

# 纵向非均匀多孔介质 Marangoni 对流不稳定性\*

赵思诚 刘秋生

(中国科学院力学研究所 国家微重力实验室 北京 100080)

**摘要** 理论研究了纵向非均匀多孔介质中流体表面张力驱动的对流不稳定性. 充满液体的多孔介质层从下方加热, 上方自由表面冷却, 形成可引起多孔介质液层 Marangoni-Benard 对流流动的纵向温度梯度. 采用线性化的 Brinkman-Forchheimier 方程作为控制方程组, 对孔隙率分别为线性函数、正弦三角函数分布的非均匀多孔介质液层的 Marangoni-Benard 问题进行了线性稳定性分析. 通过采用 Chebyshev-Tau 谱方法求解广义特征值问题, 得到了系统临界 Marangoni 数随无量纲波数变化的中性稳定性曲线, 分析和比较了孔隙率的变化对液层对流稳定性和流场结构的影响, 获得了纵向非均匀多孔介质液层不稳定性现象的新特征.

**关键词** 流动稳定性; 非均匀多孔介质; Marangoni-Benard 对流; 线性稳定性

**中图分类号** V 524

## Marangoni Instability in Vertically Inhomogeneous Porous Media

ZHAO Sicheng LIU Qiusheng

(National Microgravity Laboratory, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science 100080)

**Abstract** The surface-tension-driven instability in a vertically inhomogeneous porous media has been discussed in this paper. The system is heated from below. The upper surface is free without any deformation. Therefore, the vertical temperature gradient which can lead the Marangoni-Bernard convection is formed. The linear function and the trigonometric function are chose to describe the distribution of the porosity, and Brinkman-Forchheimier equations are for linear instability analysis. Chebyshev-tau approximation is used for general eigenvalue problem correspondingly, and the neutral instability curves, i.e. the critical Marangoni number against dimensionless wavenumber, are obtained. The influence of the distribution and its gradient of porosity on the instability of the system and streamline patterns are also analyzed. Finally, the new characteristics of the convection instability in vertically inhomogeneous porous media are discovered.

**Key words** Vertically inhomogeneous, Porous media, Marangoni convection, Linear stability

### 1 引言

多孔介质中的流体对流稳定理论是当今流体力学研究的前沿热点之一, 它具有极其广泛的工程应

用背景. 因此, 研究多孔介质中的热毛细对流具有重要的意义.

均匀各向同性多孔介质是研究该类问题的理想化模型, 而在自然界条件下, 多孔介质的孔隙率一

\* 国家自然科学基金项目 (10772185, 10372105, 10432060) 和中国科学院知识创新工程项目 (KGCX-SW-409) 共同资助  
2007-08-22 收到原稿, 2007-10-28 收到修定稿

般都不是常数, 所以, 研究非均匀多孔介质中流体的对流稳定理论是本文的研究出发点和动机.

## 2 理论模型

系统结构及笛卡尔坐标系如图 1 所示. 系统整体从下方加热, 两个水平方向都为无穷, 即没有水平方向的约束条件. 下壁面为良好的导热壁面, 上表面为自由面且没有任何形变. 为了简便, 假设孔隙率的分布函数只是  $z$  的单值函数, 并选用如下两个函数作为其分布函数的代表.

线性函数: 
$$\phi(z) = \phi_0 \left[ \frac{\phi_z}{\phi_0} (z - 1) + 1 \right].$$

三角函数: 
$$\phi(z) = \phi_0 \left\{ \frac{\phi_z}{\pi \phi_0} \sin[\pi(z - 1)] + 1 \right\}.$$

其中,  $\phi_z$  为孔隙率分布函数在上表面处的导数,  $\phi_0$  为上表面的孔隙率, 这里设定为 0.7. 上自由表面的表面张力设定为温度的线性函数, 即

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0),$$

其中,  $\sigma_0$  为流体在参考温度  $T_0$  时候的表面张力系数, 表面张力随温度的变化梯度  $\sigma_T$  设定为正数.

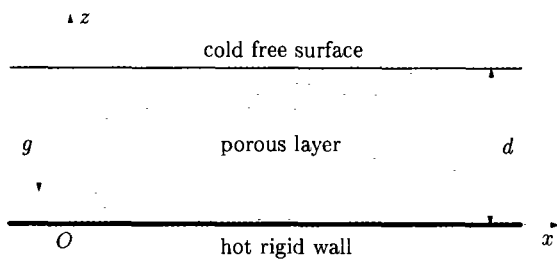


图 1 系统结构

Fig.1 Geometrical configuration

由于流体全部充满于多孔介质中, 因此, 可定义一个平均表面张力系数  $\sigma_m$ <sup>[1]</sup> 来描述这种情况.

$$\sigma_m = \frac{\int \sigma_1 dA_1 + \int \sigma_s dA_s}{\int dA_1 + \int dA_s}.$$

其中,  $A$  为面积. 对于各向同性多孔介质而言, 面孔隙率等于其体孔隙率  $\phi$ . 于是, 上式可以化为

$$\sigma_m = \sigma_1 \phi + \sigma_s (1 - \phi).$$

对任何表征流体性质的物理量而言, 其平均量都满足:

$$(\cdot)_m = (\cdot)_l \phi + (\cdot)_s (1 - \phi),$$

其中, 下角标  $m$  表示平均,  $l$  表示流体,  $s$  表示多孔介质骨架.

为了能够描述孔隙率不均匀时候的情况, 引入 Brinkman-Forchheimier 方程<sup>[2]</sup>, 并采用 Boussinesq 近似, 即流体的密度只随温度呈线性变化, 而且其效果只作用在体积力项. 方程如下:

$$\rho_0 \left[ \frac{1}{\phi} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\phi} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \left( \frac{\mathbf{v}}{\phi} \right) \right] = -\frac{1}{\phi} \nabla(\phi p) + \mu_e \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{v} - \rho_0 g [1 - \alpha(T - T_0)] \mathbf{e}_z.$$

多孔介质能量方程如下:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_r = \nabla(k_m \nabla T).$$

其中,  $\mu_e$  为流体在多孔介质中的有效动力学粘性系数. 引入扰动量  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}'$ ,  $p = p_r + p'$ ,  $T = T_r + T'$ , 代入方程, 并对方程进行无量纲化. 采用系统总体高度  $d$ , 温度差  $\Delta T$ ,  $d^2/\kappa_1$ ,  $\kappa_1/d$  分别作为长度、温度、时间和速度的特征参量. 消去压强项, 得到如下线性化扰动量方程 (已经去掉上标):

$$\begin{aligned} \phi^{-1} Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w &= \Lambda \left( \nabla^4 w + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w \right) - \\ Da^{-1} f_1 \left( \nabla^2 w + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) &+ Ra \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \\ Da^{-1} f_1 f_2 \left( \frac{1}{K} \frac{dK}{dz} \right) \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

能量方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + S f_3 f_4 w = SX^{-1} f_3 f_5 \nabla^2 T + f_6 \frac{\partial T}{\partial z}.$$

在上面公式中,

$$\begin{aligned} f_1 &= K[\phi(z)]^{-1} K(\phi_0), \\ f_2 &= \frac{1}{K[\phi(z)]} \frac{dK[\phi(z)]}{dz}, \\ f_3 &= \frac{(\rho_0 c_1) \phi_0 + (\rho_s c_s)(1 - \phi_0)}{(\rho_0 c_1) \phi(z) + (\rho_s c_s)[1 - \phi(z)]}, \\ f_4 &= -\frac{d}{\int k_m^{-1} dz}, \\ f_5 &= \frac{k_1 \phi(z) + k_s [1 - \phi(z)]}{k_1 \phi_0 + k_s (1 - \phi_0)}, \end{aligned}$$

$$f_6 = \frac{k_1 - k_s}{\kappa_1 \{(\rho_0 c_1) \phi(z) + (\rho_s c_s) [1 - \phi(z)]\}} \frac{d\phi(z)}{dz},$$

$$Pr = \nu_1 / \kappa_1, \quad \Lambda = \mu_e / \mu_1,$$

$$Da = K(\phi_0) / d^2, \quad Ra = \alpha g \Delta T d^3 / \nu_1 \kappa_1,$$

$$S = \rho_0 c_1 / [(\rho_0 c_1) \phi_0 + (\rho_s c_s) (1 - \phi_0)],$$

$$X = k_1 / [k_1 \phi_0 + k_s (1 - \phi_0)],$$

$Pr$  为 Prandtl 数,  $Ra$  为 Rayleigh 数,  $Da$  为 Darcy 数. 由于本文所研究的是纯 Marangoni 对流, 因此设定  $Ra = 0$ .

采用正则模式的方法<sup>[3]</sup>, 可以将方程的解按照如下形式进行分解:

$$\begin{bmatrix} w \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(z) \\ \Theta(z) \end{bmatrix} \exp(\lambda t + iax).$$

其中,  $W(z)$ 、 $\Theta(z)$  分别为纵向速度分量和温度的幅值, 并且是  $z$  的单值函数;  $a$  为方向的无量纲波数;  $\lambda$  为扰动量的时间增长因子 (复数). 动量方程和能量方程可以化为

$$\begin{aligned} & \Lambda \left[ (D^2 - a^2)^2 + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} D (D^2 - a^2) \right] W - \\ & Da^{-1} f_1 \left[ (D^2 - a^2) + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} D \right] W + \\ & Da^{-1} f_1 f_2 DW - a^2 Ra \Theta = \\ & \lambda \phi^{-1} Pr^{-1} (D^2 - a^2) W \\ & - S f_3 f_4 W + S f_3 f_5 X^{-1} (D^2 - a^2) \Theta + \\ & f_6 D \Theta = \lambda \Theta \end{aligned}$$

其中,  $D = d/dz$ . 这是一个六阶方程组, 需要给出如下六个边界条件.

$$\text{在 } z = 0 \text{ 处, } W = 0, \Theta = 0, DW = 0.$$

$$\text{在 } z = 1 \text{ 处, } W = 0, D\Theta = 0, D^2W + a^2 Ma \Theta = 0. \text{ 其中,}$$

$$Ma = - \frac{\partial \sigma_{m0}}{\partial T} \frac{d\Delta T}{\mu_e \kappa_1}$$

为多孔介质的 Marangoni 数<sup>[1]</sup>, 且  $\sigma_{m0}$  为多孔介质上表面的平均表面张力, 此处孔隙率为  $\phi_0$ .

为了与实验进行比较, 采用现实中的流体及其物理性质参数进行计算. 使用的流体为温度在 297.15 K 时的水, 其 Prandtl 数为 6.34. 多孔介质骨架由直径为 3 mm 的玻璃珠构成<sup>[4]</sup>. 这样的多孔介质其渗透系数  $K[\phi(z)]$  可以采用 Kozeny-Carman

关系式<sup>[5]</sup>得到, 有

$$K[\phi(z)] = \frac{d_0^2}{172.8} \frac{\phi(z)^3}{[1 - \phi(z)]^2}.$$

其中,  $d_0$  为玻璃珠的直径,  $\phi(z)$  为多孔介质的孔隙率. 整个多孔介质层的厚度取为 4 cm, 有效动力学粘性系数  $\mu_e$  与流体动力学粘性系数  $\mu_1$  之比  $\Lambda$  取为 1.0. 水和玻璃的物性参数如下 ( $\rho$  为密度,  $c$  为比热,  $\kappa$  为热扩散系数,  $\nu$  为运动学粘性系数).

$$\rho_0 = 0.997 \times 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

$$c_1 = 4.16 \times 10^3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)},$$

$$\kappa_1 = 0.145 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s},$$

$$\nu_1 = 0.919 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s},$$

$$\rho_s = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

$$c_s = 0.84 \times 10^3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)},$$

$$\kappa_s = 0.201 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

扰动量方程组及边界条件采用谱方法进行数值求解<sup>[6]</sup>, 这样问题就可以转化为两个矩阵的广义特征值问题, 其特征值就是时间增长因子, 而且此方法已经在过去的研究中应用过<sup>[7]</sup>, 故其可靠性是毋庸置疑的.

从图 2 可以看出, 无论孔隙率以线性还是三角形形式进行分布, 临界 Marangoni 数总是随  $\phi_z$  的增加而增加. 这可以理解为, 当  $\phi_z$  为正值时, 多孔介质层下部或中部的孔隙率都要比顶部小, 故系统的平均孔隙率要比孔隙率为  $\phi_0$  时的均匀多孔介质层要小. 从数值计算和物理经验都可以知道, 如果系统孔隙率越小, 其内部的流体流动就越不容易, 因而系统也就越稳定.

然而,  $\phi_z$  的变化对于系统失稳时的临界波数的影响却要复杂很多. 对于孔隙率线性分布的多孔介质系统, 临界波数随  $\phi_z$  的增加而呈基本单调增加. 但对于孔隙率三角分布的多孔介质而言, 当  $\phi_z < 0.5$  时, 临界波数有逐渐减小的趋势, 但变化非常缓慢. 而当  $\phi_z > 0.5$  时, 临界波数却陡然增加. 换言之, 临界波数随  $\phi_z$  变化的敏感程度是不相同的, 在  $\phi_z < 0.5$  时, 敏感度显得很弱, 而当  $\phi_z > 0.5$  时, 敏感性很强. 这种结论是无法通过均匀孔隙率多孔介质来研究的.  $\phi_z = 0.5$  是这个敏感程度变化的分界线. 其流场和速度幅值分布如图 3 所示.

流场和速度幅值分布如图 4~6 所示. 其中图 4 为孔隙率线性分布时的流场, 图 5 为孔隙率三角分布时的流场, 图 6 为相同  $\phi_z$  时不同的孔隙率分布

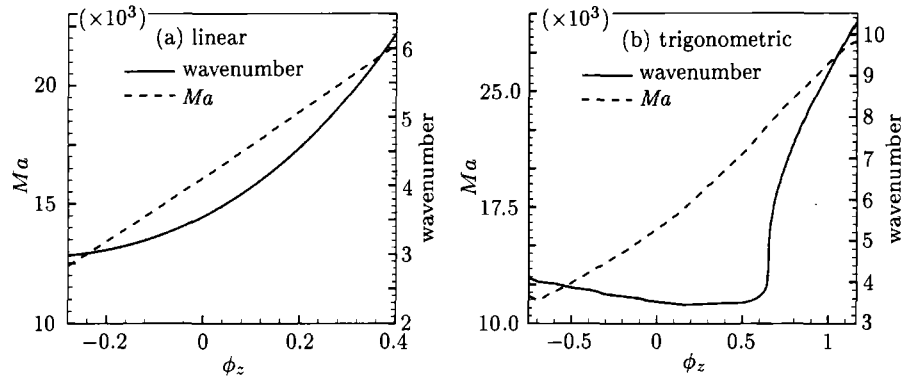


图 2 线性分布孔隙率和三角分布孔隙率的多孔介质中临界波数和临界 Marangoni 数的关系曲线  
 Fig.2 Critical wavenumber and Marangoni number vs  $\phi_z$  in the media where the distributions of porosity is linear (a) and trigonometric (b)

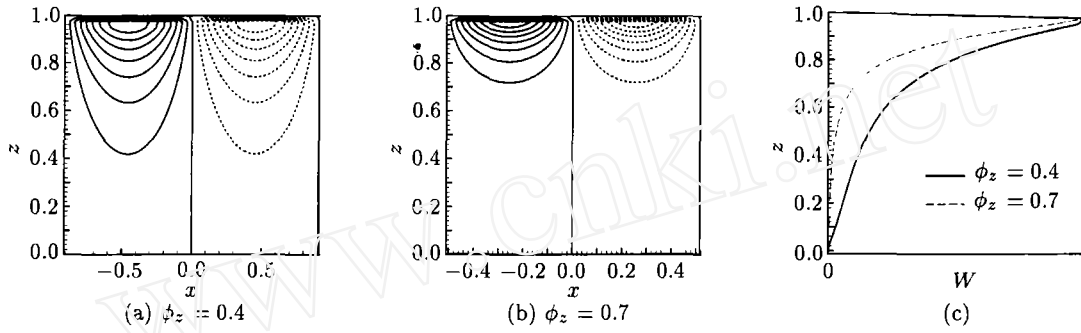


图 3 三角分布孔隙率多孔介质中在  $\phi_z = 0.5$  左右时流场 (a), (b) 及速度幅值分布情况 (c)  
 Fig.3 Streamline patterns (a), (b) and  $W$ 's distribution in the media where the porosity is trigonometrically distributed (c) around  $\phi_z = 0.5$

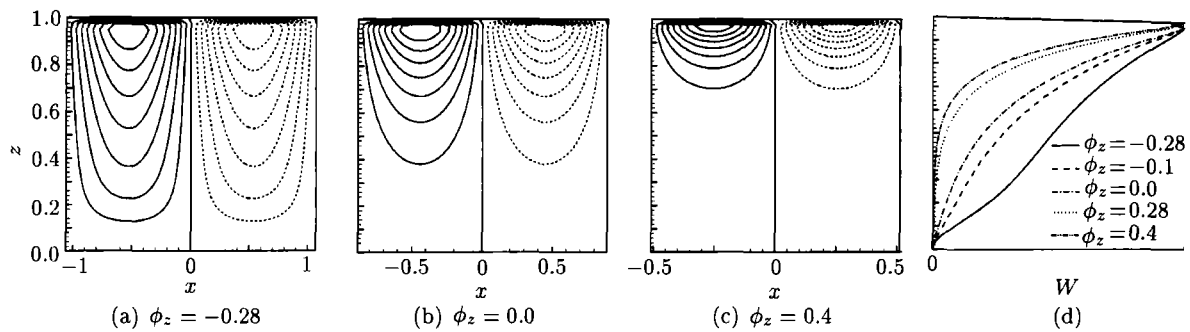


图 4 线性分布孔隙率的多孔介质中流型 (a), (b), (c) 及速度幅值分布 (d)  
 Fig.4 Streamline patterns (a), (b), (c) and  $W$ 's distribution of pure Marangoni convection (d) in the media with linearly distributed porosity

情况下速度幅值的比较. 可以看出, 无论孔隙率呈何种分布方式, 涡胞的中心 (速度幅值的峰值) 总是出现在系统上表面的附近, 所有的涡胞都是从表面上开始并向下渗透. 这是由于 Marangoni 对流不稳定性发生的机理造成的, 也就是只有上自由表面的温度扰动所引起的表面张力不均匀分布才能够被系统足够的温度差维持下去, 系统就会失稳, 对流就

会持续进行下去.

对于不同的  $\phi_z$ , 涡胞的渗透程度是不相同的. 当  $\phi_z < 0$  时, 涡胞的渗透性会更强一些. 这也是因为当  $\phi_z < 0$  时, 系统中部或底部的孔隙率要大一些, 而孔隙率越大, 系统就越不稳定, 流体流动起来也就越容易. 这与上面的结论是一致的.

与普通流体的 Marangoni 对流结果进行比较,

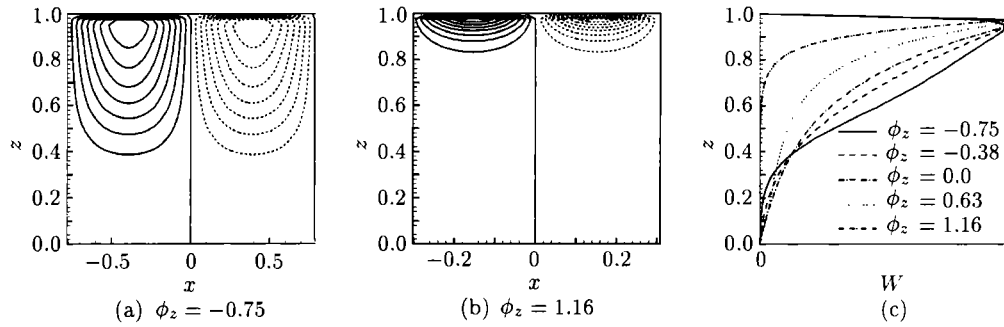


图 5 三角分布孔隙率的多孔介质中流型 (a), (b) 以及速度幅值分布 (c)

Fig.5 Streamline patterns (a), (b) and  $W$ 's distribution of pure Marangoni convection (c) in the media with trigonometrically distributed porosity

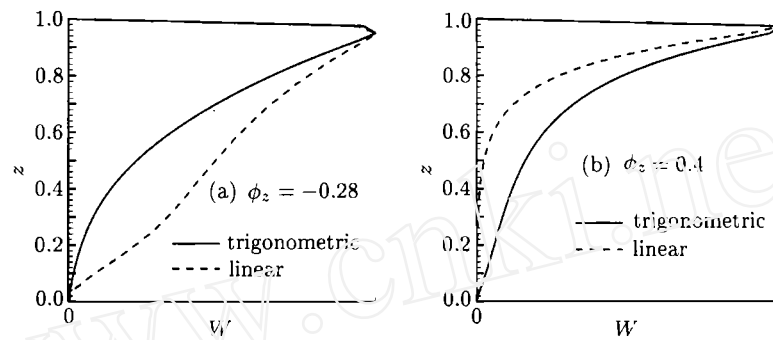


图 6 相同  $\phi_z$  下线性分布孔隙率与三角分布孔隙率的速度幅值比较

Fig.6 Comparison of  $W$ 's distributions of the same  $\phi_z$

不难发现, 尽管两者的涡胞形状类似, 但分布形式有比较明显的区别. 对于纯流体对流而言, 涡胞的中心尽管也位于系统中线  $z = 0.5$  的上部, 但只是偏离很少部分. 而多孔介质中的 Marangoni 对流, 涡胞中心却非常靠近系统上表面. 这是由于多孔介质在流体流动过程中提供了额外的阻力, 使得其动能更容易被消耗掉, 所以多孔介质内部涡胞的渗透性远远低于纯流体中涡胞的渗透性. 而且, 多孔介质的孔隙率越小, 其提供的额外阻力也就越大, 这样涡胞的渗透性也就越差.

### 3 结论

综上所述, 孔隙率变化率  $\phi_z$  的确对系统有着比较明显的影响. 这种影响不仅局限于系统的稳定性, 还对系统失稳后的流型及速度幅值分布有着明显的影响. 系统的稳定性 (Marangoni 数) 随  $\phi_z$  呈比较简单的单调变化规律, 而  $\phi_z$  对于临界波数的影响却比较复杂. 此外, 当  $\phi_z < 0$  时, 涡胞渗透得

比较深; 而当  $\phi_z > 0$  时, 系统失稳后的流动则基本局限于系统的中上部分.

### 参考文献

- [1] Hennenberg M *et al.* Porous media and the Bénard-Marangoni problem. *Trans. Porous Media*, 1997, **27**: 327~355
- [2] Nield D A *et al.* Convection in Porous Media (2nd ed). New York: Springer-Verlag Inc, 1998. 14~15
- [3] Colinet P *et al.* Nonlinear Dynamics of Surface-Tension-Driven Instabilities. Berlin: Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH, 2001
- [4] Chen F, Chen C F. Experimental investigation of convective stability in a superposed fluid and porous layer when heated from below. *J. Fluid Mech.*, 1989, **207**:311~321
- [5] Combarous M A *et al.* Hydrothermal convection in saturated porous media. *Adv. Hydrosci.*, 1975, **10**: 231~307
- [6] Orzag S A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 1971, **50**:689~703
- [7] Liu R *et al.* Vapor recoil effect on the vapour-liquid system with a deformable interface. *Chin. Phys. Lett.*, 2006, **23**(4):879~882