

粘性可压混合层时间稳定性对称紧致差分求解

王 强, 傅德薰, 马延文

(中国科学院 力学研究所, 非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘 要: 基于可压扰动方程组的一阶改型, 将高精度对称紧致格式引入边值法数值线性稳定性分析. 对所获非线性离散特征值问题给出了一个通用形式二阶迭代局部算法, 实现了时间模式和空间模式的统一求解, 并将扰动特征值及其特征函数同时得到. 据此分析了可压平面自由混合层时间稳定性, 涉及二维/三维扰动波、粘性/无粘扰动波、第一/第二模态、特征函数、伪特征值谱等. 研究表明, 压缩性效应和粘性效应对最不稳定扰动波数和增长率呈相似的减抑作用; 在 $Mc = 1$ 附近, 从高波数段开始, 粘性效应可强化二维不稳定扰动波由第一模态向第二模态的过渡.

关键词: 混合层; 稳定性分析; 时间模式; 紧致差分格式

中图分类号: O 354; V 211. 3 **文献标识码:** A

0 引 言

数值线性稳定性分析是混合层理论研究内容之一, 它最早可追溯到本世纪六十年代^[1]. 自从 Bogdanoff^[2] 和 Papamoschou^[3] 先后通过实验选取对流 Mach 数为压缩性参数以来, 可压混合层稳定性理论得以深入发展. 与边界层流动不同, 可压混合层平均速度剖面上存在自然拐点, 与流体粘性无关, 因而大多数研究是在无粘假设下进行的^[4,5]. Ragab 和 Wu^[6] 在其空间模式线性稳定性分析中计及了粘性, 结果显示粘性效应对扰动增长率具有抑制作用.

类似于边界层流动^[7], 可压混合层线性稳定性问题的数值求解可分成初值法 (initial value method) 和边值法 (boundary value method) 两类. 初值法占用计算机内存较少, 并可根据扰动特征函数的局部特性变步长积分, 所以在文献中常被采用^[5,6]. 其不足之处是存在寄生误差, 对迭代初值很敏感. 边值法的特点是易于构造矩阵特征值问题, 收敛性较好, 更适于高 Mach 数可压流计算. 有限差分是边值法中常见的一种数值离散方法. 受离散方程系数矩阵带宽的限制, 显式差分计算多为二阶精度. Malik^[7] 较早可在可压流线性稳定性分析中实现了一个源于 Euler-Maclaurin 公式的两点四阶具有紧致特征的差分算法, 被许多人选用.

本文将一类高精度对称紧致差分格式^[8]引入可压流线性稳定性分析, 就导出的非线性离散特征值问题给出一个通用形式二阶迭代局部解法. 利用所述算法, 研究了时间模式无约束可压平面混合层的线性稳定性特征, 讨论了压缩性效应和粘性效应对不稳定扰动波增长率、扰动波数、扰动模态、以及扰动特征函数等的影响.

1 三维可压线性稳定性方程

将速度分量 u, v, w , 温度 T , 压力 p 取作独立变量. 记瞬时流动元 $\tilde{f} = (u, v, w, T, p)$, 并分解成平均量 \bar{f} 与无穷小扰动量 f 之和, 代入三维可压 Navier-Stokes 方程, 舍去高阶小量, 可得关于 f 的线性化扰动方程. 在局部平行流和 Tollmien-Schlichting 行谐波假设下, 令扰动量为

$$f(x, y, z, t) = \hat{f}(y) \cdot \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$$

这里, \hat{f} 是扰动特征函数, α 是流向波数, β 是展向波数, ω 是扰动频率. 据此导出关于 \hat{f} 的三维可压线性稳定性方程, 表作矩阵形式

$$(AD^2 + BD + C)\Phi = 0 \quad (1)$$

系数矩阵 $A, B, C \in C^{5 \times 5}$, 特征函数向量 $\Phi = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}, \hat{p})^T$, 微分算子 $D = d/dy$. 对上式的连续方程求导, \hat{v} 的二阶法向动量方程可替换成 \hat{p} 的一阶方程, 于是得稳定性方程的一阶改型

$$D\Psi = M\Psi \quad (2)$$

系数矩阵 $M \in C^{8 \times 8}$, 特征函数向量 $\Psi = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}, \hat{p}, D\hat{u}, D\hat{w}, DT)^T$. 特别地, 对无粘情形,

收稿日期: 2000-04-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972070).

作者简介: 王 强 (1967-), 男, 理学博士后.



$M \in C^{2 \times 2}, \Psi = (\hat{v}, \hat{p})^T$ 。稳定性方程与其边界条件组成由复色散关系式 $F(\text{Re}; \alpha, \beta, \omega) = 0$ 描述的连续特征值问题。矩阵 A, B, C, M 的元素详见文 [9]。

2 SCD-MNR 边值迭代局部算法

设网格一维均匀分布, 网格点数 N , 网格间距 h 。标量函数 g 的一阶导数 g' 的 7 点对称紧致差分格式 (Symmetric Compact Difference, SCD) 一般形式为 [18]

$$g_{i+1} + \alpha \cdot (g_{i-1} + g_{i+1}) + \beta \cdot (g_{i-2} + g_{i+2}) = h^{-1} \cdot (a\delta_1^+ + b\delta_2^+ + c\delta_3^+)g_i \quad (3)$$

其中, α, β, a, b, c 是差分基架参数, 中心差分算子 $\delta_1^+g_i = g_{i+1} - g_{i-1}$ 。本文用特征函数向量 Ψ 及其导数 $D\Psi$ 替换 g 和 g' , 并计及一阶改型稳定性方程 (2), 式 (3) 变为

$$\{cI\}\Psi_{i-3} + \{h\beta M_{i-2} + bI\}\Psi_{i-2} + \{h\alpha M_{i-1} + aI\}\Psi_{i-1} + \{hM_i\}\Psi_i + \{h\alpha M_{i+1} - aI\}\Psi_{i+1} + \{h\beta M_{i+2} - bI\}\Psi_{i+2} + \{-cI\}\Psi_{i+3} = 0 \quad (4)$$

式中, I 是单位矩阵, $i = 2, \dots, N - 1$ 。受网格点数的限制, 近边界处格式降阶。边界点 $i = 1, N$ 上的数值离散方程的构造与内点类似, 采用的是高阶迎风紧致差分格式 [18], 且兼顾物理和数值边界条件 [9]。最后归结为带状齐次线性方程组

$$\overline{M}(\text{Re}; \alpha, \beta, \omega)\overline{\Psi} = 0 \quad (5)$$

矩阵 $\overline{M} \in C^{m \times m}$, 带宽 63; 离散特征向量 $\overline{\Psi} \in C^m$, $m = 8N$ 。式 (5) 对 ω 和 α 都呈非线性。

对非线性离散特征值问题 (5), 现构造一个通用形式修正 Newton-Raphson (MNR) 二阶迭代局部解法。设网格 i_1 上第 l_1 个独立变元非 0, 且为式 (5) 非平凡特征解的正规化变量, 记作 $\overline{\Psi}_{i_1}^{(l_1)}$, 则有 $\overline{\Psi}_{i_1}^{(l_1)} = 1$, 以之替换式 (5) 中任一方程 $g(\overline{\Psi}) = 0$, 并平移至对角线上, 得线性方程组

$$\overline{N}(\text{Re}; \alpha, \beta, \omega)\overline{\Psi} = \overline{r} \quad (6)$$

系数矩阵 \overline{N} 仍呈带状, 带宽 65。向量 \overline{r} 的第 $(i_1 - 1) \times 8 + l_1$ 个元素为 1。这样, $g(\overline{\Psi})$ 便由式 (6) 确定了一个原象为 $\lambda = (\omega, \alpha)$ 的非线性函数映射 $f(\lambda)$, $f(\lambda) = 0$ 的根即为特征值 λ , 所对应的方程组 (6) 的解为特征函数。令 $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ 经典 Newton-Raphson 迭代的基本思想是将迭代函数 $f(\lambda)$ 在预估值 λ 处一阶 Taylor 展开, 若进行二阶展开, 有

$$f(\lambda) \approx f(\lambda) + f'(\lambda)\Delta\lambda + \frac{1}{2}f''(\lambda)\Delta\lambda^2$$

式中 $f'(\lambda) = 0$ 。迭代残值 $\Delta\lambda$ 的两个根取模最小的一个。此外, 易知

$$f(\lambda) = g(\overline{\Psi}_1(\lambda), \overline{\Psi}_2(\lambda), \dots, \overline{\Psi}_m(\lambda))$$

$$f'(\lambda) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial \overline{\Psi}_j} \frac{d\overline{\Psi}_j}{d\lambda}$$

$$f''(\lambda) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{\Psi}_j^2} \frac{d^2 \overline{\Psi}_j}{d\lambda^2}$$

其中向量 $\overline{\Psi}$ 及其导数由式 (6) 及其一阶和二阶微分方程组求得, 并且在迭代过程中, 所得三个线性方程组可共用一个 LU 分解系数矩阵。

3 可压混合层时间稳定性分析

考虑两股气流以 $y = 0$ 平面分界, 在 xy 平面内做异向无约束平行混合层流运动。坐标分量 (x, y, z) 、速度分量 (u, v, w) 、温度 T 、压力 p 依次由 δ_0^* , u_1^* , T_1^* , $\rho_1^* u_1^{*2}$ 无量纲化, 上标 $*$ 表示有量纲值, 下标 1, 2 表示上下层自由流值。涡量厚度 $\delta_0^* = (u_1^* - u_2^*) / |du^*/dy^*|_{\max}$ 。在 $\overline{u}_2 = -1, \overline{T}_2 = 1, \overline{p}_2 = \overline{p}_1$ 无量纲自由流条件下, 平均流向速度 $\overline{u}(y) = \tanh(2y)$, 平均温度满足修正 Crocco-Busemann 关系式 $\overline{T}(y) = 1 + \sqrt{Pr} \cdot (Y - 1) \cdot M_1^2 \cdot [1 - \overline{u}(y)^2] / 2$, 平均压力 $\overline{p}(y) = 1 / (\gamma M_1^2)$, 对流 Mach 数 $Mc = M_1 = M_2$ 。此外, $Y = 1.4, Pr = 0.75, T_1^* = 273K$ 。

以 $Mc = 0.8, Re = 600, \alpha = \beta = 0.5, \omega = (0, 0.15997489)$ 的 45° 粘性斜波为例, 采用 8 阶 SCD 数值离散格式, 图 1 比较了一阶迭代 (虚线) 和二阶迭代 (实线) 误差 $\epsilon = \{ |f(\omega)|, |\Delta\omega|, \Delta\overline{\Psi} \}$ 的收敛曲线 (分别由符号 $\square, \triangle, \circ$ 标示)。结果显示, 二阶迭代不仅吸收域较大, 其收敛速度、收敛极限、迭代步数也更优。对同一算法, $\Delta\overline{\Psi}$ 的收敛性明显弱于 $|\Delta\omega|$, 这意味着特征函数误差比特征值误差更敏感, 如果单纯将后者作为收敛判据可能会掩盖较大的特征函数误差。

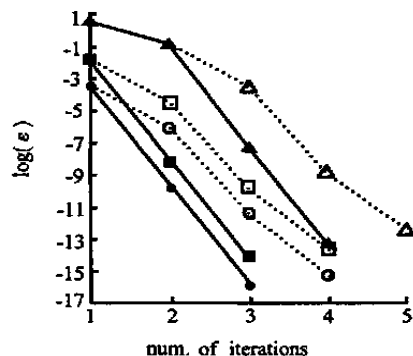


图 1 迭代误差曲线
Fig.1 Error for SCD-MNR iteration

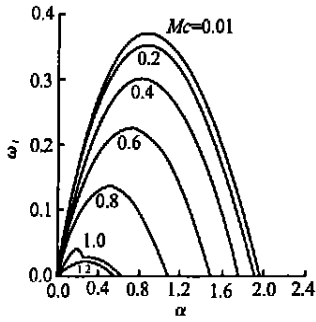


图 2 不同 Mc 扰动增长率
Fig.2 Growth rate at different Mc

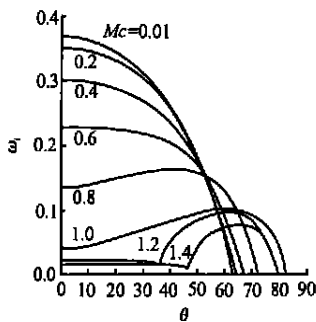


图 3 三维扰动增长率
Fig.3 Three-dimensional growth rate

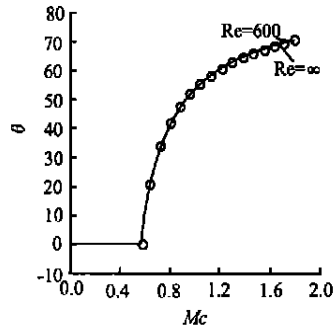


图 4 最不稳定扰动波角
Fig.4 Most unstable wave angle

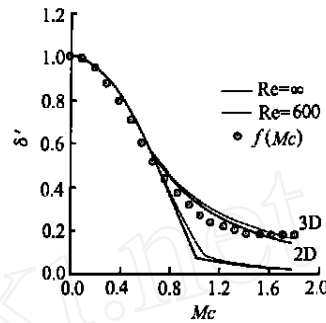


图 5 扰动增长率正规化曲线
Fig.5 Normalized growth rate

3.1 压缩性效应

图 2 是一组 $\beta = 0$ 二维粘性扰动波增长率 ω 随流向波数 α 变化曲线 ($Re = 600$)。当 Mc 增大时, ω 下降, 不稳定波数范围缩小。 $Mc < 1$ 亚声速流的最不稳定 ω 和 α 的下降梯度大于 $Mc > 1$ 超声速流, 其扰动波为第一模态, 相速度 $C_{ph} = \omega/\alpha$ 为 0; 在 $Mc = 1$ 附近, 第二模态扰动波 ($C_{ph} \neq 0$) 于高波数段出现, 逐渐向低波数段推进, 第一模态波数范围减小; $Mc > 1$ 超声速流的扰动波为第二模态, 共有两个, 它们的 ω 相同, C_{ph} 大小相等方向相反。相对上下层自由流定义对流 Mach 数 $M_{c1} = (\bar{u}_1 - C_{ph})/c_1$, $M_{c2} = (C_{ph} - \bar{u}_2)/c_2$, 因 $|C_{ph}| < 1^{[9]}$, 故两个超声速扰动波必在混合层某侧为超声速, 而在另一侧为亚声速。参照 Jackson 和 Groesch^[4] 在其无粘空间模式稳定性分析中的分类, $C_{ph} > 0$ 的扰动波为快模态, $C_{ph} < 0$ 的扰动波为慢模态。计算还显示, 压缩性效应可使二维超声速最不稳定扰动波的相速度增大。Michalke^[11] 经时间模式分析所得无粘不可压混合层最不稳定波数 $\alpha = 0.4446$, 本文对 $Mc = 0.01$ 无粘计算所得结果是 $\alpha = 0.890$, 计及二者无量纲尺度差 1 倍可知, 从稳定性角度来看, $Mc = 0.01$ 是不可压流态的一个相当好的近似。

三维扰动波角 $\theta = \arctan(\beta/\alpha)$ 。将 α 取定为二维最不稳定扰动波数, 图 3 是一组三维扰动波 ω 随

θ 变化曲线 ($Re = 600$)。当 Mc 增大时, 自 $Mc = 0.6$ 开始, 曲线最大值点在横轴上向非 0 值偏移, 最不稳定扰动波从二维转至三维, 且仍保持第一模态。 $Mc = 1.2$ 和 1.4 曲线上的中部尖点是模态变换位置, 超声速第二模态扰动波只是二维最不稳定的。图 4 是同时改变波数 α 和 β 而搜索得到的三维最不稳定扰动波角 θ 随 Mc 变化曲线, 均为第一模态, 并受粘性影响不大。同图 3, $Mc > 0.6$ 时, 三维波最不稳定, 波角 θ 单调上升, 变化梯度由大变小, 从这个意义上说, 压缩性效应在 $0.6 < Mc < 1.2$ 区间最强。Sandham 和 Reynolds^[5] 经无粘线性稳定性分析发现, 三维最不稳定波角 θ 近似满足关系式 $Mc \cdot \cos\theta \approx 0.6$, 它在图 4 中以符号 \circ 表示, 本计算与之十分吻合, 表明该式对粘性扰动波也适用。压缩性效应还使三维最不稳定波数 α_{max} 单调下降。无粘条件下, 文[5]采用积分法对 $Mc = 0.01, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6$ 依次求得 $\alpha_{max} = 0.89, 0.82, 0.52, 0.315, 0.22$, 本文采用边值法所得结果为 $\alpha_{max} = 0.890, 0.820, 0.517, 0.319, 0.217$, 二者基本一致。

Papamoschou^[3] 基于实验认为, 可压混合层厚度增长率经正规化可表作随对流 Mach 数 Mc 变化的压缩性函数。利用 $Mc = 0.01$ 流态来近似不可压流, 以其最不稳定 ω 作正规变量, 图 5 是由此得到的二维和三维最不稳定扰动增长率正规化变量 δ



随 Mc 变化曲线 δ 所反映的压缩性效应在 $Mc = 0.4 \sim 1.2$ 范围较强。如前所述, 当 $Mc > 0.6$ 时, 三维 δ 为主导, 并凸现出粘性对它的抑制作用。图中符号 \bullet 对应的是参照文[3]而给出的拟合函数

$$f(Mc) = 0.18 + 0.82 \cdot \exp(-2 \cdot Mc^2)$$

三维 δ 曲线与之吻合较好, 定性地显示了可压混合层厚度增长率和扰动增长率所受压缩性效应之间的相似性。从稳定性角度来说, 对流 Mach 数 Mc 是一个简单合理的压缩性参数。

3.2 粘性效应

考虑 $\beta = 0$ 二维不稳定扰动波。给定 $Mc = 1.2$, 图 6 是一组 ω 随 α 变化曲线, 与压缩性效应类似, 粘性效应也使扰动增长率和 unstable 波数范围减小。图中无粘扰动波曲线有两个峰值区, 当粘性增大时, 第二模态扰动波从高波数峰值区向低波数第一模态峰值区推进, 最后第一模态扰动波被完全抑制。Ragab 和 Wu^[6] 经空间线性稳定性分析认为, Reynolds 数对不稳定扰动波的相速度影响不大, 该结论仅适用于第一模态, 对第二模态扰动波, 粘性效应使其相速度单调上升^[9]。图 7 是 $Mc = 0.6, 1.2$ 时最不 stable 扰动增长率 ω 随 Reynolds 数变化曲线。 $Re > 1000$ 时, 粘性稳定化效应可忽略。图中超声速第二模态扰动波存在较大的稳定临界 Reynolds 数, 同样, 文[6]所述扰动波几乎在整个

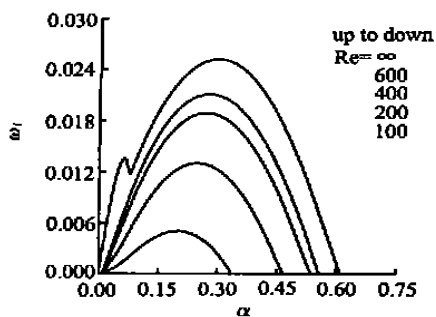


图 6 不同 Re 扰动增长率
Fig.6 Growth rate at different Re

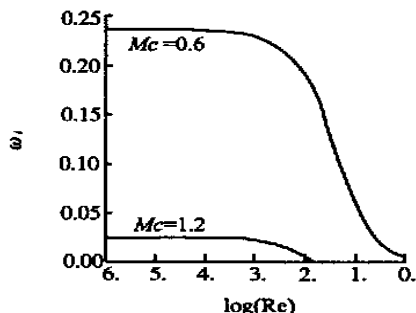


图 7 二维最不 stable 扰动增长率
Fig.7 Two-dimensional most unstable ω_i

Reynolds 数范围不稳定的断言也仅适用于第一模态。

3.3 特征函数

计算表明^[9], 最不 stable 扰动波的扰动能量大于亚谐波, 其特征函数中 \hat{u} 的相对尺度最大, 是扰动初始主导方向。第一模态扰动波特征速度实部关于 $y = 0$ 对称, 虚部反对称, 特征温度和特征压力的对称性与特征速度相反。将扰动场取作

$$f(x, y) = \hat{f}_r(y) \cdot \cos(\alpha x) - \hat{f}_i(y) \cdot \sin(\alpha x)$$

可以推知, 扰动场沿周期方向存在 4 个等距中心对称点, 呈对称 / 反对称交替分布, 该性质决定了扰动波非线性演化过程中大尺度涡结构的对称特征及涡心位置。压缩性效应和粘性效应均使最不 stable 扰动波特征函数的横向影响域增大, 但扰动能量降低。

超声速第二模态扰动波是辐射涡模态, 特征函数的波动状主结构偏于相对 Mach 数为超声速一侧, 但快 / 慢模态特征函数叠加的对称性与 Kelvin-Helmholtz 型第一模态扰动波相同。选取 $Mc = 1.2, Re = 600$ 二维最不 stable 扰动波, 图 8 是快模态压力扰动场, 粗线值大于 0, 细线值小于 0, 虚线值等于 0。图中亚声速一侧理论 $Mc_1 = 0.881$, 结构与第一模态相仿; 超声速一侧理论 $Mc_2 = 1.519$, 存在类似于超声速波纹壁流态的辐射膨胀 / 压缩波系。由 0 等值线量得传播 Mach 角 $\mu =$

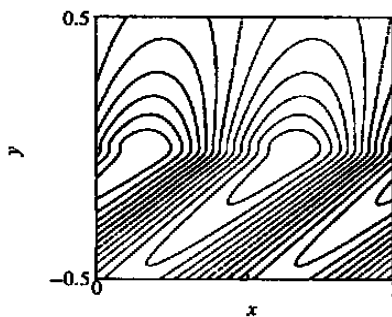


图 8 快模态特征压力
Fig.8 Pressure eigenfunction of fast mode

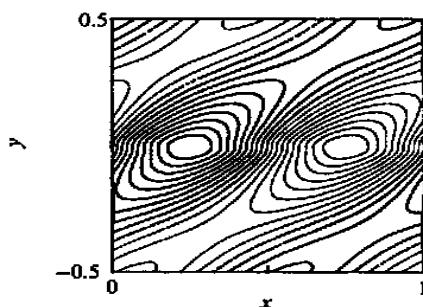


图 9 快 / 慢模态叠加特征压力
Fig.9 Overlapped pressure eigenfunction

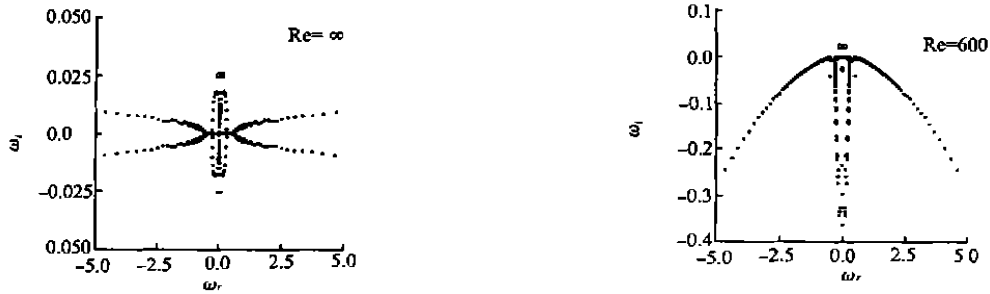


图 10 $Mc=1.2$ 特征值谱
Fig.10 Eigenvalue spectrum at $Mc=1.2$

$\arcsin(1/Mc_2)$ 的值约 40.2° 则计算 $Mc_2 = 1.549$, 同理论值接近。图 9 是快/慢模态叠加压力扰动场, 对称性同第一模态, 但等值线向两侧远场辐射。

3.4 特征值谱

特征值谱由 4 阶显式中心差分数值离散稳定性方程 (1) 获得。这是一个伪谱, 其中伪特征解通常无收敛性, 特征函数呈锯齿状波动, 在自由流中不衰减。特征值谱分析可给出物理谱信息, 帮助了解特征模态彼此间以及同伪特征解之间的粘连性, 指导局部解法的迭代初值预估。图 10 是 $Mc = 1.2$ 二维最不稳定扰动波特征值谱。空心圆为物理模态, 与第一模态类似^[9], 无粘谱关于实轴和虚轴对称, 具有蝶形结构; 粘性谱只关于虚轴对称, 具有伞形结构。物理模态虚部最大, 与伪特征解明显分离, 保证了有限收敛域下迭代算法收敛的可能性。粘性足够大时, 只有物理模态不稳定。压缩性效应和粘性效应可强化特征模态粘连性问题, 表明在粘性可压混合层稳定性分析中发展高精度高分辨率数值算法是必要的。

4 结 论

本文将一类高精度对称紧致差分格式与二阶修正 Newton-Raphson 非线性函数求根迭代过程结合, 针对可压流数值线性稳定性分析, 构造给出了一个高精度高分辨率 SCD-MNR 局部解法。据此对可压自由混合层进行了时间模式稳定性分析, 结果表明:

(1) 压缩性效应和粘性效应对最不稳定扰动波的波数和增长率呈相似的减抑作用, 并在 $Mc = 1$ 附近强化二维扰动波从第一模态向第二模态过渡。

(2) 最不稳定扰动波于 $Mc = 0.6$ 处从二维转至三维, 且保持第一模态; 粘性效应对三维最不稳定扰动波角无明显影响。

(3) 压缩性效应和粘性效应使最不稳定扰动

波特征函数的横向影响域增大, 使扰动能量减小, 并加剧特征模态粘连性问题。

(4) 可压混合层扰动增长率和厚度增长率所受压缩性效应之间存在相关性。

(5) 在粘性可压混合层稳定性分析中发展高精度高分辨率数值算法是必要的, 是得到正确有效计算结果的关键。

参考文献(References):

- [1] Michalke A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile [J]. *J Fluid Mech*, 1964, **19**(4): 543-556
- [2] Bogdanoff D W. Compressibility effects in turbulent shear layers[J]. *AIAA J*. 1983, **21**(6): 926-927.
- [3] Papamoschou D. Structure of the compressible turbulent shear layer[R]. AIAA Paper 89-0126, 1989.
- [4] Jackson T L, Grosch C E. Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer [J]. *J Fluid Mech*, 1989, **208**: 609-637.
- [5] Sandham N D, Reynolds W C. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer[J]. *J Fluid Mech*, 1991, **244**: 133-158.
- [6] Ragab S A, Wu J L. Linear instabilities in two-dimensional compressible mixing layers [J]. *Phys Fluids*, 1989, **A1**(6): 957-966
- [7] Malik M R. Numerical methods for hypersonic boundary layer stability [J]. *J. Comput Phys*, 1990, **86**: 376-413
- [8] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *J. Comput Phys*, 1992, **103**: 16-42.
- [9] 王 强. 可压平面混合层稳定性分析及数值模拟[D]. 北京: 中国科学院力学研究所, 1999. (Wang Qiang. Stability analysis and numerical simulation of compressible plane mixing layers. Beijing: Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 1999. (in Chinese))

Numerical solution for the viscous temporal stability of compressible mixing layers with symmetric compact difference schemes

Wang Qiang, Fu Dexun, Ma Yanwen

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: Based on the first-order form of compressible stability equations, a family of symmetric compacted difference schemes with high precision is employed for the boundary value problem in numerical stability analysis. A generalized form of the second order local iteration method is given for the obtained nonlinear discretized eigenvalue problem, hence both temporal and spatial stability can be observed similarly, and disturbance eigenmodes and their eigenfunctions are gained simultaneously. The temporal stability for compressible plane free mixing layers is investigated, including two and three dimensional waves, viscous inviscid waves, first and second modes, eigenfunctions, pseudo-eigenvalue spectra and so on. The results show that the viscosity as well as compressibility may reduce the wavenumber and growth rate of the unstable waves. Furthermore, near $Mc = 1$, the viscosity may accelerate the change of two dimensional most unstable waves from the first mode to the second mode at high wavenumber.

Key words: mixing layer; stability analysis; temporal mode; compacted difference scheme

www.cnki.net