

[文章编号] 1001-246X(2002)04-0283-07

迎风紧致格式的混淆误差分析及其同谱方法的比较

李新亮¹, 马延文², 傅德薰³

(1. SMC 清华大学气动技术中心, 清华大学工程力学系, 北京 100084;

2. 中国科学院力学研究所 LHD 实验室, 北京 100080; 3. 中国科学院力学研究所 LNM 实验室, 北京 100080)

[摘 要] 对运用迎风紧致格式求解非线性方程时混淆误差产生的机理进行了研究, 通过算例对五阶迎风紧致格式与谱方法进行了比较, 发现在混淆误差的处理上迎风紧致格式优于谱方法。

[关键词] 混淆误差; 迎风紧致格式; 谱方法

[中图分类号] O357.5 [文献标识码] A

0 引言

在湍流的直接数值模拟中, 混淆误差对数值计算的影响十分严重, 如果不对混淆误差进行控制, 则将导致计算的发散或流动衰减到层流状态^[1]. 无论数值计算采用谱方法还是差分法都会遇到混淆误差问题. 在谱方法的数值计算中, 可以采用 3/2 规则消除混淆误差, 但大大增加了计算量. 如采用差分法, 可选取适当形式的迎风格式计算对流项, 抑制混淆误差^[2]. 文[3]指出, 通过采用某些特殊形式的对流项(如旋度型、旋度-对称型等)也可以抑制混淆误差, 但这会增加方程的复杂程度, 另外该文讨论的情况只适用于不可压流动.

90 年代以来, 差分方法本身也有了较大的进展, Lele^[4]对一类 Pad 格式进行了总结, 提出了紧致型差分格式, 与传统差分格式相比, 该格式能够在相同基架点上构造出更高阶精度的格式. Fu & Ma^[5-7]提出了三阶及五阶精度的迎风紧致格式, 在紧致格式的基础上引入了迎风机制, 能够有效抑制高频非物理振荡, 有利于计算的稳定. 文[8, 9]运用迎风紧致格式对可压及不可压槽道湍流进行了直接数值模拟, 取得了较好的效果, 说明迎风紧致格式具有较好的抑制混淆误差的能力.

到目前为止, 还未有文献对差分法(尤其是紧致差分法)求解非线性方程带来混淆误差的机理进行分析, 也没有文献在该方面将差分法与谱方法进行

比较. 考虑到混淆误差对湍流直接数值模拟的重要性, 对其进行系统研究是很有意义的^[11].

本文对运用迎风紧致模拟非线性项时产生混淆误差的机理进行了分析, 并通过数值求解非线性 Burgers 方程, 对五阶迎风紧致格式和谱方法进行了比较. 通过比较, 作者认为在混淆误差的处理上迎风紧致格式优于谱方法.

本文还运用五阶迎风紧致格式数值模拟了二维不可压槽道湍流(即二维不可压槽道流动的扰动饱和态), 与相同网格点的谱方法结果^[10]相比, 其数值结果能分辨出更高 Reynolds 数的流动, 体现出迎风紧致格式在混淆误差处理上的优越性.

1 数值计算的混淆误差分析

1.1 谱方法中的混淆误差来源

谱方法中的混淆误差来源于非线性乘积项中包含了离散 Fourier 变换(DFT 或其快速算法 FFT)无法识别的高波数成分(运用离散 Fourier 变换的谱方法应严格地称为拟谱方法, 本文中的谱方法均是指拟谱方法). 由于 DFT(或 FFT)的特点, 高于其可识别波数范围的高波数波将被误认为是某一低波数波, 从而折合到低波数分量中(而不是被截去), 这样就产生了混淆误差, 例如:

若 $u = e^{i5x}$, $v = e^{i6x}$, 其中 $x \in (0, 2)$, 则 $w \triangleq uv = e^{i11x}$;

用拟谱方法计算时, 如果取配置点数 $N = 16$, 则

[收稿日期] 2000-12-25; [修回日期] 2001-05-21

[基金项目] 国家自然科学基金(59876002)、国家攀登 A 资助项目及国家重点基础研究专项经费(G1999032805)资助项目

[作者简介] 李新亮(1972-), 男, 河北沧州, 博士后, 从事湍流的直接数值模拟及大规模并行计算方面的研究.

$$u(j)v(j) = e^{11ix_j} = e^{11i2j/16} = e^{-5i2j/16+2i} \\ = e^{-5ix_j}, \quad (i \text{ 为虚数单位}).$$

采用 16 个配置点, 计算时就会把波数为 11 的波误认为波数为 -5 的波, 这便是混淆误差.

对于谱方法的混淆误差, 可以通过提高计算的波数范围来消除. 上面例子中, 计算波数为 5 和波数为 6 的物理量的乘积, 取 $N=24$ 就不会有混淆误差了, 但该方法会带来很大的额外计算量.

1.2 差分方法的混淆误差来源

人们对谱方法带来混淆误差的机理已经有了一定的认识, 但对于差分法带来的混淆误差则认识较少. 下面就差分法求解非线性问题时带来混淆误差的机理进行分析.

考虑模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (\text{设 } c > 0). \quad (1)$$

初值取为 $u(x, 0) = e^{ikx}$, 该方程有精确解 $u(x, t) = e^{ik(x-ct)}$.

如果用差分法对 (1) 式中的空间导数进行离散, 则其数值解为

$$u(x_j, t) = e^{-k_r ct/x} e^{ik(x - c_k t/k x)}. \quad (2)$$

由于差分误差的影响, 波传播的速度由 c 变为 $ck_i (1/k x)$, 而且随着时间的增加, 波幅也逐渐由 1 变为 $e^{-k_r ct/x}$. 引起波速和波幅改变的误差分别称为色散误差和耗散误差. 通常的差分格式既包含色散误差又包含耗散误差 (一般对称型格式的耗散误差为零). 色散误差和耗散误差可以通过 k_i 和 k_r 来反映, 波数越高, 色散和耗散误差越大. 差分格式有一定的波数捕捉范围, 对于该范围内的波, 其耗散和色散误差较小, 对于超出此范围的波, 则耗散和色散误差急剧增加^[7].

对于非线性乘积项, 即使两个波的波数都在该差分格式的波数捕捉范围之内, 它们的乘积所产生的高波数波也可能超出差分格式的波数捕捉范围, 从而会产生较大的误差, 出现大的非物理干扰波. 这是差分法混淆误差产生的机理.

采用迎风型格式可以有效抑制混淆误差. 由于迎风型格式属于耗散型格式, 对超过其波数捕捉范围的高波数成分有较强的耗散, 从而抑制了这些高波数成分的发展, 减小了混淆误差.

下面举例说明五阶迎风紧致格式是如何对高波数分量进行耗散的.

$$\text{设} \quad u(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{ikx_j},$$

$$\text{其中} \quad \hat{u}_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k = 1, 2, 3, \dots, 127, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

$$\text{令} \quad v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{v}_k e^{ikx_j},$$

显然, 对于精确解有 $\hat{v}_k = i$.

设 w 为用五阶迎风紧致格式求得 $\partial u / \partial x$ 的近似解 (空间网格为 256), $\text{Im}(\hat{w}_k)$ 的变化图如图 1 所示, 图中的虚线为精确解. 可以看出数值解波数较低的谱分量与精确解相差不大, 而对于高波数的谱分量, 数值解存在较大的衰减.

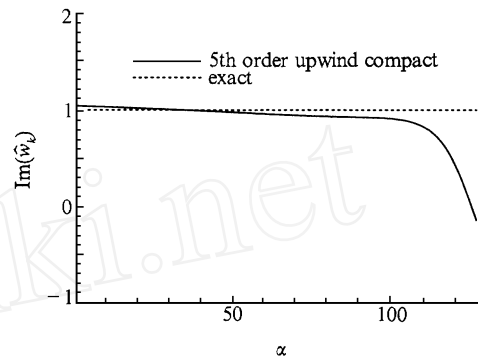


图 1 $\text{Im}(\hat{w}_k)$ 的变化图

Fig. 1 $\text{Im}(\hat{w}_k)$ varies with the wave number

2 两种方法的混淆误差比较

下面通过算例来说明五阶迎风紧致格式是如何抑制混淆误差的.

考虑如下非线性 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

其中 $0 \leq x \leq 2$. 设 u 具有周期边界条件 $u(0, t) = u(2, t)$, 设该方程的初值为

$u(x, 0) = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(4x) + \sin(8x)$, 即当 $t=0$ 时, 解包含了波数为 $k = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ 的波.

方程 (3) 中的右端项为耗散项, 对高波数成分有耗散作用; 当 Re 较高时该方程的耗散较小, 高波数成分会被很快激发起来. 我们将用差分法及谱方法 (Fourier 拟谱法) 求解以上方程, 分析混淆误差对数值计算的影响. 在差分法的计算中, 对式 (3) 的对流项采用五阶迎风紧致差分格式, 粘性项采用六阶对称紧致差分格式. 计算中取 $Re = 1000$.

由于方程 (3) 的精确解很难求得, 本文首先计算一个精度很高的数值解作为比较标准, 称其为“精确解”, 以便与下面进行的数值计算结果进行比较.

首先采用高精度的谱方法求解, 计算的波数范

围为 $-256 \leq k \leq 255$, 并且用 $3/2$ 规则消除混淆误差 (实际计算中为了利用 FFT 程序, 采用的配置点数为 1 024, 并在每时间步计算中截除 $[-256, 255]$ 以外的波数成份).

由于配置点足够多, 因此其解是足够精确的 (至少对于较低波数的分量是足够精确的). 时间方向采用 3 步 3 阶 R - K 方法求解.

图 2 为该“精确解”在不同时刻波数分量图. 从中可以看出由于非线性效应, 高波数成分逐渐被激发起来 (画出的波数范围为 $-64 \leq k \leq 63$).

下面用 256 个网格点的五阶迎风紧致格式及波数范围为 $-128 \leq k \leq 127$ 的 (拟) 谱方法解方程 (3).

图 3 为用五阶迎风紧致格式解方程 (3) 得到的不同时刻的谱分布图. 从中可以看出, 与“精确解”相比, 该解具有很高的精度, $t = 0.2$ 时刻的谱分布与精确解基本吻合, 只是最大振幅低了些.

图 4 和图 5 分别是 $t = 0.2$ 时的精确解和差分解在物理空间的图象, 可以看出差分解和“精确解”比较吻合, 只是差分解中某些高频成分低些.

图 6 为 (拟) 谱方法的解在不同时刻的谱分布图. 从中可以看出, 随着时间的发展, 高波数分量开始激发起来, 当 $t = 0.02$ 时, 解包含的波数范围已达到 30 左右, $t = 0.05$ 时高波数成分的幅值已比较可

观. 随着时间发展, 由非线性作用产生的高波数分量已超出了该 (拟) 谱方法的识别范围 (计算用的 (拟) 谱方法的波数范围为 $-128 \leq k \leq 127$). 与差分法不同, 谱方法将超出其波数识别范围的高波数波误认为是与之波数相差 N 的低波数波. 这些高波数成分被错误地折算到低波数成分上, 造成低波数成分非物理增加, 即混淆误差. 从图 6 可以看出, 由于混淆误差的影响, 当 $t = 0.1$ 时某些高波数成分已明显高于准确解. 随着计算的继续, 混淆误差的影响越来越严重, 从图 6 可以看出, 当 $t = 0.12$ 时谱方法解的高波数分量被非物理放大, 当达到 $t = 0.14$ 时谱方法解的高波数成分已经严重失真, 再继续计算下去将很快导致计算发散 ($t = 0.15$ 左右计算就发散了).

图 7 为谱方法计算发散前几个时刻的谱分布图, 图中给出了计算的全部波数范围 ($-128 \leq k \leq 127$). 从中可以看出, 由于混淆误差的影响, 高波数分量迅速发展并向低波数靠近, 由此造成计算发散.

图 8 为 $t = 0.13$ 时刻的“精确解”、差分解及谱方法解在物理空间的图象. 从中可以看出, 差分解与精确解基本吻合, 只是高波数成分有些不足, 而谱方法解包含了严重的非物理振荡, 解已严重失真.

从以上各图可以看出, 在混淆误差的处理上, 迎风紧致格式要优于谱方法.

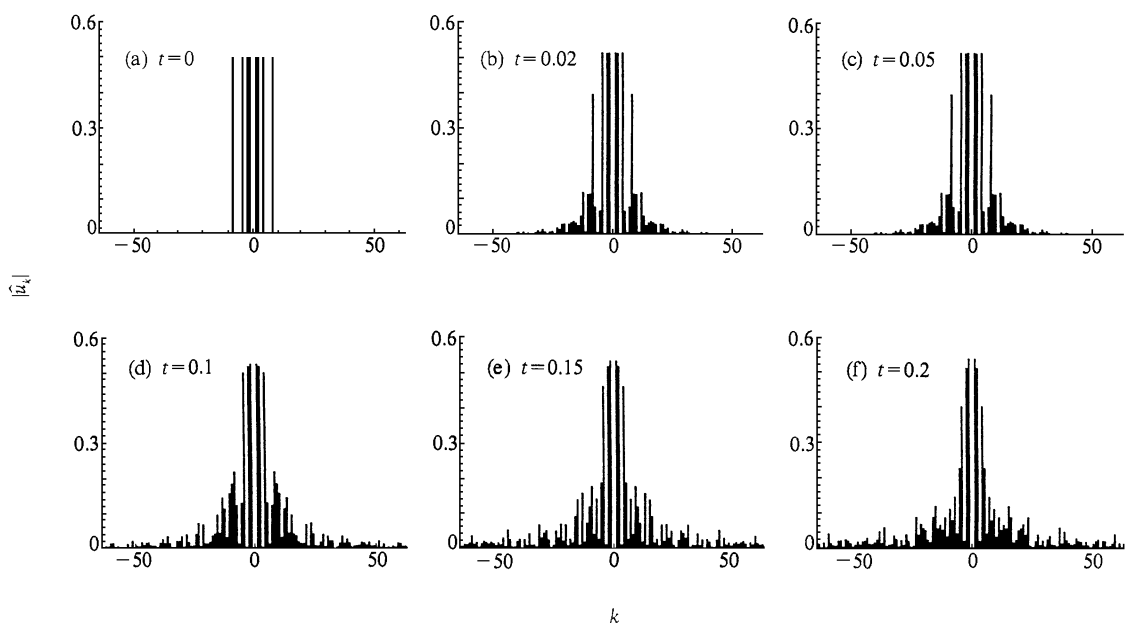


图 2 “精确解”在不同时刻的谱分布图

Fig. 2 Spectral distribution for the “exact solution”

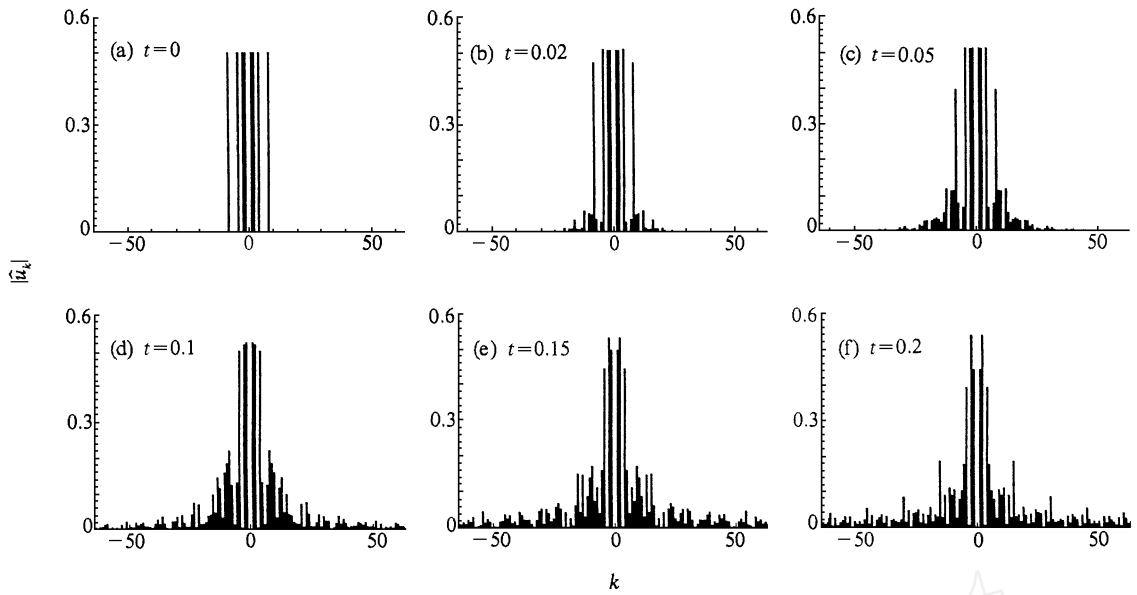


图 3 五阶迎风紧致格式解在不同时刻的谱分布图
Fig.3 Spectral distribution for the upwind difference solution

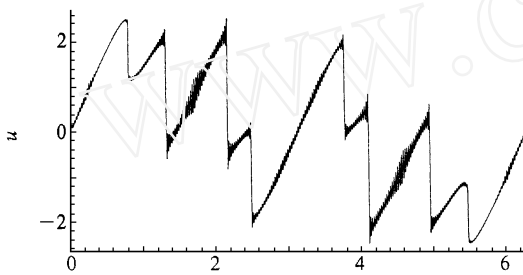


图 4 “精确解”在 $t=0.2$ 时刻的图象
Fig.4 “Exact solution” at $t=0.2$

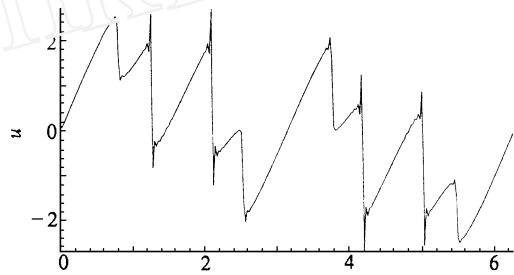


图 5 差分解在 $t=0.2$ 时刻的图象
Fig.5 Upwind difference solution at $t=0.2$

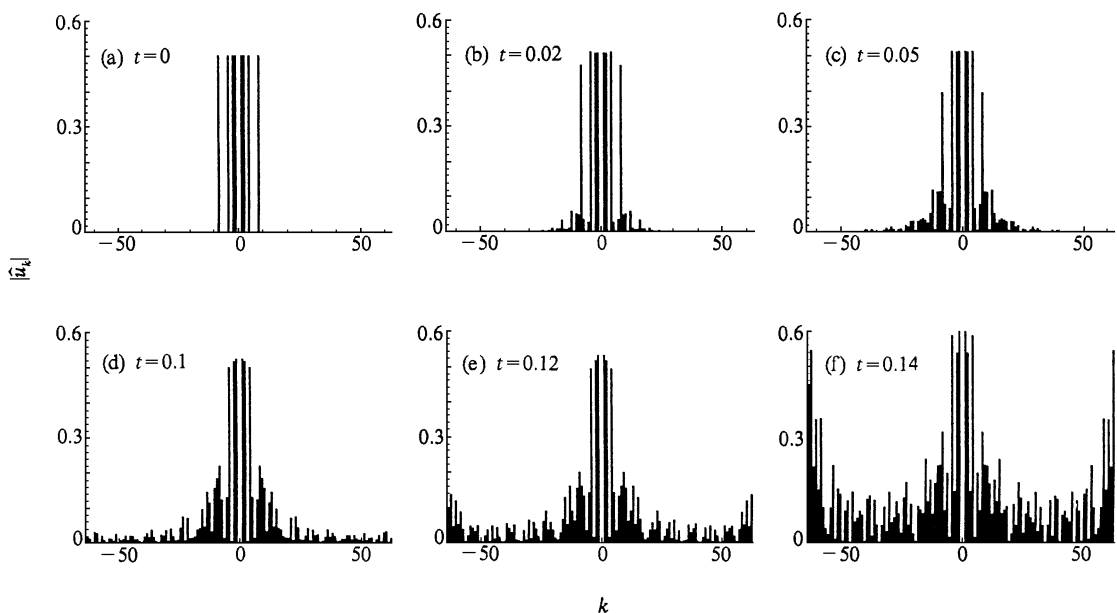


图 6 谱方法解在不同时刻的谱分布图
Fig.6 Spectral distribution for the solution of the spectral method

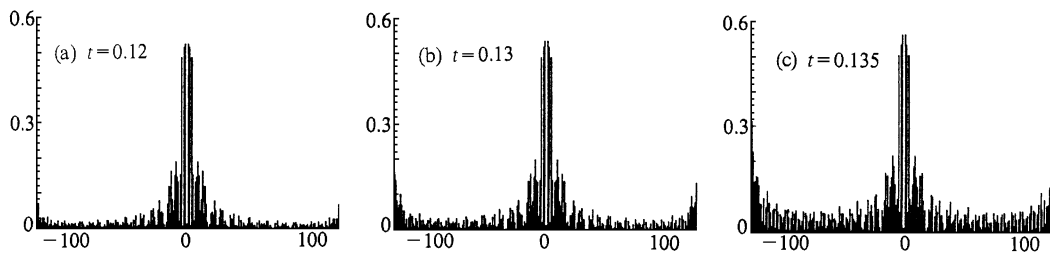


图 7 谱方法计算发散前几个时刻的谱分布图

Fig. 7 Spectral distribution for the solution of the spectral method just before its divergence

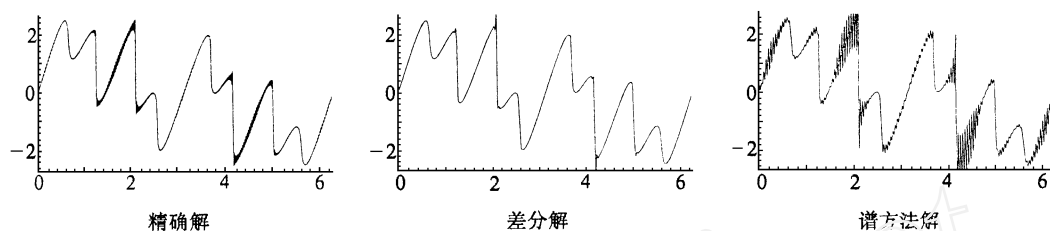


图 8 $t = 0.13$ 时刻的精确解、差分解和谱方法解

Fig. 8 Exact solution, finite difference solution and solution of the spectral method at $t = 0.13$

3 二维槽道湍流的数值分析

上下两个无穷平板间充满粘性不可压流体,在均匀的压力梯度驱动下流动,随着流动 Reynolds 数的升高,流体逐渐失稳形成复杂的流态.本文采用作者构造的高效算法^[8]对该流动进行数值模拟,其中对流项采用基于非等距网格的五阶迎风紧致格式,粘性项采用六阶对称紧致格式.流向采用均匀网格,流向采用非均匀网格,网格点为 128×129 .

以抛物型平均流叠加随机扰动为初场,经过相当长时间(约几千个无量纲时间单位)的发展后,流动达到了饱和状态.该流动具有许多与三维湍流相似的性质(如上抛-下扫、间歇等),因此该流动又被称为“二维湍流”,对其进行探讨对于湍流机理研究有一定意义^[10].本文将其作为一个算例来检验迎风紧致格式和谱方法的差别.

在“二维湍流”中,流场的下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 是反映流动状态的重要物理量. Reynolds 数很低时,流向速度呈抛物状分布(Poiseuille 流动),该物理量为—常数;随着 Reynolds 数的增加,流动失稳,该物理量的时间序列将呈现出各种不同的状态.文[10]采用谱方法(空间网格为 128×129)对 $Re = 10\,000$ 的“二维湍流”进行了分析,给出了 $\bar{\omega}$ 时间序列图,并分析了不同 Reynolds 流动 $\bar{\omega}$ 的时均值和脉动量的均方根.但文[10]未能给出 $Re > 10\,000$ 的结果,该文指出:“当 Reynolds 数继续增高时,有些证据表明—

随时间的振荡将变得混沌,但由于受数值精度所限,本文未能给出...^[10].本文不但给出了较低 Reynolds 数的结果,同时还给出 $Re > 10\,000$ 的结果.

图 9 为不同 Reynolds 数“二维湍流”的下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 的时间序列图,从中可以看出,对应 $Re = 9\,000$ 的时间序列呈周期状态, $Re = 10\,000$ 时为拟周期状态,该结论与文[10]一致. $Re = 12\,000$ 时,该时间序列仍呈现拟周期状态;而当 $Re = 15\,000$ 时,该时间序列呈现混沌状态,证实了文[10]的推测.

表 1 和表 2 列出了不同 Reynolds 数“二维湍流”下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 的时均值(即 $\bar{\omega}$ 沿时间方向的平均值)及脉动均方根值.从表中看出,本文结果与文[10]吻合十分理想,充分说明了本文计算结果的正确性.同时还给出了文[10]因数值精度所限未能给出的 $Re = 12\,000, 15\,000$ 的结果.(注:本文的涡量定义为: $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$,与文[10]中涡量的定义符号相反,因此表 2 对文[10]中的原值进行了取反).可以看出,本方法的数值分辨率明显高于文[10](文[10]能分辨的最高 Reynolds 数为 $10\,000$,而本文给出了 $Re = 15\,000$ 的流场并证实了该文的推测).这主要是因为文[10]采用谱方法,虽然空间网格点数同为 128×129 ,但为了抑制混淆误差(de-aliasing),实际只使用了 83 个 Fourier 模态和 85 个 Tchebichev 模态,沿每个方向有 $1/3$ 的网格节点无法参与谱空间的数值计算($3/2$ 法则).而本文采用的迎风紧致格式本身

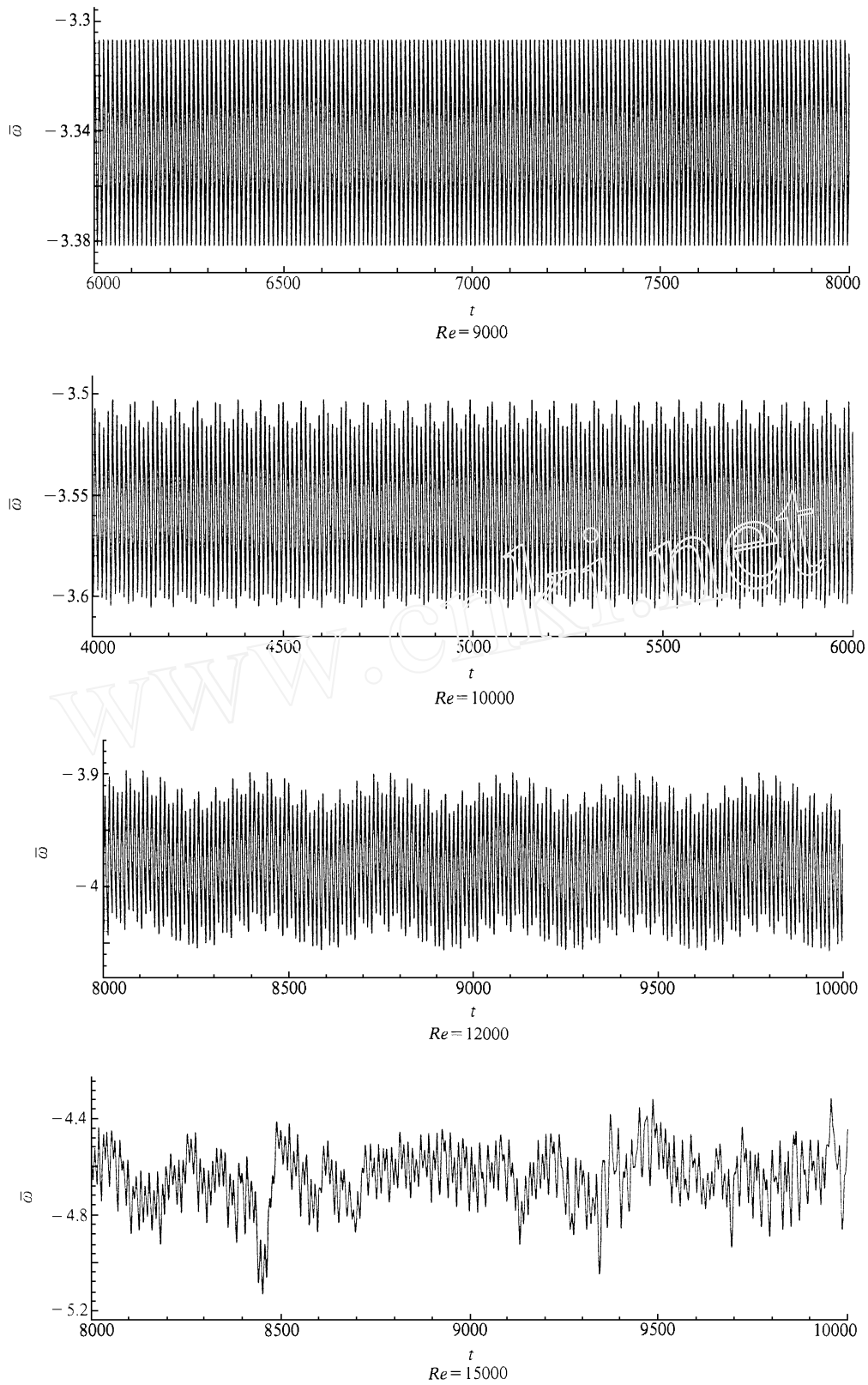


图 9 不同 Reynolds 数下“二维湍流”下壁面平均涡量 $\bar{\omega}$ 分布图

Fig. 9 Time evolution of the averaged vorticity at the lower wall

具有很好的抑制混淆误差的能力,所有的网格点均参与数值计算,因而取得了很好的效果.由此可见在混淆误差的处理上,迎风紧致格式要优于谱方法.

表1 不同 Reynolds 数下“二维湍流” \bar{u} 的时均值

Table 1 Time-averaged \bar{u} for different Reynolds numbers

Reynolds 数	本文结果	文[10]结果
6000	- 2.625	- 2.62
7000	- 2.874	- 2.87
8000	- 3.118	- 3.12
9000	- 3.345	- 3.35
10000	- 3.557	- 3.56
12000	- 3.979	—
15000	- 4.646	—

表2 不同 Reynolds 数下“二维湍流” \bar{u} 的脉动均方根

Table 2 RMS of \bar{u} fluctuation for different Reynolds numbers

Reynolds 数	本文结果	文[10]结果
6000	0.0085	0.0085
7000	0.0162	0.0160
8000	0.0216	0.0215
9000	0.0264	0.0265
10000	0.0321	0.0322
12000	0.0437	—
15000	0.118	—

4 结论

(拟)谱方法和紧致格式处理超出其波数捕捉范围的波的机制是不同的.迎风紧致格式对其进行衰减,而(拟)谱方法则将其误认为是波数与之相差某常数的低波数波.通过数值分析可以得出结论:在混

淆误差的处理上,迎风紧致格式优于谱方法.

[参 考 文 献]

- [1] Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research [J]. *Annu Rev Fluid Mech*, 1998, **30**: 539 - 578.
- [2] Man Mohan Rai, Pavriz Moin. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes [J]. *J Comput Phys*, 1991, **96**: 15 - 53.
- [3] Morinishi Y, Lund T S, Vasilyev O V, Moin P. Full conservative higher-order finite difference schemes for incompressible flow [J]. *J Comp Phys*, 1999, 90 - 124.
- [4] Lele S K. Compact finite difference with spectral-like resolution [J]. *J Comput Phys*, 1992, **103**: 16 - 42.
- [5] Fu D X, Ma Y W. Proceedings, 3rd International Symposium on CFD [C]. Nagoya. 1989, **1**: 78 - 86.
- [6] Fu D X, Ma Y W. Proceedings, 5th International Symposium on CFD [C]. Nagoya. 1989, **1**: 104.
- [7] Fu Dexun, Ma Yanwen. A High Order Accurate Difference Scheme for Complex Flow Fields [J]. *J Comput Phys*, 1997, **134**: 1 - 15.
- [8] Li Xinliang, Ma Yanwen, Fu Dexun. DNS of Incompressible turbulent channel flow with upwind scheme on non-uniform meshes [J]. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 2000, **8**, 4(1), 536 - 543.
- [9] Li Xinliang, Ma Yanwen, Fu Dexun. DNS and scaling law analysis of compressible turbulent channel flow [J]. *Science in China A*, 2001, **44**(5): 645 - 654.
- [10] Jimenez J. Transition to turbulence in two-dimensional Poiseuille flow [J]. *J Fluid Mech*, 1990, **218**: 265 - 297.

ALIASING ERROR ANALYSIS OF THE UPWIND COMPACT DIFFERENCE METHOD AND COMPARISON WITH THE SPECTRAL METHOD

LI Xin-liang¹, MA Yan-wen², FU De-xun³

(1. SMC Center, Department of Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. LHD, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China;

3. LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

[Abstract] Through examples, the mechanism of the generation of the aliasing error associated with upwind compact difference schemes and spectral method is studied and compared. The comparison shows the upwind compact difference schemes have some advantages in treating the aliasing error.

[Key words] aliasing error; upwind compact difference schemes; spectral method