

# 压电类智能梁元的优化布局

任秀华

丁 桦

(北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系)

(中国科学院 力学所)

麦汉超 陆 萌

(北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系)

**摘 要:** 分别对具有无限小长度驱动器的悬臂和简支智能梁的一阶模态和二阶模态进行了具体的分析和计算,确定了驱动器在梁元中的最优布局,总结了有关驱动器在梁元中布局的一些基本性质,并从解析的角度对驱动器的最优布局点给予解释.由于以上有关驱动器最优布局的分析是在忽略驱动器的长度的假设基础上进行的,所以又对有限长度的驱动器的布局问题进行了初步的探讨.

**关 键 词:** 压电材料;有限元;传感器;驱动器;最优布局

**中图分类号:** O 346.5

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-5965(2000)05-0584-04

## 1 智能梁元的基本方程

### 1.1 本构方程

智能材料结构把传感器、驱动器和控制器都嵌入到材料内部,从而形成了即能承载又具有所设计的特定功能的智能结构型材料.把铺设有带反馈装置的驱动器和传感器的梁称为智能梁.在梁的  $x = a$  处上下表面铺设传感器和驱动器(设它们相互之间没有任何电磁效应),并与反馈装置构成回路.这里讨论的驱动器与传感器由压电材料制成.在对智能梁元的分析中作如下假设<sup>[1]</sup>:1) 设弹性结构与压电材料的黏结是理想的,它们之间不存在相对的位移;2) 电极表面的薄膜相对于压电材料无质量及刚度,压电材料本身不考虑质量及弯曲刚度;3) 压电材料的电容忽略不计.驱动器和传感器之间不存在相互的电磁效应;4) 驱动器和传感器的尺寸相对于梁的长度可以忽略.

可以近似地认为驱动器和传感器在梁上的位置相同,且梁的上下表面都分别铺设了驱动器和传感器.压电材料本构方程<sup>[2]</sup>在一维情况下简化为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{椰} & H \\ H & C_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中  $\text{椰} = (C_{11} - H^2)^{-1}$  (2)

$\epsilon_{11}$  是应变;  $\sigma_{11}$  为应力;  $D_3$  为电位移;  $E_3$  为电场;

和  $H$  为压电常数;  $C_{11}$  为弹性常数.

### 1.2 传感器及驱动器

在以下的分析中,设梁的  $x = a$  处的  $z = +h$  和  $z = -h$  (即梁的上下表面) 都铺设驱动器和传感器,如图 1 所示.

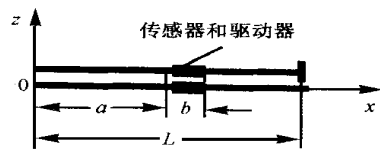


图 1 智能梁

根据压电材料的本构方程及位移边界条件, Hanagud<sup>[1]</sup>已经得出传感器的输出电压:

$$V_s(t) = - R_f i_s(t) = k_s \int_a^{a+b} \dot{w}(x, t) dx \quad (3)$$

$$k_s = b_s^{-1} H h R_f$$

其中  $\dot{w}$  表示  $w$  对时间  $t$  的一次微分.

在铺设驱动器的范围内 ( $a < x < a + b$ ), 横截面上任意一点的弯矩为

$$m(x, t) = E I w''(x, t) + m_b \quad (4)$$

其中  $m_b = 2 k_D V_D(t)$ ;  $k_D = H h b_a$ ;  $b_a$  为驱动器的宽度;  $V_D$  为驱动器的反馈电压.

驱动器的长度  $b$  远远小于梁的长度  $L$ . 为了便于分析计算,把由于铺设驱动器所产生的附加弯矩  $m_b$  简化为在梁的驱动器的铺设处 ( $x = a$ ) 施加的集中力矩  $M_b$ , 引入函数  $\delta(x - a)$ , 整个梁的弯

收稿日期: 1999-05-20

作者简介: 任秀华(1973-),女,黑龙江肇州人,硕士生,100083,北京.

矩可表示为

$$m(x, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2k_D V_D(t) a(x) \quad (5)$$

### 1.3 有限元素法

这里仅限于讨论梁的平面弯曲振动. 设  $EI$  表示梁的弯曲刚度, 其中  $E$  是弹性模量,  $I$  表示横截面对中性轴的惯性矩,  $l_e$  表示梁的长度,  $\rho$  表示单位长度的梁的质量, 对于均匀梁,  $\rho, EI$  均为常数,  $f(x, t)$  为外加机械力,  $w(x, t)$  为梁的挠度. 有

$$-\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + f(x, t) = EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [2k_D V_D(t) a(x)] \quad (6)$$

利用加权参数法, 可以得到智能梁的有限元方程:

$$M\dot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad (7)$$

其中  $M, K, F$  分别为普通梁的质量矩阵, 刚度矩阵及外力向量;  $C$  为由驱动器给出的阻尼矩阵, 只有带驱动器的单元对它贡献, 对于带驱动器的单元, 有

$$C_e = 2k_D Gk_s l_e \left( \frac{d^2 N^T}{dx^2} \right)_{x=a} \left( \frac{dN}{dx} \right)_a^{a+b} \quad (8)$$

其中  $G$  为反馈放大参数;  $N$  为单元形状矩阵 (见文献[3]). 这样,  $C$  可表示为

$$C = SC_a$$

其中  $S$  为常数;  $C_a$  由驱动器在梁上的铺设点  $a$  决定.

## 2 梁元中驱动器的最优布局

### 2.1 数值分析梁元中驱动器的最优布局

目前, 只有 Crawley 等<sup>[4]</sup>在文章中提到了悬臂梁中驱动器的最优布局 (铺设一个驱动器), 没有较深入的讨论. 基于以上各种情况, 对布局问题进行初步的探讨.

先分析驱动器在梁的初始振形为一阶模态、二阶模态 2 种情况下的布局. 在梁的任意位置  $a$  处布置传感器和驱动器, 并与反馈装置构成回路. 梁的初始状态为: 外加载荷为零, 初始速度为零, 初始振形为一阶模态和二阶模态. 现在分别把驱动器铺设在悬臂梁的不同的位置处 ( $a = 0, a = 0.1, \dots, a = 1.0$ ). 分别对各个铺设点解智能梁元的微分方程:

$$M\dot{U} + SC_a\dot{U} + KU = 0 \quad (9)$$

采用 newmark 积分法<sup>[3], [5]</sup>来解此方程. 对计算结果进行整理及分析, 得到驱动器放在悬臂梁和简支梁的不同位置时不同的能量曲线图 (梁的参数

见表 1), 如图 2~图 5 所示.

表 1 梁的特性常数

特性	数值	特性	数值
长度 $L/m$	1	模量 $E/(N \cdot m^{-2})$	$2.0 \times 10^{11}$
高度 $h/m$	0.012	密度 $\rho/(kg \cdot m^{-3})$	0.942
宽度 $b/m$	0.01	惯性积 $I/m^4$	$1.44 \times 10^{-9}$

注:  $\rho$  为梁的单位长度的密度.

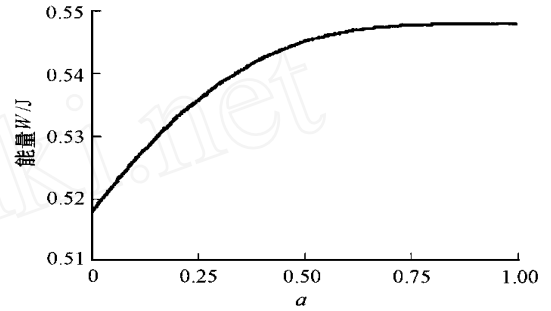


图 2 悬臂梁一阶模态能量分布

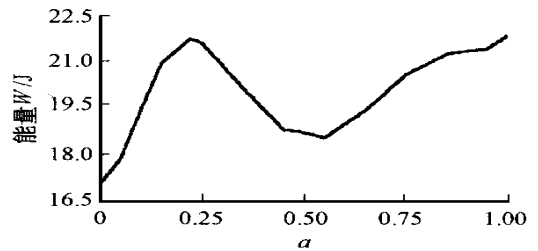


图 3 悬臂梁二阶模态能量分布

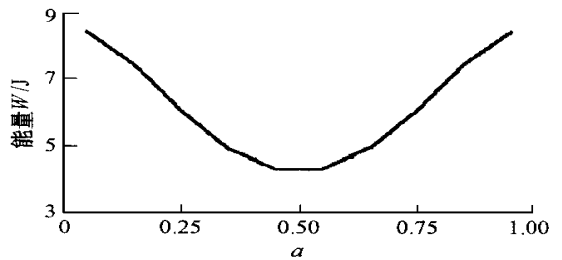


图 4 简支梁的一阶模态能量分布

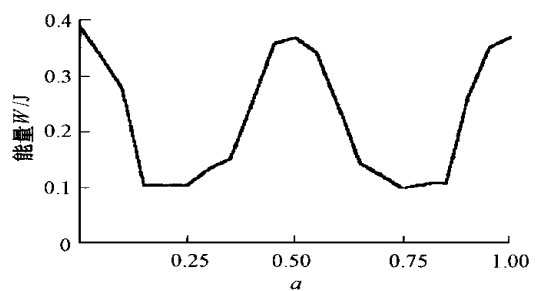


图 5 简支梁的二阶模态能量分布

把上面的图形与梁的应变图形 (具体图形见参考文献[5]) 进行比较发现 (无论是简支梁还是悬臂梁, 无论梁的初始振形是一阶模态还是二阶模态): 在梁的应变最大点附近, 能量的衰减速度都是最大的, 梁的应变越是趋近于零点, 能量的衰

减速度越慢,当在梁的应变为零点时,能量几乎没有衰减的趋势.所以得出结论:驱动器在梁上的最优布局点为梁的应变最大点.

分析简支梁的一阶模态能量分布图与二阶模态能量分布图,发现:

1) 在一阶模态图中,在应变最大点  $a = 0.5$  附近,驱动器的铺设点相差 0.1,能量曲线便发生很大的变化(当  $t = 0.0309$  时,  $W_{a=0.4}$  与  $W_{a=0.5}$  相差为 5.9%);但在应变为零点附近,驱动器的铺设点同样相差 0.1,能量曲线却几乎重合(当  $t = 0.0309$  时,  $W_{a=0}$  与  $W_{a=0.1}$  相差只有 0.9%).所以得出结论:对于梁的低阶模态,应变最大点附近为驱动器的铺设点的敏感区.

2) 在二阶模态图中,在应变为零点附近,驱动器的铺设点即使相差 0.05,能量曲线便发生很大的变化(当  $t = 0.0309$  时,  $W_{a=0.05}$  与  $W_{a=0.15}$  相差 99%);但在非应变为零点附近,能量曲线却几乎重合(当  $t = 0.0309$  时,  $W_{a=0.15}$  与  $W_{a=0.25}$  相差只有 0.0645%).故得出结论:对于梁的高阶模态,在应变为零点附近,为驱动器铺设点的敏感区.

从上面的分析得出:对一个悬臂梁,无论其初始振形是一阶模态还是二阶模态,驱动器的铺设点都应尽量靠近应变最大处,即:应铺设在梁的根部.对于简支梁,如果初始振形为一阶模态,驱动器铺设的最佳点在梁的中间;如果为二阶模态,则应铺设在梁的  $1/4$  或  $3/4$  处.梁的低阶模态,应变最大点附近为驱动器在梁上铺设点的敏感区,梁的高阶模态,在应变为零点附近,为驱动器在梁上铺设点的敏感区.

## 2.2 理论分析驱动器的最优布局解

前面的分析是从数值计算的角度来求驱动器最优布局点的,为了证实这个结论,现在从解析的角度进行进一步的分析.

设结构的振动为自由振动,此时,智能梁的动态微分方程(6)便可写为

$$\ddot{w}(x, t) = -EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [2k_D V_D(t) a(x)] \quad (10)$$

对于梁的任意一个单元,其任意时刻的能量  $W$  均可以表示为动能与势能之和,即

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (11)$$

能量方程对时间  $t$  的微分为

$$\frac{dW}{dt} = -2k_D Gk_s L b \cdot \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \Big|_{x=a} \right)^2 \quad (12)$$

若驱动器在梁中的布局为最优布局,则此时的  $\frac{dW}{dt}$  应该满足

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{x=a} = / 2k_D Gk_s L b / \cdot \max \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right)^2 \quad (13)$$

即:在驱动器所有的铺设点中,最优铺设点  $x = a$  处的能量衰减曲线应该是下降幅度最大的曲线.

对于多自由度的固有振动,广义位移  $w$  均随时间  $t$  同步变化,同一时刻通过平衡位置,同一时刻到达最大值,振动形状不依赖于时间.根据这一性质,设  $w$  具有分离变量的形式,即

$$w(x, t) = U(x) T(t) \quad (14)$$

则任意时刻,  $\left| \frac{dW}{dt} \right|_{x=a} = P \max^2$  (15)

其中  $P$  为一常数.此时求驱动器在梁上的最优布局点便转化为求梁上应变值的最大点,即

$$/ / x=a = \max / / 0 \quad x \quad L \quad (16)$$

当结构的阻尼远远小于临界阻尼时,结构的模态和频率与无粘性阻尼时的模态和频率相差无几.所以,对于一般的梁元,在上面铺设驱动器,驱动器的最优布局点为梁的应变最大点.这个结论与前面数值分析的结果完全符合.

## 3 有限长度驱动器的布局初探

以下的分析中,驱动器的引入不影响梁的振形,驱动器的控制为最优控制(见文献[6]).

以上进行的有关智能梁元中驱动器的分析,都是在不考虑驱动器的长度的基础上进行的.但在实际的应用中,驱动器是有一定长度的.为了避免由于忽略驱动器的长度所带来的误差,现在对有限长度的驱动器的布局问题进行初步的探讨.

前面已经得到智能梁元的微分方程:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$$

现在设驱动器带来的控制力为  $f(\dot{U})$ ,且结构的振动为自由振动,则智能梁的微分方程可以写为

$$M\ddot{U} + f(\dot{U}) + KU = 0 \quad (17)$$

其中  $f(\dot{U})$  为反馈电压带来得控制力.

现在设在梁上共铺设  $n$  个驱动器,铺设点分别为  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ . 设  $U_i$  为铺设点  $x_i$  处的位移.同时设所有驱动器铺设点处的反馈电压都同号.则对任意一个铺设点,都应有

$$M\ddot{U}_i + f(\dot{U}_i) + KU_i = 0 \quad (18)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n$ . 现在对所有的  $i$  进行求和:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (20)$$

由于  $\mathbf{U} = \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} U_i, \mathbf{f}(\dot{\mathbf{U}}) = \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} f(\dot{U}_i)$ , 易证它们就是铺设  $n$  个驱动器时的位移和驱动阻尼向量。

由于质量矩阵  $\mathbf{M}$ 、刚度矩阵  $\mathbf{K}$  为对称矩阵, 所以能量  $W$  对时间  $t$  的微分可以表示为

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \quad (21)$$

根据智能梁的微分方程(17), 最终得到能量  $W$  对时间  $t$  的微分方程:

$$\frac{dW}{dt} = -\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{f}(\dot{\mathbf{U}}) \quad (22)$$

当驱动器与传感器铺设在梁上的相同位置, 驱动器间无相互作用, 而且驱动器的控制为最优控制时(最优控制力只与速度符号有关), (23)式成立(详细证明见文献[6])。

$$\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{f}(\dot{\mathbf{U}}) = \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \dot{U}_i^T f(\dot{U}_i) \quad (23)$$

$$\frac{dW}{dt} = \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} - \dot{U}_i^T f(\dot{U}_i) = \begin{matrix} n \\ i=1 \end{matrix} \frac{dW_i}{dt} \quad (24)$$

对(24)式进行积分得

$$W = \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} W_i \quad (25)$$

当结构的单元分得足够小时,  $W = \int_{a+b} W dx$  成立, 对于振动的结构, 能量  $W$  在驱动器的作用下逐渐衰减。若驱动器在梁上的布局为最优布局时, 则在所有的布局点中, 最优布局点处的能量在任意时刻都应是最小的, 即(24)式应满足

$$W_{x=d} = \min \left[ \int_{a+b} W dx \right] \quad 0 \quad a \quad 1 \quad (26)$$

其中  $a$  为有限长度的驱动器的铺设点;  $b$  为驱动器铺设区域;  $d$  为最优值。此时, 有限长度的驱动器的最优布局问题便转化为: 把长度为  $b$  的驱动器铺设在何处时, 才能使结构的能量曲线与坐标轴(长度为  $b$  的区域)所包围的面积最小。

## 参 考 文 献

- [1] Hanagud S, Obal M W, Calise A J. Optimal vibration control by the use of piezoceramic sensors and actuators [R]. AIAA-87-0959, 1987.
- [2] Kagawa Y, Gadow G M L. Finite element analysis of flexure-type vibrators with electrostrictive transducers[J]. IEEE Trans on Sonic and Ultrasonics, 1970, 17(1): 41~49.
- [3] 张汝清, 董明. 结构程序设计[M]. 重庆: 重庆出版社, 1988. 233~245.
- [4] Crawley E F, J de L. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures[J]. AIAA Journal, 1987, 25(10): 1373~1385.
- [5] 巴特 KJ, 威尔逊 EJ. 有限元分析中的数值方法[M]. 林公豫, 罗恩译. 北京: 科学出版社, 1985. 344~350.
- [6] 任秀华. 压电材料类智能梁元的优化控制[D]. 北京: 北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系, 1999.

## Mechanical Performances of Piezoelectric Element and Optimal Control

REN Xiu-hua

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics)

DING Hua

(Chinese Academy of Science, Institute of Mechanics)

MAI Han-chao LU Meng

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics)

Abstract: On the basis of performances of the piezoelectric actuators and sensors, the characteristics of beam with highly distributed piezoelectric sensors and actuators and a feedback conditioning system are analyzed, and the dynamic differential equation is also derived. A finite element model of the intelligent beam has been formulated to derive the differential equation. Having obtained the basic theories of the intelligent beam, both the first mode and the second mode of the cantilever beam and the simple supported beam are analyzed and calculated to determine the appropriate criteria for placing the actuator. Characteristics related to the location for the actuator placement are also developed and illustrated. The choice of actuator location is on the assumption that the actuator and sensor have no length, so the location of actuator that has length is also studied.

Key words: piezoelectric materials; finite elements; sensors; actuators; optimal location