数 $\delta_a(x)$, 整个梁的弯矩可表示为

$$m(x, t) = E I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2K_D V_D(t) \delta_a(x) \quad (1.6)$$

1.2 有限元素法

这里仅限于讨论梁的平面弯曲振动。

图 1.2 中, EI 表示梁的弯曲刚度, 其中 E 是弹性模量, I 表示横截面对中性轴的惯性矩。 l_e 表示梁的长度, ρ 表示单位长度的梁的质量。对于均匀梁, ρ, EI 均为常数。 $f(x, t)$ 为外加机械力, $w(x, t)$ 为梁的挠度。

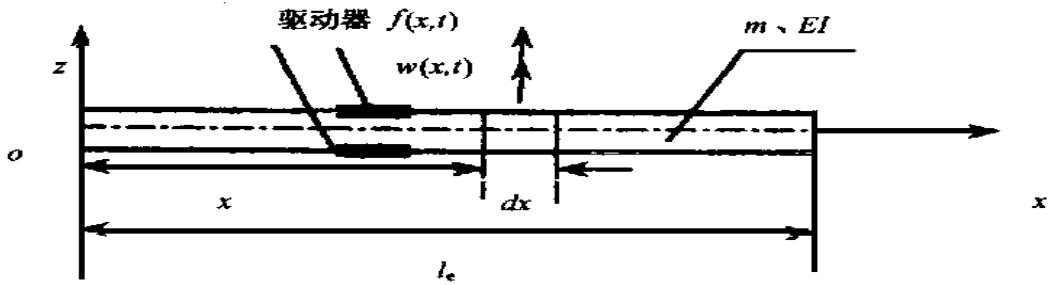


图 1.2 连续智能梁

对图 1.2 中的梁单元进行受力分析, 便得到均匀梁的弯曲振动微分方程

$$-\rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + f(x,t) = EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [2K_D V_D(t) \delta_a(x)] \quad (1.7)$$

设整个结构共有 \$n\$ 个梁单元, 每一梁元素如下

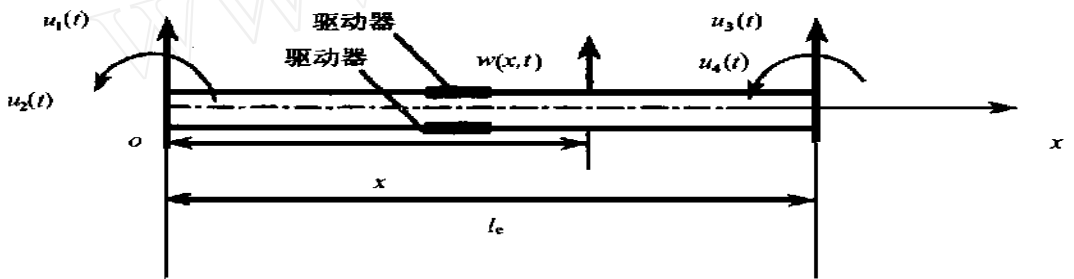


图 1.3 智能梁元素

定义单元位移列阵

$$U^e = [u_1, u_2, u_3, u_4] \quad (1.8)$$

定义形状函数矩阵

$$N = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \quad (1.9)$$

位移模式可用矩阵表示为

$$w(x,t) = N U^e \quad (1.10)$$

现在我们由梁单元的平衡方程(1.7) 出发, 构造一个加权平均表达式

$$W = \int_0^{l_e} \left\{ \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + f(x,t) + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [2K_D V_D(t) \delta_a(x)] \right\} \Theta dx = 0 \quad (1.11)$$

设加权函数 $\theta = N^T$ (1.12)

对加权方程式进行积分得

$$M^e \ddot{U}^e + \left[\frac{d^2 N^T}{dx^2} \right]_{x=a} 2K_D V_D l_e + K^e U^e = F^e$$
 (1.13)

一般情况下,我们设驱动器的输入电压为

$$\begin{aligned} V_D &= G V_s = G K_s \int_a^{a+b} W^{\circ} dx \\ &= G K_s (w^{\circ}(a+b, t) - w^{\circ}(a, t)) \end{aligned}$$
 (1.14)

式中 G 为常数,把式(1.10)代入上式,得到

$$V_D = G K_s \left[\frac{dN}{dx} \right]_a^{a+b} U^e$$
 (1.15)

则智能梁的运动方程又可表示为

$$M^e \ddot{U}^e + 2K_D G K_s l_e \left[\frac{d^2 N^T}{dx^2} \right]_{x=a} \left[\frac{dN}{dx} \right]_a^{a+b} U^e + K^e U^e = F^e$$
 (1.16)

即 $M^e \ddot{U}^e + C^e \dot{U}^e + K^e U^e = F^e$ (1.17)

其中 $C^e = 2K_D G K_s l_e \left[\frac{d^2 N^T}{dx^2} \right]_{x=a} \left[\frac{dN}{dx} \right]_a^{a+b}$ (1.18)

方程中 a 为智能梁的铺设驱动器的位置, b 为驱动器的长度, K_D, K_s 是压电材料的特性常数, l_e 是梁的长度, G, a, b 为可以控制的参数,可以通过改变 G, a, b 来改变阻尼矩阵 C^e , 满足结构的需要. 此时组集所有的梁单元, 得到整个离散结构的运动微分方程

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = F$$
 (1.19)

2 梁元中驱动器的最优控制

首先,在驱动器的最优控制的分析中我们作如下假设:

(1) 设梁的振动为自由振动,即梁的外加载荷及初始速度为零.同时,整个结构只取一个智能梁元.

(2) 在梁的 $x = a$ 处上下表面都铺设传感器和驱动器(传感器置于驱动器之上,而且设它们相互之间没有任何电磁效应),并与反馈装置构成回路.

(3) 在最优控制的分析中,驱动器的位置 a 固定.

2.1 最优控制力的数值解

在前面,我们已经得到智能梁的动态的微分方程为

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = F$$
 (2.1)

在下面的分析中驱动器的铺设点 a 固定,此时的矩阵 C_a 为常数矩阵.微分方程(2.1)中 $C \dot{U}$ 为反馈电压带来的控制力,对于振动的结构来说,它体现为阻尼力,主要用来抑制系统的振

动。在前面智能梁的分析中,控制力都取为线性的,即

$$f = CU \quad (2.2)$$

但此时的控制力 f 并没有发挥其最大的作用。为了提高驱动器的使用效率,我们对控制力 f 进行优化。一般情况下,设 f 为非线性的,具体形式如下 $f(U, n) = C|U|^n U$ (2.3)

当控制力取公式(2.3)的形式,且只考虑梁的自由振动,取外加载荷 $F = 0$,智能梁的微分方程(2.1)又可表示为

$$MU''(n) + f(U', n) + KU(n) = 0 \quad (2.4)$$

现在我们就从能量的角度出发,对控制力(2.3)进行优化,确定 n 的最佳值。当控制力 f 取(2.3)的形式时,任一时刻梁的能量表达式可写为

$$W(n) = \frac{1}{2}U(n)^T KU(n) + \frac{1}{2}U'(n)^T MU'(n) \quad (2.5)$$

当控制为最优控制时, n 的取值必须使能量在任意时刻的衰减速度都是最快的。也就是能量 W 对 n 的微分等于零

$$dW/dn = 0 \quad (2.6)$$

由于质量矩阵 M 、刚度矩阵 K 是对称矩阵,所以能量 W 对 n 的微分式(2.6)又可以简化为

$$\frac{dW}{dn} = U(n)^T K \frac{dU}{dn} + U'(n)^T M \frac{dU'}{dn} = 0 \quad (2.7)$$

为了求解方程(2.7)中的 n ,必须已知 $\frac{dU}{dn}$ 及 $\frac{dU'}{dn}$ 。所以,我们现在对智能梁的微分方程(2.4)进行微分,最终得到当控制力为最优控制时, n 必须满足以下方程

$$\left. \begin{aligned} MU'' + C|U|^n U' + KU &= 0 \\ MV'' + f_v V' + KV &= -f_n \\ \frac{dW}{dn} = U^T KV + U'^T M V' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中
$$V = \frac{dU}{dn} \quad (2.9)$$

$$f_v(U', n) = (1+n)C|U|^n U' \quad (2.10)$$

$$f_n(U', n) = C|U|^n \ln|U| U' \quad (2.11)$$

设方程组(2.8)的初始条件如下

$$\begin{cases} U_{t=0} = U_0 & U'_{t=0} = 0 \\ V_{t=0} = 0 & V'_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

根据有限元理论,压电系统的时间响应可以通过直接积分法、Newmark 方法或修正的 Wilson- θ 方法来计算,这里,我们采用的是Newmark 积分法[7, 8] 计算方程组。我们设梁为

简支梁, 初始振形为二阶振形。驱动器放在最优点。

可以发现, n 的值越是接近 -1, 能量衰减的越快。通过以下的两个图形, 也可直观地发现当 $n = -1$ 时, 能量的衰减曲线下降最快。

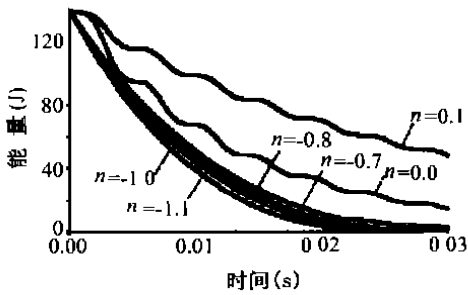


图 2.1 能量的衰减

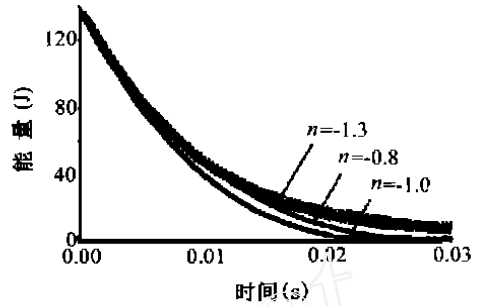


图 2.2 能量的衰减

此时的控制力 f 可以表示为 $f = C \cdot \text{sign}(\dot{U})$ (2.13)

其中 $\text{sign}[x] = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ (2.14)

2.2 最优控制力的解析解

在前面的分析中, 我们从数值计算的角度求得了智能梁元的最优控制力, 现在我们从解析的角度来对其结果进行分析。

已知智能梁的能量函数为 $W = \frac{1}{2}U^T K U + \frac{1}{2}U^T M \dot{U}$ (2.15)

当不考虑结构的粘性阻尼时, 任意时刻的能量 W 对时间的微分都可以表示为控制力与速度的乘积

$$\frac{dW}{dt} = -\dot{U}^T f (2.16)$$

当智能结构的控制为最优控制时, 任意时刻的能量 W 对时间的微分都应满足

$$\frac{dW(f_{\text{最优}})}{dt} = \min(-\dot{U}^T f (U) \dot{U}) (2.17)$$

或 $\left| \frac{dW(f_{\text{最优}})}{dt} \right| = \max |-\dot{U}^T f (U) \dot{U}|$ (2.18)

在前面最优布局的分析中, 我们已经得到: 也就是说, 在能量 W 与时间 t 的关系图中, 当控制为最优控制时, 能量 W 的下降幅度应该是最大的。

这里的函数 $f(U)$ 是反馈电压产生的控制力, 通常 f 我们都取为反馈电压与速度模的乘积。对于振动的结构, 此时的控制力表现为阻尼力, 若反馈电压越大, 则阻尼力越大。但在一般情况下, 压电材料所能承受的电压都有一定的限度, 即

$$V = V_{\max} \quad (2.19)$$

所以, 为了满足方程(2.17) 或(2.18), 使能量 W 能在最短的时间内衰减到零, 最优控制力应为

$$f = -\alpha \text{sign}(U) \cdot V_{\max} \quad (2.20)$$

但在实际的分析中, 我们一般取

$$f(U, n) = C |U|^n \quad (2.21)$$

现在我们来分析当 n 取何值时, 控制力 f 能最快地达到极限值, 不难发现控制力 f 与函数

$$y = cx^{(1+n)} \quad (2.22)$$

有着相似的形式。现在, 分别取 n 为不同的值, 然后画出相应的 y 与 x 的关系曲线(这里我们设 $c = 1.0$):

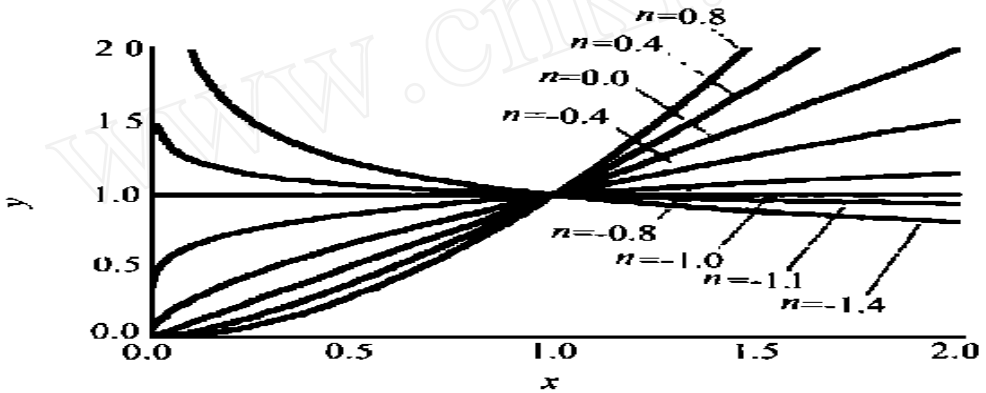


图 2.3 y 与 x 的关系

图中, 当 $n = -1$ 时, y 能最快地达到常数状态, 此时 y 与 x 的关系曲线成为一条直线。由于控制力 f 与函数 y 有着相似的形式, 所以, 当 $n = -1$ 时, 控制力 f 也能最快地达到极限值。此时控制力为

$$f = C \cdot \text{sign}(U) \quad (2.23)$$

此时的控制力与数值计算所得到的最优控制力完全一样。

分析上式, 发现 f 是非线性的、不连续的函数, 这种不连续的特性在实际应用中会带来许多问题, 为了避免这种现象, 我们采用函数 $f_{\text{优化}}$ 代替 f ,

$$f_{\text{优化}} = C |U|^m \quad (2.24)$$

其中 m 在 -0.85 与 -0.95 之间, 当控制力取上式时, 确保了函数的连续性, 而且使驱动器发挥了其应有的作用(与 $n = -1$ 相差 5% 左右)。

3 小结

为了提高驱动器的使用效率,我们对控制力进行了分析,得出当控制力为最优控制力时,反馈电压应取压电材料的极限电压值。

在具体的数值计算的算例中,优化后控制力为

$$f_{\text{优化}} = C |U^{\circ}|^m U^{\circ} \quad -0.95 < m < -0.85$$

此时的 $f_{\text{优化}}$ 确保了函数的连续性,同时也使驱动器发挥了其应有的作用。

参考文献

- 1 麦汉超,陆荫. 自适应结构和智能材料的优化设计分析. 北京航空航天大学科技报告, 1995.
- 2 Tzou H S, and Gradre M. Theoretical Analysis of a Multi-layered Thin Shell Coupled with Piezoelectric Shell Actuators for Distributed Vibration Controls. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 132: 433
- 3 S Hanagud, M W Obal, A J Calise. Optimal Vibration Control by the Use of Piezoelectric Sensors and Actuators. *IAA Paper no. 87-0959*
- 4 E F Crawley, J de Luis. Use of Piezoceramics as Distributed Actuators in Large Space Structures. *IAA Paper no. 85-0626, Proc AIAA S D. M. Conference*, 1985
- 5 "IEEE Standard on Piezoelectricity." *IEEE Std 176-1978*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 1978
- 6 Y Kagawa, G M L Gladwell. "Finite Element Analysis of Flexure-type Vibrators with Electrostrictive Transducers," *IEEE Trans On Sonic and Ultrasonics*, Vol SU-17, No. 1, pp. 41~ 49, Jan. 1970
- 7 K J 巴特, E J 威尔逊. 有限元分析中的数值方法. 林公豫, 罗恩译, 科学出版社, 1985.
- 8 张汝清, 董明. 结构程序设计. 重庆出版社, 1988.

Mechanical Performances of Piezoelectric Element and Optimal Control

Ren Xiuhua Ding Hua* Mai Hanchao

(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of aeronautics and astronautics; beijing 100083)

(* Institute of Mechanics, Chinese Academy of science, beijing 100080)

ABSTRACT Based on the performances of the piezoelectric actuators and sensors, the characteristics of beam with highly distributed piezoelectric sensors and actuators and a feedback conditioning system are analyzed, and the dynamic differential equation is also derived. A finite element model of intelligent beam has been formulated to derive the differential equation and the energy equation. In order to use actuators most effectively, the optimal control of the feedback force excited by the actuator has been analyzed in the last part of the paper.

SUBJECT TERMS Intelligent material, Piezoelectric material, Optimal control