

# 圆弧形沉积场地对平面瑞利波散射的 解析分析<sup>1)</sup>

赵成刚\* 王 磊\* 高福平<sup>†,2)</sup>

\* (北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

<sup>†</sup> (中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要** 分别采用 Biot 饱和多孔介质动力学理论和单相介质弹性动力学理论模拟层状沉积谷场地和周围场地, 利用波函数展开法, 得出了层状饱和沉积场地对 Rayleigh 波散射的解析解. 进行参量分析, 研究了无量纲入射波频率、层状沉积层排列顺序及相对刚度和厚度等因素对 Rayleigh 波散射效应的影响.

**关键词** 层状沉积场地, 平面 Rayleigh 波, 散射, 地面运动放大, 饱和土

**中图分类号:** TU435 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)03-0365-09

## 引 言

局部不规则场地对地震地面运动及地震灾害有重要影响. 其典型例子是 1985 年 9 月 19 日在距墨西哥城 400 公里外的墨西哥海岸发生 8.1 级强烈地震, 21 日又发生 7.5 级强余震, 两次地震给距离震中较近的地区造成了中等程度的破坏, 但给远离震中而位于软沉积盆地上的墨西哥城造成了严重的破坏和经济损失. 现场研究发现, 此次地震中盆地基岩的震动被放大了 6 倍或更多; 地震波在软沉积盆地内的聚集放大效应是造成严重灾害的根本原因<sup>[1]</sup>.

近 30 多年来局部场地条件对地震地面运动的影响一直是工程界关注的重要课题, 并取得了较大的研究成果. 在解析解的研究上, Trifunac<sup>[2]</sup> 利用波函数展开法求解了平面 SH 波对半圆形凹陷地形的散射的解析解之后, 关于沉积谷场地地震波散射问题的研究得到了迅速发展<sup>[3~7]</sup>, 但这些解析解都是针对单相均质弹性体的. 实际上, 地震波传播经常要穿过饱和土层最后到达地面, 并且常常是层状的饱和土层. 尤其是墨西哥城软土沉积盆地用分层饱和多孔介质模型模拟更符合实际情况. 采用饱和多孔介质 Biot 动力理论<sup>[8]</sup> 模拟饱和局部不均匀场地的地震波散射问题, 只是近几年才给出了一些解析

解<sup>[9~13]</sup>. 李伟华和赵成刚<sup>[9~11]</sup> 利用 Fourier-Bessel 级数展开法给出了饱和土沉积谷场地对平面 P 波、SV 波散射问题的级数解答. 而对饱和多孔层状介质沉积谷场地在平面 Rayleigh 波入射下盆地的聚集放大效应的散射问题的解析解到目前为止还没有见到. 但是在 1985 年著名的墨西哥地震中, 传播较远的 Rayleigh 面波是造成远离震中并位于沉积盆地上的墨西哥城产生严重破坏的主要原因. 因此, 对由 Rayleigh 面波引起的局部不均匀场地的散射问题的分析和研究更为必要.

本文采用 Biot 饱和多孔介质动力理论模拟饱和沉积谷场地, 利用弹性介质动力学理论模拟弹性半空间, 利用波函数展开法, 分析给出了在弹性半空间中具有两层圆弧形饱和沉积谷场地对平面 Rayleigh 波散射问题的解析解. 通过参量分析, 进一步研究了入射波频率、层状沉积层排列顺序以及相对刚度和厚度对地震地面运动的影响.

## 1 模型与基本方程

本文所研究的是含圆弧形沉积谷 (长度  $\gg$  半径) 的半空间对平面 Rayleigh 波的散射, 因此本问题可视为二维平面应变问题, 其分析模型如图 1 所示.

假定河谷中分布着两种不同性质的饱和圆弧形

2006-04-04 收到第 1 稿, 2006-11-23 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50478062), 北京市自然科学基金项目 (8052015), 北京工业大学、教育部与北京市共建城市与工程安全减灾重点实验室开放基金资助.

2) E-mail: fpgao@imech.ac.cn

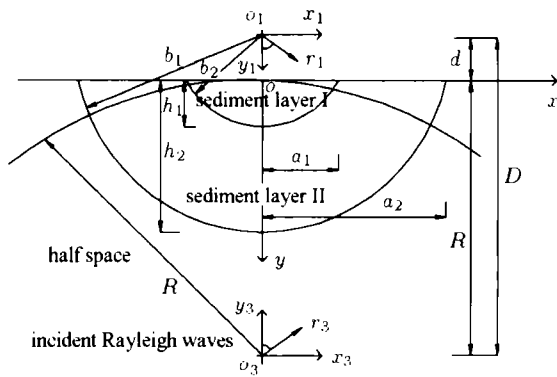


图 1 半空间饱和和分层介质计算模型  
Fig.1 The model of layered saturated alluvial valley in a half space

状沉积层 (见图 1): 两个圆弧界面的半弧长分别为  $a_1$  和  $a_2$ , 深度分别为  $h_1$  和  $h_2$ , 它们的圆心均在  $o_1$  点, 半径分别为  $b_1$  和  $b_2$ , 圆心  $o_1$  到半空间表面的距离为  $d$ . 半空间为单相弹性介质, 其弹性性质可用 Lamé 常数  $\lambda, \mu$  以及质量密度  $\rho$  确定.

设入射平面 Rayleigh 波由 P 波和 SV 波两个势函数组成, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} \phi^R(x, y) &= A_i \exp[(ik_R x - \nu_\alpha y) - i\omega t] \\ \psi^R(x, y) &= B_i \exp[(ik_R x - \nu_\beta y) - i\omega t] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中,  $k_R = \omega/c_R$  为瑞利波数,  $c_R$  为瑞利波速,  $t$  为时间坐标.  $\nu_\alpha = \sqrt{k_R^2 - k_{s\alpha}^2}, \nu_\beta = \sqrt{k_R^2 - k_{s\beta}^2}$ , 其中  $k_{s\alpha}$  为纵波波数,  $k_{s\beta}$  为横波波数, 在下面的分析中将时间因子略去, 上式简化为

$$\left. \begin{aligned} \phi^R(x, y) &= A_i \exp[(ik_R x - \nu_\alpha y)] \\ \psi^R(x, y) &= B_i \exp[(ik_R x - \nu_\beta y)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由坐标之间的关系

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_1, & \begin{cases} x_1 = r_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = r_1 \cos \theta_1 \end{cases} \\ y &= y_1 - d, \end{aligned} \right.$$

可以得到柱坐标系下这两个势函数的表达式

$$\phi^R(r_1, \theta_1) = A_i \exp(ik_R r_1 \sin \theta_1 - \nu_\alpha r_1 \cos \theta_1 - \nu_\alpha d) \quad (3a)$$

$$\psi^R(r_1, \theta_1) = B_i \exp(ik_R r_1 \sin \theta_1 - \nu_\beta r_1 \cos \theta_1 - \nu_\beta d) \quad (3b)$$

由于 Rayleigh 波是表面波, 它已经满足自由边界条件, 在半空间自由表面不会产生反射波. 令  $c_s$  表示 S 波的波速. 设泊松比  $\gamma = 0.25$ , 由 Rayleigh 方程可得 [14]

$$c_R \approx \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{3}}} c_s \approx 0.9194 c_s \quad (4)$$

## 2 问题的求解

### 2.1 边界条件

此问题中边界条件为半空间和沉积层 I 和 II 的自由表面边界条件以及沉积层 II 与半空间及其与沉积层 I 交界面的连续条件.

假定沉积层自由地表透水, 自由地表 ( $y = 0$ ) 的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yy}^h &= \tau_{yx}^h = 0, & \tau_{yy}^I &= \tau_{yx}^I = \sigma^I = 0 \\ \tau_{yy}^{II} &= \tau_{yx}^{II} = \sigma^{II} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

弹性半空间自由表面 (由大圆弧近似表示, 即  $r_3 = R$ ) 的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr}^h &= \tau_{r\theta}^h = 0, & \tau_{rr}^I &= \tau_{r\theta}^I = \sigma^I = 0 \\ \tau_{rr}^{II} &= \tau_{r\theta}^{II} = \sigma^{II} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

式 (5)~ 式 (7) 中每一变量的上标  $h, I, II$  分别表示弹性半空间、沉积层 I 和沉积层 II.  $\tau, \sigma$  分别为固体骨架和流体的应力边界.  $u, U$  分别为固体骨架位移和流体位移.

设沉积层 II 与半空间交界面为透水边界, 则沉积层与半空间交界面 ( $r_1 = b_2$ ) 连续条件可表示为

$$u_r^{II} = u_r^h, u_\theta^{II} = u_\theta^h, \tau_{rr}^{II} = \tau_{rr}^h, \sigma^{II} = 0, \tau_{r\theta}^{II} = \tau_{r\theta}^h \quad (6)$$

同样, 沉积层 II 与沉积层 I 交界面 ( $r_1 = b_1$ ) 连续条件为

$$\left. \begin{aligned} u_r^I &= u_r^{II}, & u_\theta^I &= u_\theta^{II}, & \tau_{rr}^I &= \tau_{rr}^{II}, & \sigma^I &= \sigma^{II}, \\ \tau_{r\theta}^I &= \tau_{r\theta}^{II}, & U_r^I &= U_r^{II} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### 2.2 波场分析

#### 2.2.1 自由场波函数的级数展开

Rayleigh 波是沿  $y = 0$  自由表面传播的一种面波, 在半空间中其幅值随  $y$  轴坐标的增加按指数衰

减，因此可以展开成如下的级数形式<sup>[15]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \phi^*(r_1, \theta_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{s\alpha} r_1) \cdot \\ &\quad (A_{0,n} \cos n\theta_1 + B_{0,n} \sin n\theta_1) \\ \psi^*(r_1, \theta_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{s\beta} r_1) \cdot \\ &\quad (C_{0,n} \sin n\theta_1 + D_{0,n} \cos n\theta_1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中， $J_n(k_{s\alpha} r_1)$ ,  $J_n(k_{s\beta} r_1)$  为第 1 类 Bessel 函数，对于给定的  $r_1$  (如  $r_1 = a_1$ ) 有

$$\left. \begin{aligned} A_{0,0} &= A_{0,N} = \frac{a_0(r_1)}{2}, \\ A_{0,n} &= \frac{a_n(r_1)}{J_n(k_{s\alpha} r_1)}, \quad n = 1 \sim N-1 \\ B_{0,n} &= \frac{b_n(r_1)}{J_n(k_{s\alpha} r_1)}, \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} a_n(r_1) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \phi^R\left(r_1, \frac{\pi l}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{N} n\right), \\ b_n(r_1) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \phi^R\left(r_1, \frac{\pi l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{N} n\right), \end{aligned} \right\} \quad n=0 \sim N \\ \left. \begin{aligned} D_{0,0} &= D_{0,N} = \frac{a_0(r_1)}{2}, \\ D_{0,n} &= \frac{d_n(r_1)}{J_n(k_{s\beta} r_1)}, \quad n = 1 \sim N-1 \\ C_{0,n} &= \frac{c_n(r_1)}{J_n(k_{s\beta} r_1)}, \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} c_n(r_1) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \psi^R\left(r_1, \frac{\pi l}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{N} n\right), \\ d_n(r_1) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \psi^R\left(r_1, \frac{\pi l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{N} n\right) \end{aligned} \right\} \quad n=0 \sim N$$

### 2.2.2 半空间内散射波场

为了便于问题的求解，这里仍采用一个半径为  $R$ ，圆心在  $o_3$  点的圆弧 (见图 1) 来模拟半空间自由表面<sup>[3]</sup>。下面分析整个局部场地中的波场。

#### 1) 半空间中的散射波

半空间存在因沉积层 II 和半空间交界面而产生的散射 P 波势函数  $\phi_{h1}(r_1, \theta_1)$  和 SV 波势函数  $\psi_{h1}(r_1, \theta_1)$ ，以及因半空间自由表面 (由大圆弧近似表示) 产生的散射 P 波势函数  $\phi_{h3}(r_1, \theta_1)$  和 SV 波势函数  $\psi_{h3}(r_1, \theta_1)$ 。 $\phi$  和  $\psi$  分别表示 P 波和 S 波势函数。 $\phi$  函数的脚标中  $h$  表示弹性半空间，1, 3 分别表示沉积层 II 与弹性半空间的交界面以及沉积层

II 的半空间自由表面 (由大圆弧近似)； $\psi$  函数的脚标与  $\phi$  函数的脚标的意义相同。这些势函数可以分别表示为：

①弹性半空间与沉积河谷交界面产生的散射波

$$\phi_{h1}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{s\alpha} r_1) (A_{h1,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + B_{h1,n}^{(1)} \sin n\theta_1) \quad (9a)$$

$$\psi_{h1}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{s\beta} r_1) (C_{h1,n}^{(1)} \sin n\theta_1 + D_{h1,n}^{(1)} \cos n\theta_1) \quad (9b)$$

式中  $A, B, C, D$  以及后面的  $E$  和  $F$  为待求的未知系数，其上脚标 (1), (3) 表示两个不同的坐标系的情况，它们需要利用已知边界条件确定。式中  $H_n^{(1)}(k_{s\alpha} r_1)$ ,  $H_n^{(1)}(k_{s\beta} r_1)$  为第 1 类 Hankel 函数。

②弹性半空间自由表面 (由大圆弧近似表示) 产生散射波

$$\phi_{h3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{s\alpha} r_3) (A_{h3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 + B_{h3,m}^{(3)} \sin m\theta_3) \quad (10a)$$

$$\psi_{h3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{s\beta} r_3) (C_{h3,m}^{(3)} \sin m\theta_3 + D_{h3,m}^{(3)} \cos m\theta_3) \quad (10b)$$

#### 2) 饱和沉积层 II 中的散射波

图 1 中在饱和沉积层 II 中因存在和弹性半空间交界面引起的散射 P<sub>1</sub> 波势函数  $\phi_{1,II1}(r_1, \theta_1)$ , P<sub>2</sub> 波势函数  $\phi_{2,II1}(r_1, \theta_1)$  和 SV 波势函数  $\psi_{II1}(r_1, \theta_1)$ ；沉积层 II 和沉积层 I 交界面引起的散射 P<sub>1</sub> 波势函数  $\phi_{1,II2}(r_1, \theta_1)$ , P<sub>2</sub> 波势函数  $\phi_{2,II2}(r_1, \theta_1)$  和 SV 波势函数  $\psi_{II2}(r_1, \theta_1)$ ；弹性半空间自由表面 (由大圆弧近似表示) 引起的散射 P<sub>1</sub> 波势函数  $\phi_{1,II3}(r_3, \theta_3)$ , P<sub>2</sub> 波势函数  $\phi_{2,II3}(r_3, \theta_3)$  和 SV 波势函数  $\psi_{II3}(r_3, \theta_3)$ 。 $\phi$  和  $\psi$  分别表示 P 波和 S 波势函数。 $\phi$  函数的脚标中逗号以前的 1 和 2 分别表示 P<sub>1</sub> 波和 P<sub>2</sub> 波引起的势函数，逗号以后的 I 和 II 分别表示在沉积层 I 和 II 中，而最后的 1, 2, 3 分别表示沉积层 II 与弹性半空间的交界面、沉积层 II 与沉积层 I 的交界面以及沉积层 II 中的半空间自由表面这 3 种交界面所引起的散射效应。 $\psi$  函数的脚标与  $\phi$  函数的脚标中逗号以后的意义相同。这些势函数可以分别表示为：

①沉积层 II 与弹性半空间交界面产生的散射波

$$\phi_{1,II1}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{\alpha,1}r_1)(A_{II1,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + B_{II1,n}^{(1)} \sin n\theta_1) \quad (11a)$$

$$\phi_{2,II1}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{\alpha,2}r_1)(C_{II1,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + D_{II1,n}^{(1)} \sin n\theta_1) \quad (11b)$$

$$\psi_{II1}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{\beta}r_1)(E_{II1,n}^{(1)} \sin n\theta_1 + F_{II1,n}^{(1)} \cos n\theta_1) \quad (11c)$$

② 沉积层 II 与沉积层 I 的界面产生的散射波

$$\phi_{1,II2}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{\alpha,1}r_1)(A_{II2,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + B_{II2,n}^{(1)} \sin n\theta_1) \quad (12a)$$

$$\phi_{2,II2}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{\alpha,2}r_1)(C_{II2,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + D_{II2,n}^{(1)} \sin n\theta_1) \quad (12b)$$

$$\psi_{II2}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_{\beta}r_1)(E_{II2,n}^{(1)} \sin n\theta_1 + F_{II2,n}^{(1)} \cos n\theta_1) \quad (12c)$$

③ 沉积层 II 中存在半空间自由表面 (由大圆弧近似表示) 产生的散射波

$$\phi_{1,II3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{\alpha,1}r_3)(A_{II3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 + B_{II3,m}^{(3)} \sin m\theta_3) \quad (13a)$$

$$\phi_{2,II3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{\alpha,2}r_3)(C_{II3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 + D_{II3,m}^{(3)} \sin m\theta_3) \quad (13b)$$

$$\psi_{II3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{\beta}r_3)(E_{II3,m}^{(3)} \sin m\theta_3 + F_{II3,m}^{(3)} \cos m\theta_3) \quad (13c)$$

3) 沉积层介质 I 中的散射波

① 沉积层 I 与沉积层 II 的界面会在介质 I 中产生 P<sub>I</sub> 波, P<sub>II</sub> 波和 SV 波的散射波. 则散射波为

$$\phi_{1,I2}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{\alpha,1}r_1)(A_{I2,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + B_{I2,n}^{(1)} \sin n\theta_1) \quad (14a)$$

$$\phi_{2,I2}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{\alpha,2}r_1)(C_{I2,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + D_{I2,n}^{(1)} \sin n\theta_1) \quad (14b)$$

$$\psi_{I2}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{\beta}r_1)(E_{I2,n}^{(1)} \sin n\theta_1 + F_{I2,n}^{(1)} \cos n\theta_1) \quad (14c)$$

② 两相介质沉积层 I 中由于存在用大圆弧近似表示的半空间自由表面而产生的散射波

$$\phi_{1,I3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{\alpha,1}r_3)(A_{I3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 + B_{I3,m}^{(3)} \sin m\theta_3) \quad (15a)$$

$$\phi_{2,I3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{\alpha,2}r_3)(C_{I3,m}^{(3)} \cos m\theta_3 + D_{I3,m}^{(3)} \sin m\theta_3) \quad (15b)$$

$$\psi_{I3}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{\beta}r_3)(E_{I3,m}^{(3)} \sin m\theta_3 + F_{I3,m}^{(3)} \cos m\theta_3) \quad (15c)$$

由于上述波函数是在不同坐标系下给出的, 为了方便求解, 应进行坐标变换. 根据 Graf 加法公式, 其中  $D$  为  $o_1$  和  $o_3$  之间的距离 (见图 1).  $C_n(kr_1)$  和  $C_m(kr_1)$  分别代表 Hankel 函数和第 1 类 Bessel 函数, 进行坐标变换, 得到波势函数式 (9), (10) 在另一极坐标系下的表达式为

$$C_n(kr_1) \begin{Bmatrix} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_{m+n}(kD)J_m(kr_3) \begin{Bmatrix} \cos m\theta_3 \\ \sin m\theta_3 \end{Bmatrix}, \quad r_3 < D \quad (16)$$

$$C_m(kr_3) \begin{Bmatrix} \cos m\theta_3 \\ \sin m\theta_3 \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_{n+m}(kD)J_n(kr_1) \begin{Bmatrix} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{Bmatrix}, \quad r_1 < D \quad (17)$$

$$\phi_{h2}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_1r_3)(A_{h2,m}^{(3)} \cos m\theta_3 + B_{h2,m}^{(3)} \sin m\theta_3) \quad (18a)$$

$$\psi_{h2}(r_3, \theta_3) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_2 r_3) (C_{h2,m}^{(3)} \sin m\theta_3 + D_{h2,m}^{(3)} \cos m\theta_3) \quad (18b)$$

其中

$$\begin{Bmatrix} A_{h2,m}^{(3)} \\ B_{h2,m}^{(3)} \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} T2_{mn}^{\pm}(k_{s1}D) \begin{Bmatrix} A_{h2,n}^{(1)} \\ B_{h2,n}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (19a)$$

$$\begin{Bmatrix} C_{h2,m}^{(3)} \\ D_{h2,m}^{(3)} \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} T2_{mn}^{\mp}(k_{s2}D) \begin{Bmatrix} C_{h2,n}^{(1)} \\ D_{h2,n}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (19b)$$

$T2_{mn}$  和下面用到的  $T1_{mn}$  的定义见式 (22a),(22b).

$$\phi_{h3}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{s1}r_1) (A_{h3,n}^{(1)} \cos n\theta_1 + B_{h3,n}^{(1)} \sin n\theta_1) \quad (20a)$$

$$\psi_{h3}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{s2}r_1) (C_{h3,n}^{(1)} \sin n\theta_1 + D_{h3,n}^{(1)} \cos n\theta_1) \quad (20b)$$

其中

$$\begin{Bmatrix} A_{h3,n}^{(1)} \\ B_{h3,n}^{(1)} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} T1_{nm}^{\pm}(k_{s1}D) \begin{Bmatrix} A_{h3,m}^{(3)} \\ B_{h3,m}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (21a)$$

$$\begin{Bmatrix} C_{h3,n}^{(1)} \\ D_{h3,n}^{(1)} \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} T1_{nm}^{\mp}(k_{s2}D) \begin{Bmatrix} C_{h3,m}^{(3)} \\ D_{h3,m}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (21b)$$

在式 (19) 和 (21) 中

$$T1_{mn}^{\pm}(kD) = \frac{\varepsilon_m}{2} [J_{m+n}(kD) \pm (-1)^n J_{m-n}(kD)] \quad (22a)$$

$$T2_{mn}^{\pm}(kD) = \frac{\varepsilon_m}{2} [H_{m+n}^{(1)}(kD) \pm (-1)^n H_{m-n}^{(1)}(kD)] \quad (22b)$$

同理, 式 (11)~(15) 可进行类似的坐标变换, 为了节省篇幅, 这里不再赘述.

### 2.2.3 总波场

弹性半空间中的波场势函数为

$$\phi_h = \phi^R + \phi_{h1} + \phi_{h3} \quad (23a)$$

$$\psi_h = \psi^R + \psi_{h1} + \psi_{h3} \quad (23b)$$

沉积层 II 中的波势函数

固相

$$\phi_{II} = \phi_{1,II1} + \phi_{2,II1} + \phi_{1,II2} + \phi_{2,II2} + \phi_{1,II3} + \phi_{2,II3} \quad (24a)$$

$$\psi_{II} = \psi_{II1} + \psi_{II2} + \psi_{II3} \quad (24b)$$

液相

$$\Phi_{II} = \eta_1[\phi_{1,II1} + \phi_{1,II2} + \phi_{1,II3}] + \eta_2[\phi_{2,II1} + \phi_{2,II2} + \phi_{2,II3}] \quad (25a)$$

$$\Psi_{II} = \eta_3(\psi_{II1} + \psi_{II2} + \psi_{II3}) \quad (25b)$$

沉积层 I 中的波势函数:

固相

$$\phi_I = \phi_{1,I2} + \phi_{2,I2} + \phi_{1,I3} + \phi_{2,I3} \quad (26a)$$

$$\psi_I = \psi_{I2} + \psi_{I3} \quad (26b)$$

液相

$$\Phi_I = \eta_1[\phi_{1,I2} + \phi_{1,I3}] + \eta_2[\phi_{2,I2} + \phi_{2,I3}] \quad (27a)$$

$$\Psi_I = \eta_3(\psi_{I2} + \psi_{I3}) \quad (27b)$$

其中,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  分别为对应于 p1 波、p2 波和 SV 波的 3 个液相波的参与系数, 其具体描述见文献 [16].

确定了地震波场之后, 接下来要做的是利用边界条件, 确定和求解上述波场中各种波的势函数表达式中 Fourier-Bessel 级数的待定系数. 一旦求得所有波势函数中的待定系数, 即可得到地表位移的解析解. 限于篇幅, 这里不再赘述其求解过程, 感兴趣的读者可参考文献 [13].

## 3 结果分析

引入无量纲频率  $\eta$ , 其定义为圆弧形沉积谷的宽度与入射波波长的比值

$$\eta = \frac{2a_2}{\lambda_{s\beta}} = \frac{k_{s\beta} a_2}{\pi} \quad (28)$$

式中,  $\lambda_{s\beta}$  为半空间的 SV 波的波长.

### 3.1 材料参数

半空间为单相弹性介质, 其材料参数: 泊松比  $\nu = 0.25$ , Lamé 常数为  $\lambda = \mu = 2.48 \times 10^9$  Pa, 密度  $\rho = 2.0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 其相应的 P 波波速为 1928.7 m/s, 剪切波波速为 1113.6 m/s. 沉积层介质为饱和多孔介质, 不考虑能量耗散, 取固体骨架密度  $\rho_s = 2.7 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 孔隙水密度  $\rho_f = 1.0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 水的体积模量  $K_f = 2.2 \times 10^9$  Pa, 其他材料参数以及相应的波速见表 1; 在自由场地中, 设 Rayleigh 波幅值  $A_i = 1$ , 则其水平和垂直位移的幅值分别为 0.4226 和 0.6204.

表 1 材料参数

Table 1 Parameter of material

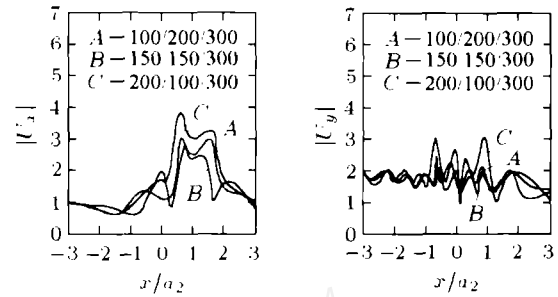
Group	$n$	$\nu_s$	$\mu_s$ ( $\times 10^9$ )	$A$ ( $\times 10^9$ )	$Q$ ( $\times 10^9$ )	$R$ ( $\times 10^9$ )	$V_{\alpha,1}$	$V_{\alpha,2}$	$V_{\beta}$
1	0.3	0.25	0.22	3.8133	1.54	0.66	1977	289	327
2	0.3	0.25	1.1	4.6933	1.54	0.66	2224	574	732
3	0.3	0.25	0.11	3.7033	1.54	0.66	1954	207	231

3.2 参量分析

3.2.1 频率和沉积层排列顺序对场位移的影响

设所有与饱和多孔介质相交的界面均为透水边界，材料参数取表 1 中的 Group 1 和 2. 图 2(a)~图 2(c) 分别给出 Rayleigh 波以  $\eta = 0.25, 1.0$  和  $2.0$  三种频率输入，谷地的高宽比为  $h_1/b_1 = 0.5$  的河谷，沉积层 I 与沉积层 II 的厚度相同 ( $h_1/h_2 = 0.5$ )，层状沉积层的两种排列顺序如下：①沉积层 I 的剪切波速为 327 m/s，沉积层 II 的剪切波速为 732 m/s，半空间弹性介质波速为 1113.6 m/s，这种排列称为正常顺序，波速比约为 100/200/300. ②非正常顺序排列，例如上述 3 层介质的波速比约为 200/100/300(其中，沉积层 I 的波速比大于沉积层 II 的波速比，此时沉积层 II 为软弱夹层).

图 2(a)~图 2(c) 给出了自由地表面水平和竖向位移. 为了便于与两层沉积层情况进行比较，图中还同时给出了沉积层介质 I 和介质 II 的剪切波速比



(c)  $\eta = 2.0$

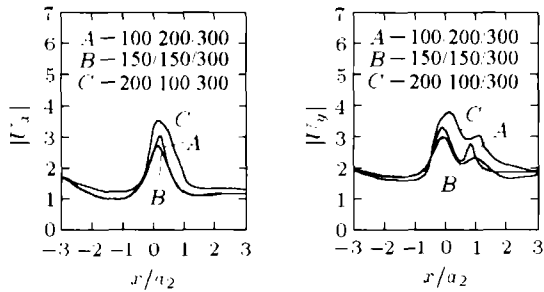
图 2 不同频率下，沉积排列顺序对场位移的影响

Fig.2 The effects of sediment sequence on the displacement responses of local sites for various dimensionless frequencies

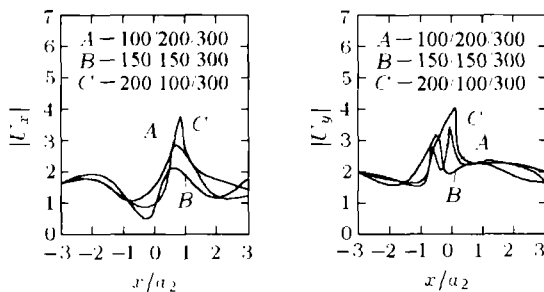
取为 150/150/300 情况下的地表的位移幅值. 由图中可以看出：无论是水平位移还是竖向位移，大多数情况下，三层状沉积层情况(包括正常顺序和非正常顺序)比两层沉积层情况要大；而沉积层非正常排列情况下(即存在软弱夹层时)的放大作用要大于正常排列的情况. 从图 2 可看出，频率的增加对地表位移幅值的影响并不明显，只是随着频率的增加，地面运动变化得更快，也更为复杂.

3.2.2 沉积层相对刚度及厚度对地表位移的影响

当材料参数取为表 1 中的 Group 1 和 3 时，图 3(a)~图 3(c) 给出了存在软弱夹层条件下，即沉积层 II 的刚度变化时(其它两层材料参数不变)对地表位移幅值的影响. 图中分别给出了 Rayleigh 波以  $\eta = 0.25, 1.0, 2.0$  三种频率输入，谷地的高宽比为  $h_1/b_1 = 0.5$ ，沉积层 I 与沉积层 II 的厚度相同 ( $h_1/h_2 = 0.5$ )，两种夹层的软硬不同即介质 I，介质 II 与半空间的剪切波速比约为 200/100/300 和 200/50/300 时自由地面水平和竖向位移幅值. 由图可以看出，当夹层介质 II 的刚度减小时(即夹层较软的情况)地表位移幅值放大较多. 特别是当  $\eta = 2$ ， $h_1/h_2 = 0.5$  的情况(见图 3(c))，水平位移和竖向位移幅值放大至 14 倍之多.



(a)  $\eta = 0.25$



(b)  $\eta = 1.0$

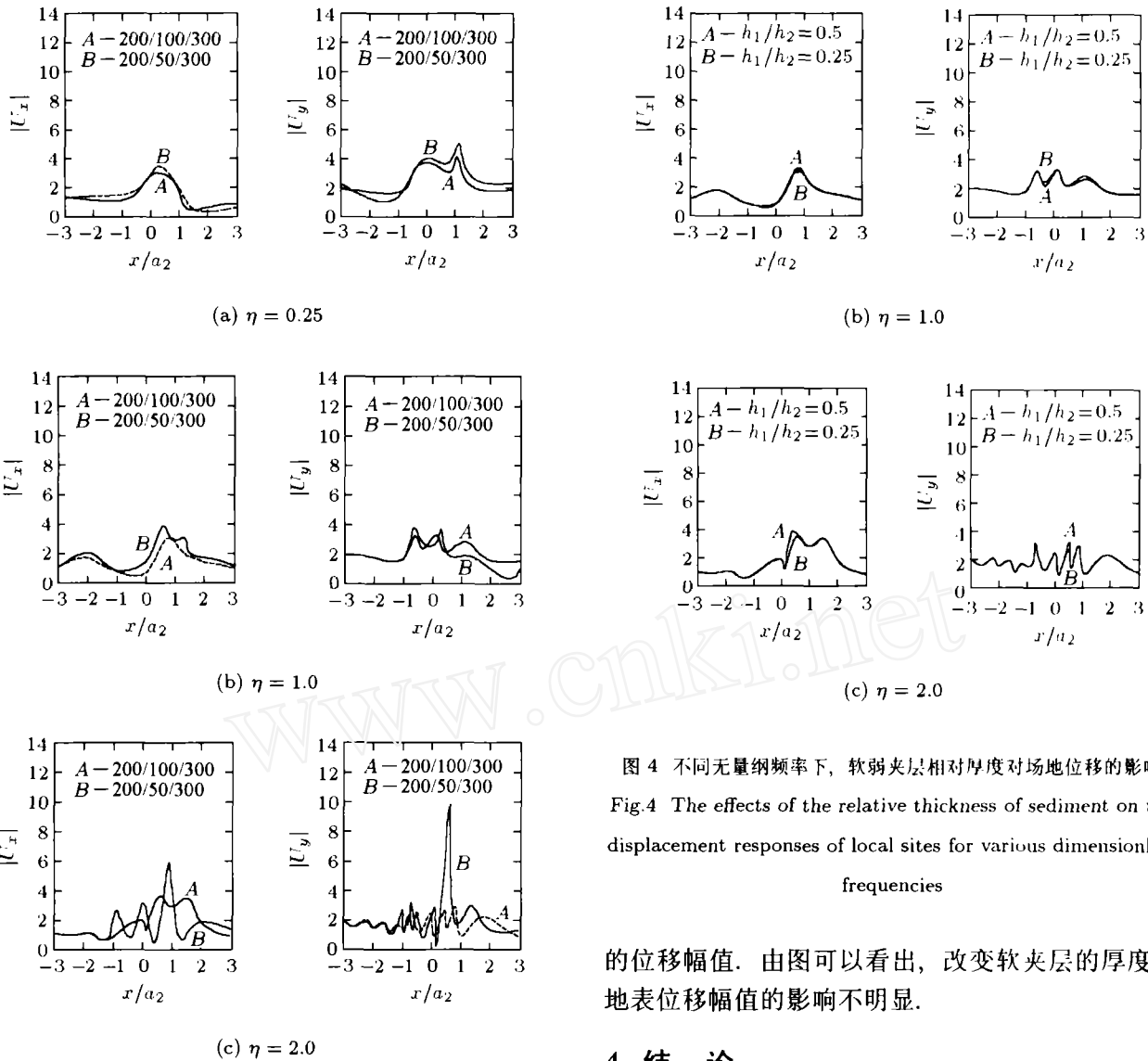


图 3 不同无量纲频率下，夹层相对刚度对场地位移的影响  
Fig.3 The effects of the relative rigidity of sediments on the displacement responses of local sites for various dimensionless frequencies

图 4(a)~ 图 4(c) 给出了沉积层 I 与沉积层 II 在两种厚度时，即  $h_1/h_2 = 0.25$ ,  $h_1/h_2 = 0.5$ (两种厚度的剪切波速比均为 200/100/300) 时水平自由地表面

图 4 不同无量纲频率下，软弱夹层相对厚度对场地位移的影响  
Fig.4 The effects of the relative thickness of sediment on the displacement responses of local sites for various dimensionless frequencies

的位移幅值。由图可以看出，改变软夹层的厚度对地表位移幅值的影响不明显。

### 4 结 论

本文基于弹性动力学理论和 Biot 两相饱和多孔介质动力学理论，利用波函数展开法，给出了弹性半空间中具有层状饱和沉积层的沉积谷场地在平面 Rayleigh 波入射时其动力响应的解析解。由于采用大圆弧模拟水平半空间表面会带来一定的误差，所以本文给出的解是一种近似模型解析解。基于所得到的解析解，进行参量分析发现：

(1) Rayleigh 波在层状沉积层中传播时会在每一层中产生多次的反射，使能量积聚，从而使位移幅值放大。可见，层状沉积层对 Rayleigh 波的散射作用是不可忽视的。

(2) 软弱夹层的存在使得水平地表面的位移变化更为剧烈，位移幅值放大更为明显。

(3) 本文算例条件下的计算结果显示，软弱夹层的厚度变化时，地面位移幅值的变化并不明显增大或减小。

## 参 考 文 献

- 1 Anderson JG, et al. Strong ground motion from the Michoacan, Mexico. *Earthquake Science*, 1986, 233: 1043~1049
- 2 Trifunac MD. Scattering of plane SH wave by a semi-cylindrical canyon. *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, 1973, 1: 267~281
- 3 Todorovska M, Lee VW. Surface motion of shallow circular alluvial valleys for incident plane SH waves: analytical solution. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1991, 10(4): 192~200
- 4 梁建文, 严林隽, 李军伟等. 圆弧形沉积河谷场地在平面 P 波入射下的响应分析. *岩土力学*, 2001, 22 (2): 138~143 (Liang Jianwen, Yan Linjun, Li Junwei, et al. Response of circular-arc alluvial valleys under incident plane P waves. *Rock and Soil Mechanics*, 2001, 22(2): 138~143(in Chinese))
- 5 梁建文, 严林隽. 圆弧形凹陷地形表面覆盖层对入射平面 P 波的影响. *固体力学学报*, 2002, 23(4): 387~411(Liang Jianwen, Yan Linjun. Scattering of incident plane P-waves by a circular-arc canyon with a covering layer. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2002, 23(4): 387~411 (in Chinese))
- 6 梁建文, 严林隽, Lee VW. 圆弧形层状沉积谷地对入射平面 SV 波散射的解析解. *固体力学学报*, 2003, 24(2): 235~243 (Liang Jianwen, Yan Linjun, Lee VW. Diffraction of plane SV- waves by a circular-arc layered alluvial valley: analytical solution. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 24(2): 235~243(in Chinese))
- 7 Todorovska MI, Lee VW. A note on scattering of Rayleigh waves by shallow circular canyons: analytical approach. *ISET J. Earthquake Technology*, 1991, 28(2): 1~16
- 8 Biot MA. Theory of propagation of elastic wave in fluid-saturated porous soil. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28(2): 168~178
- 9 李伟华, 赵成刚. 圆弧形凹陷饱和土场地对平面 P 波散射问题的散射解析解. *地球物理学报*, 2003, 46(4): 539~546 (Li Weihua, Zhao Chenggang. An analytical solution for the diffraction of plane P-waves by circular cylindrical canyons in a fluid-saturated porous media half space. *Chinese Journal of Geophys*, 2003, 46(4): 539~546 (in Chinese))
- 10 李伟华, 赵成刚. 饱和土沉积谷地对平面 P 波的散射. *岩土工程学报*, 2003, 25(3): 346~351 (Li Weihua, Zhao Chenggang. Scattering of plane P waves in alluvial valleys with saturated soil deposits. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2003, 25(3): 346~351(in Chinese))
- 11 李伟华, 赵成刚. 饱和土沉积谷地对平面 SV 波的散射问题的解析解. *地球物理学报*, 2004, 47(5): 911~919 (Li Weihua, Zhao Chenggang. Scattering of plane SV waves by circular-arc alluvial valleys with saturated soil deposits. *Chinese Journal of Geophys*, 2004, 47(5): 911~919 (in Chinese))
- 12 李伟华. 含饱和土的复杂局部场地波动散射问题的解析解和显示有限元数值模拟. [博士学位论文]. 北京: 北京交通大学, 2004 (Li Weihua. Analytical Solutions and Numerical Simulation of the Scattering of Plane Waves by Local Sites with Saturated Soil. [Ph D Dissertation]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2004 (in Chinese))
- 13 董俊, 赵成刚. 三维半球形凹陷饱和土场地对平面 P 波散射问题的解析解. *地球物理学报*, 2005, 48(3): 680~688 (Dong Jun, Zhao Chenggang. An analytical solution for the diffraction of plane P-waves by three-dimensional hemispherical canyons in a fluid-saturated porous media half space. *Chinese Journal of Geophysics*, 2005, 48(3): 680~688 (in Chinese))
- 14 Achenbach JD. *Wave Propagation in Elastic Solids*. New York: North-Holland Publishing Company, 1973
- 15 纪晓东. 半空间中圆形洞室对弹性波的散射. [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 2005 (Ji Xiaodong. Scattering and Diffraction of a Cylindrical Cavity in Half-space Subjected to Elastic Waves. [Ph D Dissertation]. Tianjin: Tianjin University, 2005(in Chinese))
- 16 Deresiewicz H, Rice JT. The effect of boundaries wave propagation in a liquid-filled porous solid: III. Reflection of plane waves at a free plane boundary (general case). *Bull Seism Soc Am*, 1962, 52(3): 595~625



## SCATTERING OF PLANE RAYLEIGH WAVES BY A CIRCULAR-ARC ALLUVIAL VALLEY: AN ANALYTICAL SOLUTION<sup>1)</sup>

Zhao Chenggang\* Wang Lei\* Gao Fuping<sup>†,2)</sup>

\**(School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)*

<sup>†</sup>*(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)*

**Abstract** The scattering and diffraction of plane Rayleigh waves in a circular-arc layered alluvial valley with soft-soil deposits is studied analytically in this paper. The soft sediments in the circular-arc valley are simulated by applying Biot's dynamic theory to a saturated porous medium, and the half-space is assumed as an elastic single-phase medium. In this analysis, Fourier-Bessel series expansion technique is employed to obtain the analytical solutions. Based on the analytical solutions, the effects of dimensionless frequency, the layered sediments sequence and the relative rigidity and thickness on the scattering and diffraction are investigated.

**Key words** circular-arc layered alluvial valley, plane Rayleigh waves, wave scattering, surface displacement amplitudes, saturated sediment

Received 4 April 2006, revised 23 November 2006.

- 1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50478062), National Science Foundation of Beijing (8052015), Open Fund at the Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering (Beijing University of Technology), Chinese Ministry of Education.
- 2) E-mail: fpgao@imech.ac.cn