

一个湍流重正化群二阶矩封闭模式的数值模拟*

陆晓霞¹ 刘正锋¹ 王晓宏^{1,2} **

1. 中国科学技术大学热科学和能源工程系, 合肥 230026;

2. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080

摘要 通过对充分发展旋转槽道和后台阶流动两个二维定常湍流问题的计算, 比较了标准 k 模型、Gbsor-Launder 二阶矩和一个基于湍流重正化群理论推导的二阶矩模型模拟复杂湍流运动的能力, 尤其是检验这种新型的湍流重正化群二阶矩模型的性能. 计算结果表明, 与标准 k 模型相比, Reynolds 应力模型能够捕捉到旋转流动中由旋转带来的湍流流场结构的改变, 能更准确地预测后台阶流动中的回流区长度, 对于各物理量的计算, 湍流重正化群二阶矩模型和 Gbsor-Launder 模型的精度相当.

关键词 湍流模式 二阶矩封闭模型 计算流体力学 重正化群

随着计算机的迅速发展, 湍流数值模拟已成为研究工程实际中湍流问题的重要手段, 复杂湍流的数值模拟大都依靠湍流模式来实现, 这就要求湍流模式具有丰富的内容和很强的预报性. 近年来, 湍流模式取得了很大的发展. 从 Boussinesq 假设出发得到的线性涡粘性模型方便简单, 但对于复杂的湍流运动预报性较差, 因此后来又发展了一系列非线性涡粘性模型, 非线性模型处理复杂流动时比线性模型有不少改进, 在此同时, 基于 Reynolds 应力的微分方程得到的湍流二阶矩封闭模式(又称为 Reynolds 应力微分模型), 也取得了很大的发展, 如 Shi 和 Lumley 提出了二阶非线性压力-应变率快速项模型^[1], Launder, Reece 和 Rodi 提出了著名的 LRR 模型^[2], 符松等提出了 FL T 二阶矩非线性模型^[3]. 湍流二阶矩模式中含有比涡粘性模型更丰富的物理信息, 有可能更全面细致地描述湍流运动, 上述湍流模型是通过简单的量纲分析和数学物理性质的合理性分析得到的, 模型常数由简单湍流的实验数据予以估计. 完全从理论出发推导湍流 Reynolds 应力

输运方程并计算湍流经验常数, 对于认识湍流运动和建立描述各类工程实际中不同特性的湍流运动封闭模式具有重要的理论和现实意义.

近年来, 统计力学方法被应用到湍流模型的建立中来, Yoshizawa 提出了双重尺度展开法, 利用 Kraichnan 的直接相互作用理论分析小尺度的湍流脉动量运动方程, 从理论上推导了湍流非线性模式和二阶矩模式并计算湍流经验常数^[4,5]. 1986年, Yakhot 和 Orszag (YO) 系统地利用重正化群方法研究湍流运动^[6], 在此之后推导得到湍流 RNG k 模型^[6-8], 该模型已被 Fluent 等计算流体软件所采用. Rubinstein 和 Barton 利用重正化群理论推导非线性涡粘性模式和二阶矩模式, 并在理论上计算了模式常数^[9,10], 但是他们的理论中存在着一些不自洽的地方, 我们在 Rubinstein 和 Barton 的工作基础上, 进行了重新推导计算^[11-13]. 直接利用重正化群方法得到的湍流非线性涡粘性模式中, 没有平均应变率张量与平均涡量张量的相互作用项, 这样该模式在旋转流场中应用的实际效果并不会比线性模式强.

2007-05-03 收稿, 2007-06-12 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 10472115)、教育部新世纪优秀人才支持计划和中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室开放研究课题资助项目

** 通信作者, xhwang@ustc.edu.cn

重正化群方法被成功地应用于研究临界现象中的相变问题。当物理系统趋近相变临界点时，其特征尺度趋于无穷大，在临界点处，物理系统对于所有尺度都满足自相似性，这是重正化群方法能够严格成立的前提条件。可以将 Reynolds 数趋于无穷大的各向同性湍流类比于临界现象中的相变临界点。但实际工程应用中的有限 Reynolds 数下的剪切湍流场不再对所有尺度都满足自相似性，假设剪切湍流的高波数小涡是近各向同性的，本文给出的剪切湍流的理论封闭模型基于如下出发点：将湍流运动分成平均场和脉动场两部分，利用重正化群方法分析湍流的脉动场，在此基础上将脉动场的统计平均量和平均场联系起来。

湍流运动的平均场和脉动场具有不同的空间和时间尺度，采用 Yoshizawa 的观点，对平均场和脉动场采用不同尺度展开，再利用湍流重正化群方法推导湍流二阶非线性 Reynolds 应力模型¹⁾。对于湍流模式的可靠性需利用实际算例予以检验，本文采用两个典型算例来验证该模型的有效性，计算结果与实验数据及工程上较常使用的湍流 Gibson-Lauder 二阶矩模型进行对比。为验证湍流模型对于旋转湍流的预报性，选取充分发展的定常二维旋转槽道流动；为验证湍流模型对于湍流二次流的预报性，选取二维后台阶流动，这两个算例虽然简单，但都具有很强的工程应用背景，其中旋转槽道湍流流动在涡轮机械装置中很常见，而后台阶流动则代表了燃烧工程、水利工程中很普遍的突扩流动。

1 湍流计算模型

不可压缩湍流流动动量方程和连续性方程为

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + 2 \tau_{ijk} U_j \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

其中 U_i 为平均速度， u_i 为脉动速度， τ_{ijk} 为坐标系旋转角速度。为使方程封闭，需要对 Reynolds 应力

$\tau_{ij} = - \overline{u_i u_j}$ 建模。目前在工程中最常用的是标准 k -模型，Reynolds 应力采用线性涡粘性假设：

$$\tau_{ij} = - \frac{2}{3} k \delta_{ij} + C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

上式中湍流能量 k 和耗散率 ϵ 的控制方程如下：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_m \frac{\partial k}{\partial x_m} = - \tau_{im} \frac{\partial U_m}{\partial x_i} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\left(\nu + C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_m} \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_m \frac{\partial \epsilon}{\partial x_m} = - C_1 \frac{\tau_{im}}{k} \frac{\partial U_m}{\partial x_i} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\left(\nu + C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_m} \right] \quad (5)$$

通常各湍流常数选取： $C_\mu = 0.09$ ， $C_1 = 1.44$ ， $C_2 = 1.92$ ， $\sigma_k = 1.0$ ， $\sigma_\epsilon = 1.3$ 。

为计算工程实际中复杂流动，人们又发展了 Reynolds 应力微分模型，即 Reynolds 应力 τ_{ij} 根据以下微分方程求出

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = & - \tau_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \\ & 2 \tau_{k(jm} \tau_{ikm} + \tau_{im} \tau_{jkm}) - \tau_{ij} \epsilon + \frac{2}{3} \tau_{ij} \epsilon + \\ & \frac{\partial}{\partial x_k} \left[C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (6)$$

方程(6)中的 τ_{ij} 称为压力变形项，其常用的形式由 Launder, Reece 和 Rodi 于 1975 年提出²⁾：

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & - C_1 b_{ij} + C_2 k S_{ij} + \\ & C_3 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) + \\ & C_4 k (b_{ik} \tau_{jk} + b_{jk} \tau_{ik}) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ ， $\tau_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ ， $\tau_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\tau_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) / 2k$ ， C_1 ， C_2 ， C_3 和 C_4 为模型参数。在壁面附近，Reynolds 应力方程(7)

1) Wang XH, Liu ZF. Derivation of the second-moment closures for the Reynolds stress using the renormalization group analysis and the two-scale expansion technique, in press

中需附加壁面影响项 ij, w (又称为壁面反射项)^[14], 其形式如下:

$$ij, w = \left[C_{1w} \frac{1}{k} \left(k_m n_k n_m ij - \frac{3}{2} k_i n_k n_j - \frac{3}{2} k_j n_k n_i \right) + C_{2w} \left(k_{m2} n_k n_m ij - \frac{3}{2} k_{i2} n_k n_j - \frac{3}{2} k_{j2} n_k n_i \right) \right] f \quad (8)$$

其中 $ij2 = C_2 k S_{ij} + C_3 k \left[b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{nm} S_{nm} ij \right] + C_4 k (b_{ik} - b_{jk} + b_{jk} - b_{ik})$, 是压力应变项中的快速应变部分; $C_{1w} = 0.3, C_{2w} = 0.5$; n_i 是壁面法向单位矢量在 x_i 方向的分量, $f = Ck^{\frac{2}{3}} / (d)$ 为衰减函数 (其中 d 是流场点到壁面的垂直距离), 比例系数 C 的选取使得在紧靠壁面附近的对数层内 $f = 1$.

方程 (1), (2) 和 (4) — (8) 为湍流二阶矩模式的基本方程组, Gibson 和 Launder 在 1978 年提出的 Gibson-Launder Reynolds 微分应力模型^[14] (以下简称 GL 模型), 湍流常数选取如下:

$$C_1 = 3.6, C_2 = 0.8, C_3 = 1.2, C_4 = 1.2 \quad (9)$$

采用 Yoshizawa 的双重尺度展开法, 并利用 YO 湍流重正化方法分析脉动速度场从理论上推得和方程 (7) 形式完全相同的湍流二阶矩模型, 并完全从理论上计算得到各湍流常数¹⁾:

$$C_{\mu} = 0.097, C_1 = 7.2, C_2 = 0.64, C_3 = 0.66, C_4 = 0.92 \quad (10)$$

由于推导计算过程较复杂, 在本文中只给出理论结果, 将该模型简称为湍流 RNG 模型.

为提高计算的稳定性, 将动量方程形式改写成:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(+ C_{\mu} k^2 \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \overline{u_i u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{\mu} k^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] \quad (11)$$

其中 $+ C_{\mu} k^2$ 为表观粘度 (apparent viscosity). 计算表明, 这种做法可以有效提高计算的收敛性. 在

壁面附近, 采用壁面函数法予以计算^[15].

下面将采用标准 k -模型、GL 模型和我们推导的理论模型计算充分发展的定常二维旋转槽道流动和后台阶流动, 并将计算结果和实验相比较.

2 数值计算

(1) 充分发展旋转槽道湍流

旋转槽道湍流是检验模型有效性的一个典型算例. 众所周知标准 k -模型不能很好描述旋转湍流, 这是因为在充分发展的二维旋转槽道湍流中, 柯氏力不出现在动量方程中, 只能通过影响脉动流场来使平均速度场发生偏移, 而标准 k -模型在 Reynolds 应力表达式中未能引入旋转的影响, 因此在非惯性坐标系下计算平均速度仍为对称分布. 而由于 Reynolds 应力方程包含旋转项, 湍流二阶矩模型有可能较好预测充分发展二维旋转槽道湍流. 对于充分发展的旋转槽道湍流流动 (图 1), Reynolds 数定义为 $Re = U_w D / \nu$, 其中 D 为槽道宽度, U_w 为 x 方向平均流速; Rossby 数定义 $Ro = D / U_w \omega$, 其中 ω 为槽道旋转角速度.

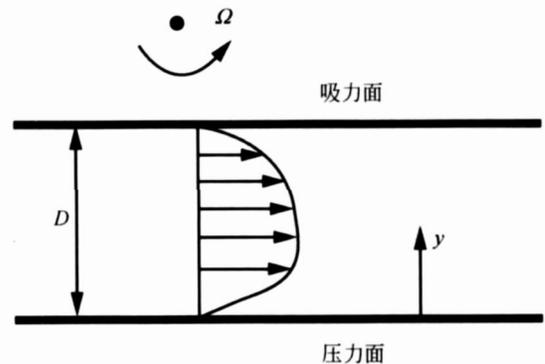


图 1 二维旋转槽道流动示意图

由于流动充分发展, 二维旋转槽道流可以简化为一个一维问题, x 方向的动量方程为:

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{d \overline{u v}}{dy} = 0 \quad (12)$$

动量方程 (12) 中的 $\frac{dP}{dx}$ 为常数, 其决定了两平板之间的流体流量, 亦即 Reynolds 数由 $\frac{dP}{dx}$ 确定. 相类似, 其他变量的控制方程组 (4) — (8) 将简化成常微分方

1) 见第 103 页脚注 1)

程组. 在本算例中, 为求出给定 Reynolds 数的流场, 先假定一个 $\frac{dP^*}{dx}$, 再由计算所得的 Reynolds 数通过 Newton 迭代法来修正压力梯度, 收敛得到所需 Reynolds 数下的流场. 采用控制容积积分法离散, 沿 y 方向采用 80 个计算网格.

图 2 给出了不同 Reynolds 数和旋转速度下平均速度 U 沿高度方向分布的数值计算与实验对比图. 图 2(b) 表明在较大旋转速度下, Reynolds 应力模型和标准 k 模型具有明显不同的特性, 标准 k 模型计算所得的速度剖面仍是对称分布, 这一点与实

验观察不符. 而两个 Reynolds 应力模型所得结果呈现了平均速度的不对称分布, 其趋势与实验数据一致, 但数值大小上有偏差.

图 3 给出了 $Re = 27600$ 和 $Ro = 0.068$ 流动条件下各模型计算得到的脉动速度沿高度方向的分布与大涡模拟结果所做的比较. 如图可见, GL 模型和 RNG 模型对 x 方向 Reynolds 正应力的模拟与实验吻合的情况尚好, 而垂直于主流方向的两个正应力的拟合情况则稍有些不理想. 但标准 k 模型所得出的结果不但是对称分布, 并且有 $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$ 这与实验观测不符.

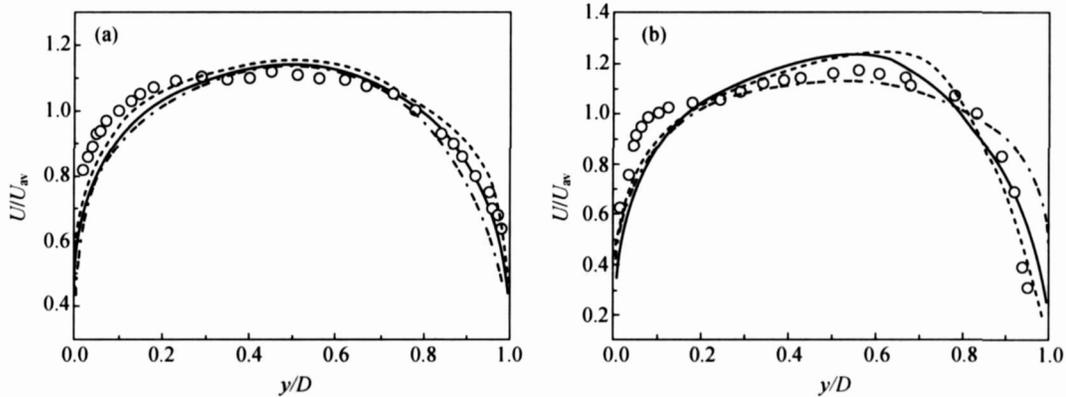


图 2 不同 Reynolds 数和旋转速度下无量纲平均速度剖面

圆圈为实验数据^[16], 点划线、虚线和实线分别表示标准 k 模型、GL 模型及 RNG 模型的计算结果

(a) $Re = 35000, Ro = 0.068$; (b) $Re = 11500, Ro = 0.21$

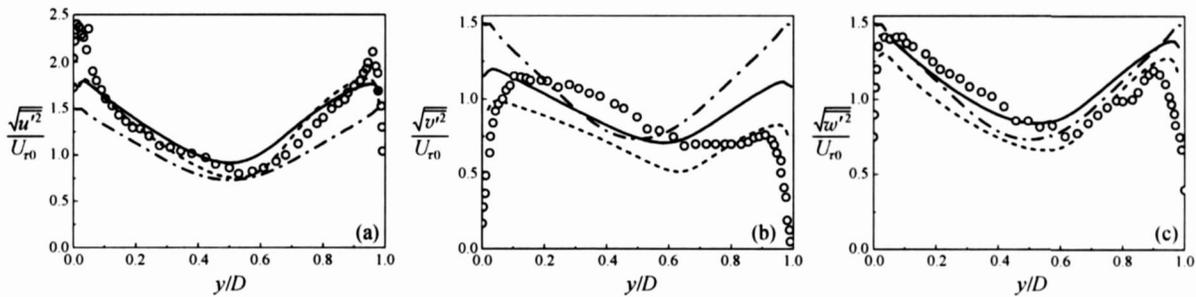


图 3 无量纲脉动速度剖面, $Re = 27600, Ro = 0.068$

圆圈为大涡模拟数据^[17], 点划线、虚线和实线分别表示标准 k 模型、GL 模型及 RNG 模型的计算结果

(a) x 方向无量纲脉动速度 $\sqrt{u'^2}/U_0$; (b) y 方向无量纲脉动速度 $\sqrt{v'^2}/U_0$; (c) z 方向无量纲脉动速度 $\sqrt{w'^2}/U_0$

(2) 二维后台阶流动

二维后台阶流动是检验湍流模型有效性的另一个典型算例, 它的流场边界简单, 但又包含了分离流动的主要特征, 一个湍流模型能否很好地描述后台阶流动的典型特性已成为人们判断其是

否成功的标准之一. Kim 等于 1980 年做了二维后台阶流动的著名实验^[18], 1980 年斯坦福会议上 Eaton 和 Johnstone 等公布的实验数据^[19]被广泛地被用于比较和验证各湍流模型, 在 Kim 等的实验中所采用的台阶突扩比为 3 : 2, $Re =$

44000. 二维后台阶的台阶高度设为 H , 入口槽道宽度为 H_1 . Reynolds 数定义为 $Re = U_0 H / \nu$, 定义台阶突扩比 $R = (H_1 + H) / H_1$, 其中 U_0 为入口槽道中心平均速度.

本文考虑的是一个不可压缩充分发展的定常湍流流动, 入口位置取在台阶前距台阶 $5H$ 的上游位置, 入口流动参数为充分发展槽道湍流的计算结果, 槽道出口取充分发展假定, 即 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, (ϕ 为 U, V, k, ϵ 等), 为使出口处流动达到充分发展条件, 出口位置距台阶要足够远, 现将出口位置定义在距离台阶 $35H$ 的下游位置. 方程采用控制容积积分法进行离散, 对流-扩散项采用混合格式 (hybrid scheme), 速度-压力耦合求解采用 SIMPLE 算法, 计算网格为 120×90 (对不同结构台阶纵向网格数有调整), x 方向为不均匀网格, y 方向采用均匀网格.

图 4 给出了计算结果流线图. 由流线图可见, 计算得到的标准 k 模型所示回流区长度 X_r 为 6.0 个台阶高度, 较之实验值的 $X_r = 7.1H$ 低估了约 15%, 这与 Thangam 等^[20]的结果相一致. 而 GL 模型计算结果, 回流区长度为 7.0 个台阶高度, 这与 Lebrere 等^[21]的计算结果也相一致. 采用 RNG 模型计算, 该后台阶流动回流区长度为 6.95 个台阶高度, 与实验值及 GL 模型的结果很接近. (Kim 等 1980 年实验测定回流区长度为 7 ± 1 , 而后该实验经 Johnstone 等改进, 测量精度有所提高, 一般认为该基准实验回流区长度 7.1, 也有人认为是 7.0 ± 0.3 ^[22].) 可见, RNG 模型与 GL 模型一样, 在预测后台阶流动回流区长度

上, 结果比较令人满意. 对于不同位置处的平均速度及脉动速度, 将数值计算结果和文献中提供的实验数据相对比 (图 5). 从图 5(a) 看出, 两个 Reynolds 应力模型对平均速度场的预测与标准 k 模型的结果较为接近, 均与实验值吻合得较好, 从图 5(b) 和 (c) 可见, Reynolds 应力模型对 Reynolds 正应力和剪应力的预测优于标准 k 模型.

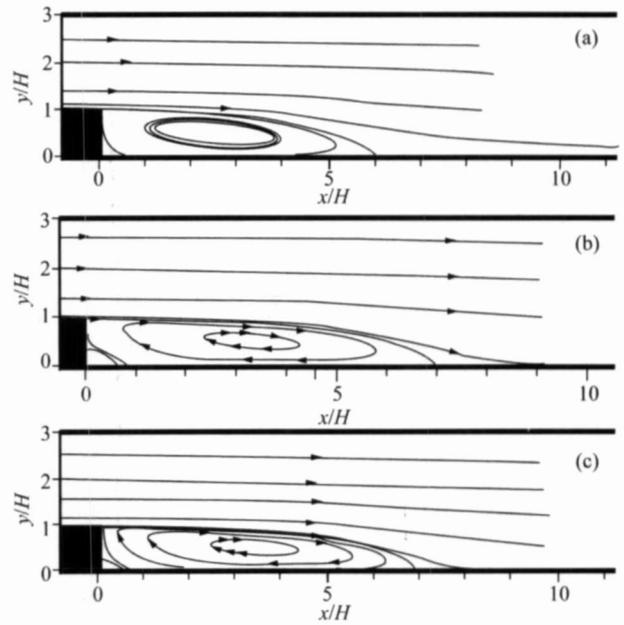


图 4 后台阶流动计算流线图

- (a) 标准 k 模型, 回流区长度 $X_r / H = 6.0$;
- (b) GL 模型, 回流区长度为 $X_r / H = 7.0$;
- (c) RNG 模型, 回流区长度为 $X_r / H = 6.95$

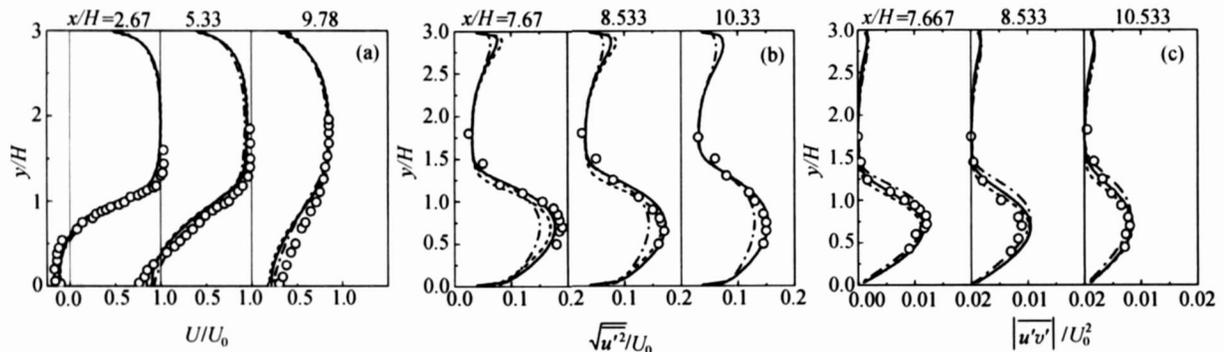


图 5 在 x 方向不同位置处的各无量纲量沿 y 方向分布图

- (a) 无量纲平均速度 U/U_0 ; (b) 无量纲脉动速度 $\sqrt{u'^2}/U_0$; (c) 无量纲 Reynolds 剪应力 $|\overline{uv'}|/U_0^2$
- 圆圈为实验数据^[19], 点划线、虚线和实线分别表示标准 k 模型、GL 模型及 RNG 模型的计算结果

本文对壁面压力系数进行了计算. 图 6 可见, 在回流区内, 两个二阶矩模式对压力系数的预测均明显优于标准 k 模型, GL 模型和 RNG 模型的结果在此相差不大; 在再附着点 ($x/H = 7$) 附近, RNG 模型的模拟结果比其他两个模型与实验的吻

合情况更好; 而在再附着点后发展的边界层中, RNG 模型的结果又与标准 k 模型相接近, 与实验相当接近, 要比 GL 模型优越, GL 模型对此处压力系数有一定程度的低估. 总体来说, RNG 模型对压力系数作了较为准确的预测.

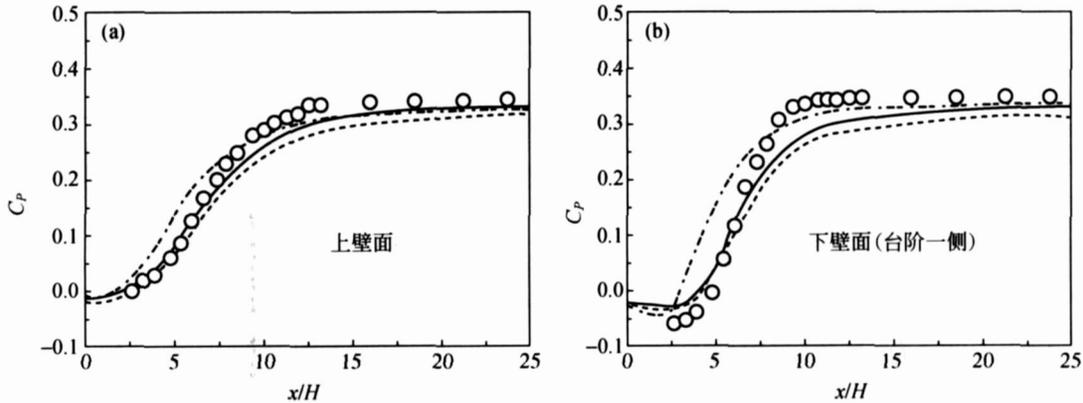


图 6 上下壁面压力系数变化图

(a) 上壁面; (b) 下壁面(台阶一侧) $C_p = (p - p_{ref}) / \left(\frac{1}{2} \rho U_0^2 \right)$ (圆圈实验数据^[19], 点划线、虚线和实线分别表示标准 k 模型、GL 模型及 RNG 模型的计算结果)

我们还用这三种模型计算了不同台阶高度和流动状况的二维后台阶流动. 图 7 给出了 $Re = 44000$ 时后台阶流动的回流区长度与突扩比变化关系. 计算结果表明随着后台阶突扩比的增加, 回流区长度增长, 这一点与王兵等用大涡模拟所做的数值研究结论^[22]相一致.

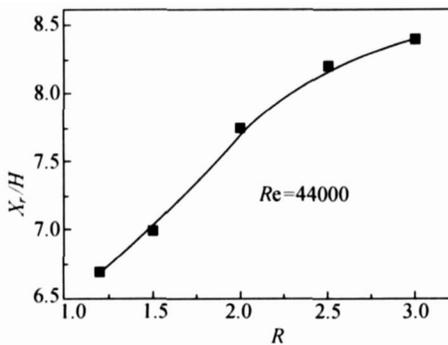


图 7 $Re = 44000$ 时后台阶流动回流区长度随突扩比的变化关系

针对文献中提供的实验数据, 不同突扩比和 Reynolds 数的回流区长度的计算结果和实验数据对比见表 1. 从表 1 中可见, 对于不同的台阶流动, RNG 模型和 GL 模型对回流区长度的预测能力不相

上下, 而标准 k 模型的结果则不尽人意.

表 1 不同突扩比和 Reynolds 数流动的后台阶流动回流区长度的数值计算与实验值的对比

回流区长度	实验值	标准 k 模型	GL 模型	RNG 模型
$Re = 1.1 \times 10^5, R = 2$	8.5 ± 0.5 ^[23,24]	6.9	7.8	7.9
$Re = 4.4 \times 10^4, R = 1.5$	7.1 ^[18]	6.0	7.0	6.95
$Re = 3.7 \times 10^4, R = 1.2$	6.84 ^[23,25]	5.8	6.9	6.85

综上所述, 这两个湍流二阶矩封闭模式对后台阶流动的预测能力要强于标准 k 模型, 其中 RNG 模型和 GL 模型的表现相当.

3 讨论

通过对充分发展旋转槽道湍流和后台阶流动两个二维定常湍流问题进行计算, 比较了标准 k 模型、Gibson-Lauder 和 RNG Reynolds 应力微分模型对这两种典型湍流运动的模拟能力, 尤其是检验这种新型的 RNG 二阶矩封闭模式的性能. 结果表明, 对于复杂湍流运动, 这两个湍流二阶矩封闭模式的表现将好于标准 k 模型, 在旋转湍流中, 能够捕捉到由旋转带来的流场结构的改变, 这点是标准 k 模型所不能够的; 在后台阶流动中, Reynolds

应力模型对回流区长度的预测要比标准 k 模型准确得多. 计算结果显示, 对于本文提供的两个算例, RNG模型和 GL模型的精度相当, 这表明湍流 RNG模型可能具有模拟复杂湍流流场的能力.

在处理复杂湍流问题时, 传统的标准 k 模型存在局限性, 而 Reynolds 应力微分模型有可能显出其较好的预测能力. 本文提供并检验的二阶矩模型是结合 Yoshizawa 的双重尺度展开法和湍流重正化群理论推得的理论模型, 该模型的数学形式和模型常数都是完全通过理论计算得到, 不含有任何待定的经验常数. 如何去建立并完善模式理论一直是一个热点问题, 这对于计算工程实际问题很重要, 利用包括重正化群理论在内的统计物理方法, 完全从理论上出发推导湍流模式并计算对应的湍流常数, 将有助于湍流模式理论的发展.

参 考 文 献

- Shi TH, Lumley JL. Modelling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations. Tech Rep FDA-85-3, Cornell Univ, Ithaca, NY, 1985
- Launder BE, Reece G, Rodi W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. *J Fluid Mech*, 1975, 63: 537—566
- Fu S, Launder BE, Tselapidakis DP. Accommodating the effects of high strain rates in the modeling the pressure-strain correlation. Rep No TFD/87/5, Mech Eng Dep, UMIST, England, 1987
- Yoshizawa A. Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation. *Phys Fluids*, 1984, 27: 1377—1387
- Yoshizawa A. Derivation of a model Reynolds stress transport equation using a renormalization of the eddy-viscosity representation. *Phys Fluids A*, 1993, 5: 707—715
- Yakhot V, Orszag SA. Renormalization group analysis of turbulence I Basic theory. *J Sci Comput*, 1986, 1: 3—51
- Yakhot V, Smith LM. The renormalization group, the expansion and derivation of turbulence models. *J Sci Comput*, 1992, 7: 35—61
- Yakhot V, Orszag SA, Thangum S, et al. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys Fluids A*, 1992, 4: 1510—1520
- Rubinstein R, Barton JM. Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group. *Phys Fluids A*, 1990, 2: 1472—1476
- Rubinstein R, Barton JM. Renormalization group analysis of Reynolds stress transport equation. *Phys Fluids A*, 1992, 4: 1759—1766
- Wang XH, Wu F. One modification to the Yakhot-Orszag calculation in the renormalization-group method of turbulence. *Phys Rev E*, 1993, 48: R37—R38
- 刘正锋, 王晓宏. 利用重正化群方法推导湍流二阶矩封闭模型. *力学学报*, 2007, 39: 195—201
- 刘正锋, 王晓宏. 利用重正化群方法推导非线性 Reynolds 应力模型. *自然科学进展*, 1997, 17(9): 1310—1315
- Gibson MM, Launder BE. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J Fluid Mech*, 1978, 86: 491—511
- 陶文铨. *数值传热学* (第2版). 西安: 西安交通大学出版社, 2001
- Johnston JP, Halleen RM, Lezius DK. Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow. *J Fluid Mech* 1972, 56: 533—557
- Kim J. The effects of rotation on turbulence structure. *Proceedings 4th Symposium on Turbulence Shear Flow*, Karlsruhe, 1983, 6. 14—6. 19
- Kim J, Kline SJ, Johnson JP. Investigation of a reattaching turbulent shear layer: Flow over a backward-facing step. *J Fluids Engr*, 1980, 102: 302—308
- Eaton JK, Johnston JP. Turbulent flow reattachment: An experimental study of the flow and structure behind a backward-facing step. Stanford Univ, TR MD-39, Stanford, CA, June, 1980
- Thangam S, Speziale CG. Turbulent flow past a backward-facing step: A critical evaluation of two-equation models. *AIAA J*, 1992, 30: 1314—1320
- Lebrere L, Buffat M, Le Penven L, et al. Application of Reynolds stress modeling to engine flow calculations. *Transactions of the ASME*, 1996, 118: 710—721
- 王兵, 张会强, 王希麟, 等. 后台阶流动再附着过程的大涡模拟研究. *计算力学学报*, 2004, 21: 17—20
- Hanjalic K, Jakirlic S. Contribution towards the second-moment closure modeling of separating turbulent flow. *Computers and Fluids*. 1998, 27: 137—156
- Durst F, Schmitt F. Experimental studies of high Reynolds number backward-facing step flows. In: *Proc 5th Symp on Turbulent Shear Flows*, Cornell University, 1985, 5. 19
- Jovic S, Driver DM. Backward-facing step measurements at low Reynolds number, $Re_H = 5000$. TM 108807, NASA, 1994