



永乐大钟梯形木架稳定性初探

张双寅¹⁾

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要 对北京市大钟寺悬挂永乐大钟的梯形木架结构的稳定性进行了初步分析. 根据弹性结构稳定性理论的能量法和中国古建筑结构“卯榫”接头抗弯性能的简化的本构模型, 采用“对比法”分析了二维梯形木架的结构稳定性. 结果表明中国古建筑木架结构的“收分”形状设计对增大木架稳定性有很大作用, 立柱“侧角”越大, 稳定性越好. 收分形式设计凸现中国古代工程技术人员的聪明智慧.

关键词 梯形木架, 弹性稳定性, 卯榫结构, 侧角设计

A PRELIMINARY ANALYSIS ON STABILITY OF THE TRAPEZOIDAL WOOD RACK OF THE YONGLE BIG BELL

ZHANG Shuangyin¹⁾

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract The YONGLE big bell and the wood-rack for suspending the big bell are valuable antique relics. Their safety and reliability have attracted much attention of scientists and engineers. In the present paper a preliminary study on stability of the trapezoidal wood-rack is carried out. Based on a simplified bending constitutive model of the mortise and tenon joint (in Chinese it is called “MAO-SUN”) between beams and pillars of the rack, the influence of the side-angle of the pillars on the stability of the rack is analyzed. The energy method of stability theory of elastic structures and the comparison method are used. The formulas for the critical load are derived for the reduced two dimensional trapezoidal rack structures. The critical loads are computed for the wood-rack with different side-angles, as well as for that without side-angle. The results are compared with each other for different racks with different side-angles. It is concluded that the wood-rack with side-angle has better stability as compared to that without side-angle. The wood rack design with inclined pillars is a typical design of wooden architectures in ancient China and shows the wisdom of designers and craftsmen.

Key words trapezoidal wood rack, elastic stability, MAO-SUN structure, side-angle design

大钟寺永乐大钟是我国国宝级文物, 悬挂大钟的木架也有数百年历史, 其文物价值也是非常高的^[1,2], 它的安全性受到人们的极大关注. 其结构安全性除了强度问题外, 还有稳定性问题. 为增加结构的稳定性, 中国古建木架结构的立柱通常上端向内倾斜, 古建术语称为“收分”.

关于“收分”的含义, 文献 [1] 给出了简明介绍. 关于永乐大钟木架的收分, 文献 [2] 中写道: “八根

巨大的贴金盘龙立柱都向外 (笔者注: 应为‘向内’) 倾斜. 这在中国古代传统建筑施工设计中称为‘侧角’, 它对抗衡钟架的晃动和防止榫卯的滑脱起着重要作用”. 再者, 北京市钟鼓楼的大钟架立柱也有上端向内倾斜的收分. 其实, 现代建筑也常见“收分”形式, 如电视塔与烟囱上小下大, 城墙上薄下厚. 乃至人坐的凳子的腿下端向外斜出等, 都是为了增加其稳定性.

2007-12-17 收到第 1 稿, 2008-01-21 收到修改稿.

1) E-mail: syzhang@imech.ac.cn

具有收分形的木架结构具有好的稳定性是很肯定的；但是，作为力学工作者要问，为什么“侧角”会增加稳定性呢？本文尝试从力学原理及定量分析上给个初步的解释。根据弹性结构稳定性理论的能量原理，采用对比方法，分析“收分”设计对增加结构稳定性的重要性。

1 大钟木架简化的力学模型

永乐大钟木架实际结构较为复杂，见图 1。为分析其稳定性，并力求获得封闭解，本文进行了必要的简化。

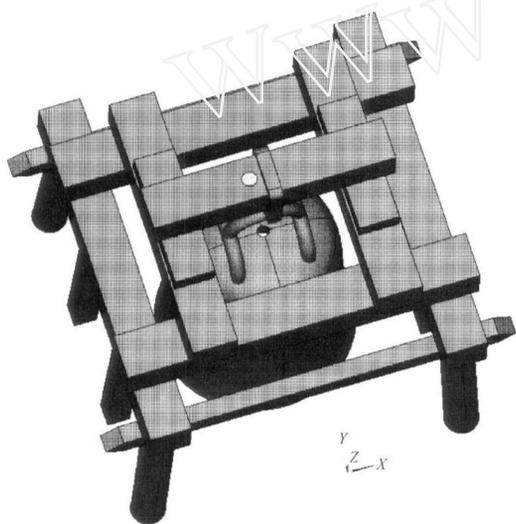


图 1 永乐大钟及悬挂木架示意图 [1,3]

木架是由大梁和立柱通过“卯榫”结构进行连接。“卯榫”结构是中国古建木架结构中的特殊形式。迄今无成熟的力学性能本构关系。文献 [1] 提出了卯榫弯曲变形的本构模型，并指出其特征参数需要试验测定。但是对于本文而言，有两点是肯定的：(1) 卯榫的卯头截面尺寸比大梁或立柱本身的截面尺寸小得多，所以其弯曲刚度亦小得多。在计算框架失稳变形能量时，大梁和立柱的变形能（即应变能）可以忽略。(2) 由于本文问题是小扰动，即小变形问题，文献 [1] 中的本构曲线中弯曲转角 θ 是很小的，可以假定在这种情况下，卯榫的弯矩 M 和转角 θ 之间为线性关系 $M = k_{\theta}\theta$ 。其中， k_{θ} 是卯榫的弯曲刚度系数。

永乐大钟木架的立柱竖立在石质基座上（俗称柱顶石），柱顶石上有很浅的定位凹槽，石座与立柱之间没有固定联结，所以这个支撑既非固支条件，也非简支条件；但是，比较接近于简支条件，此处简化为简支条件。

三维构架简化为二维框架：为了推导计算失稳载荷的控制方程，并求得封闭解，需将三维木架问题简化为二维平面框架的稳定性问题；这对于用“对比法”分析具有收分形式的木架比无收分形式的木架有更好的稳定性是有效的，且不失一般性。

2 稳定性临界载荷

研究模型如图 2 所示，正梯形 $CABD$ 为木架的原始形状，发生小扰动变形后变为 CA_1B_1D ，立柱 CA 和 DB 的原始倾角（古建文献称之为“侧角”）均为 β 。根据实际测量 [3]，已知永乐大钟木架的横梁长度为 $l \approx 6.0\text{m}$ ，立柱长度为 $R \approx 3.9\text{m}$ ，原始倾角为 $\beta \approx 3.2^\circ$ 。外力（即大钟的重量）作用点 O （即大钟悬挂之处）的铅垂高度为 $h = R \cos \beta$ 。

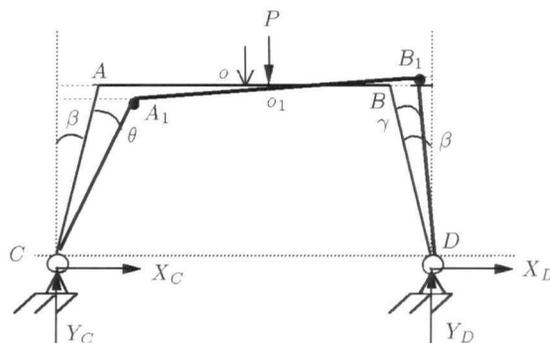


图 2 梯形木架变形示意图

假定木架失稳时，发生附加变形，立柱 AC 的转角为 θ ，立柱 BD 发生转角为 γ ，横梁 AB 不仅有平动位移，也发生转动位移，变为 A_1B_1 的位置， AB 与 A_1B_1 的夹角为 α ；外力 P 的作用点由 O 点迁移到 O_1 点， O 点的水平位移为 OX ，垂直位移为 OY

$$OX = \frac{R}{2} [\sin(\beta + \theta) - \sin(\beta - \gamma)] \quad (1)$$

$$OY = \frac{R}{2} [2 \cos \beta - \cos(\beta + \theta) - \cos(\beta - \gamma)] \quad (2)$$

另外， A 点的垂直位移为 AY ，水平位移为 AX

$$AY = R[\cos \beta - \cos(\beta + \theta)] \quad (3)$$

$$AX = R[\sin(\beta + \theta) - \sin \beta] \quad (4)$$

同样，令 BY 表示 B 点的垂直位移， BX 表示其水平位移

$$BY = R[\cos(\beta - \gamma) - \cos \beta] \quad (5)$$

$$BX = R[\sin \beta - \sin(\beta - \gamma)] \quad (6)$$

由于，变形前与变形后横梁长度不变，可得

$$l^2 = (AY + BY)^2 + (BX + l - AX)^2 \quad (7)$$

将式(3)~(6)代入式(7), 得到超越方程

$$\begin{aligned} & [\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \theta)]^2 + \\ & \frac{2l}{R} [2\sin\beta - \sin(\beta - \gamma) - \sin(\beta + \theta)] + \\ & [2\sin\beta - \sin(\beta + \theta) - \sin(\beta - \gamma)]^2 = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

式(8)是梯形木架结构变形几何分析的基本方程, 由它可根据侧角 β 和 AC 的附加转角 θ 求解横梁 AB 的转角 α 和立柱 BD 的附加倾角 γ . 横梁转角 α 为

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{AY + BY}{BX + l - AX}\right) = \\ & \arctan\left\{\frac{R[\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \theta)]}{l + R[2\sin\beta - \sin(\beta - \gamma) - \sin(\beta + \theta)]}\right\} \quad (9) \end{aligned}$$

已知变形后的木架几何关系, 就可以根据弹性结构稳定性理论的能量法^[4]计算木架的临界载荷. 首先用材料力学法求解立柱在 C 点与 D 点的支反力 X_C, Y_C, X_D, Y_D

$$\begin{aligned} X_C &= Y_C \tan(\beta + \theta) + Y_C \frac{l \cos \alpha}{2R \cos(\beta + \theta)} - \\ & \frac{Pl \cos \alpha}{4R \cos(\beta + \theta)} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_D &= -Y_C \tan(\beta + \theta) - Y_C \frac{l \cos \alpha}{2R \cos(\beta + \theta)} + \\ & \frac{Pl \cos \alpha}{4R \cos(\beta + \theta)} \quad (11) \end{aligned}$$

$$Y_C = \frac{\frac{Pl}{2} \cos \alpha + PR \sin(\beta - \gamma)}{l \cos \alpha + R \sin(\beta + \theta) + R \sin(\beta - \gamma)} \quad (12)$$

$$Y_D = \frac{\frac{Pl}{2} \cos \alpha + PR \sin(\beta + \theta)}{l \cos \alpha + R \sin(\beta + \theta) + R \sin(\beta - \gamma)} \quad (13)$$

失稳变形发生后, 附加外力功为

$$\begin{aligned} \Delta U &= P \times OY = \\ & \frac{PR}{2} [2 \cos \beta - \cos(\beta + \theta) - \cos(\beta - \gamma)] \quad (14) \end{aligned}$$

其中, P 是大钟重量, OY 是外力作用点 O 的垂直位移.

附加应变能 ΔW 为 A 和 B 两“卯榫”在附加弯曲转角下的变形能(注意, 这里忽略了横梁与立柱本身的变形能); 有如下两种算法

$$\Delta W^I = \frac{K_\theta [(\theta + \alpha)^2 + (\gamma + \alpha)^2]}{2} \quad (15)$$

其中, K_θ 为卯榫弯曲刚度系数; 或者

$$\Delta W^{II} = \frac{M_{A_1}^2 + M_{B_1}^2}{2K_\theta} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{A_1} &= R[Y_C \sin(\beta + \theta) - X_C \cos(\beta + \theta)] = \\ & P \times \hat{M}_{A_1} \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{B_1} &= Y_C R \sin(\beta + \theta) + Y_C l \cos \alpha - \\ & X_C R \cos(\beta + \theta) - \frac{Pl}{2} \cos \alpha = \\ & P \times \hat{M}_{B_1} \quad (18) \end{aligned}$$

式(17),(18)分别是 A_1 与 B_1 两点的附加弯矩. 临界载荷可由如下两种公式计算, 分别对应式(15)与(16):

由 $\Delta W^I = \Delta U$ 导出

$$P_{cr}^I = \frac{K_\theta [(\theta + \alpha)^2 + (\gamma + \alpha)^2]}{2 \times OY} \quad (19)$$

由 $\Delta W^{II} = \Delta U$ 导出

$$P_{cr}^{II} = \frac{2K_\theta \times OY}{\hat{M}_{A_1}^2 + \hat{M}_{B_1}^2} \quad (20)$$

其中, \hat{M}_{A_1} 与 \hat{M}_{B_1} 的表达式, 可见于式(17),(18).

作为对比, 我们对于如图3所示的正 Π 形木架进行分析, 其横梁长度与梯形情况(见图2)相同, 高度也相同, 即 $h = CA = DB = R \cos \beta$, R, β 分别是梯形框架的立柱长度和立柱的“侧角”.

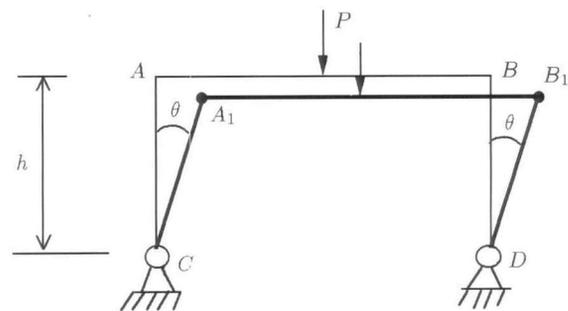


图3 正 Π 形木架变形示意图

失稳时, 附加外力功等于外力在垂直位移上作的功

$$\Delta \tilde{U} = Ph(1 - \cos \theta) = PR \cos \beta (1 - \cos \theta) \quad (21)$$

(“ \sim ”表示正 Π 形木架的值). 附加应变能(也可用两种方法计算)

$$\Delta \tilde{W}^I = \frac{2 \times K_\theta \theta^2}{2} = K_\theta \theta^2 \quad (22)$$

$$\Delta \tilde{W}^{\text{II}} = \frac{M_{A_1}^2 + M_{B_1}^2}{2K_\vartheta}$$

或者

$$\Delta \tilde{W}^{\text{II}} = \frac{P^2 h^2 \sin^2 \theta}{K_\vartheta} = \frac{(PR \cos \beta \sin \theta)^2}{4K_\vartheta} \quad (23)$$

临界载荷

$$\bar{P}_{\text{cr}}^{\text{I}} = \frac{K_\vartheta \theta^2}{R \cos \beta (1 - \cos \theta)} \quad (24)$$

或

$$\bar{P}_{\text{cr}}^{\text{II}} = \frac{4K_\vartheta [1 - \cos(\theta)]}{R \cos \beta \sin^2 \theta} \quad (25)$$

计算结果如表 1, 表中列出 4 个不同侧角的临界载荷; 其中无量纲临界载荷为 $\bar{P}_{\text{cr}} = \frac{P_{\text{cr}} \bar{R}}{K_\vartheta}$. 式 (24), (25) 为正 II 形木架的临界载荷, 式 (19), (20) 为梯形木架的临界载荷.

表 1 两种形状木架的稳定性临界载荷

$\beta / (^\circ)$	2.2	3.2	4.2	5.2
$\bar{P}_{\text{cr}}^{\text{I}}$ 式 (24)	2.001	2.003	2.005	2.008
$\bar{P}_{\text{cr}}^{\text{II}}$ 式 (25)	2.001	2.003	2.005	2.008
$\bar{P}_{\text{cr}}^{\text{I}}$ 式 (19)	2.192	2.352	2.426	2.561
$\bar{P}_{\text{cr}}^{\text{II}}$ 式 (20)	2.231	2.371	2.427	2.524

由表 1 可见, 对于实际侧角 $\beta = 3.2^\circ$ 的梯形木架比正 II 形木架的失稳临界载荷大 17%; 应该指出, 对于正 II 形木架, 也随 β 值得增加而稍有变大, 是因为 β 变大意味着木架的高度变小, 所以稳定性有稍许增加.

4 倾倒地力

如果卯榫的配合较松, K_ϑ 很小 (趋于零或等于零), 此时木架变为 (或接近于) 可动机构, 临界载荷为零. 这时, 两种木架稳定性的比较可用二者的倾倒地力判断.

定义: 外力作用点的单位附加水平位移引起的倾倒地力为立柱所承载荷在水平方向的分量除以外力作用点 O 的水平位移. 对于如图 3 所示的正 II 形木架, 当发生附加倾角为 θ 的位移时, 倾倒地力为

$$Q_1 = \frac{P \tan \theta}{h \sin \theta} = \frac{P \tan \theta}{R \cos \beta \sin \theta}$$

对于图 3 所示的梯形木架

$$Q_2 = \frac{Y_C \tan(\beta + \theta) - Y_D \tan(\beta - \gamma)}{2R[\sin(\beta + \theta) - \sin(\beta - \gamma)]}$$

计算结果如表 2 (表中无量纲倾倒地力为 $\bar{Q}_i = \frac{Q_i}{P}$, $i = 1, 2$).

可见, 随着 β 增大, 梯形木架的倾倒地力明显减少, 说明稳定性提高; 而正 II 形木架倾倒地力基本不变 (对于 5.2° 的情况, 倾倒地力稍有减小, 是由于木架高度变小的原因). 当 $\beta = 3.2^\circ$, \bar{Q}_2 比 \bar{Q}_1 约小 7.1%.

表 2 两种形状木架的倾倒地力对比

$\beta / (^\circ)$	2.2	3.2	4.2	5.2
正 II 形木架 \bar{Q}_1	0.257	0.257	0.257	0.256
梯形木架 \bar{Q}_2	0.245	0.240	0.236	0.232

5 结束语

本文采用对比方法, 对具有“收分”形式永乐大钟木架的稳定性进行了初步分析. 结果表明, 立柱侧角对增大结构稳定性的作用十分明显; 侧角 (β 角) 越大, 稳定性越好. 可见我国古代建筑师利用“收分”结构形式增加结构稳定性, 是很智慧的办法. 这里, 为了得到封闭解, 将三维结构简化为二维, 所得失稳临界载荷的绝对值是不准的, 较精确的值可用有限元计算获得. 收分形式在中国古代建筑木架结构中具有一般性和代表性^[5~7], 研究其力学性能对文物保护的意義不可忽视.

参 考 文 献

- 张双寅. 历史文化建筑保护和力学. 力学与实践, 2006, 28(6): 1~8 (Zhang Shuangyin. Protection of historical cultural buildings and mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2006, 28(6): 1~8 (in Chinese))
- 大钟寺古钟博物馆编. 古刹梵钟. 北京: 中国农业科技出版社, 1998. 7
- 张双寅, 徐永君, 申仲翰等. 永乐大钟测量、分析及整体保护方案. 中国科学院力学研究所, 2005. 12
- Timoshenko SP, Gere JM. *Theory of Elastic Stability*. (2nd Ed.) McGraw-Hill Book Company Inc. 1961
- 楼庆西. 中国古建筑二十讲. 北京: 生活·读书·新知三联出版社, 2001. 9
- 包泉万著. 古塔的故事. 济南: 山东画报出版社, 2005
- 李诫(宋)撰. 营造法式(1). 北京: 商务印书馆, 1933