

圆形域内串列双柱振动诱导的 定常整流流动的数值模拟*

浦 群

中国科学院力学研究所, 北京 100080

摘要 本文在 $\epsilon \ll 1$ 和 $Re \rightarrow 0(1)$ 下采用贴体网格生成, 数值求解 NS 方程研究圆形域内串列等直径双柱作同频同相小振幅振动在静止粘性不可压缩流体中诱导的 Stokes 层外的定常整流旋涡流动。数值结果表明, 流场外边界的存在使大于临界雷诺数时外边界附近产生高阶分离旋涡, 在很小的整流雷诺数变化范围内造成整流流谱改变。串列双柱柱间距的增加及圆域对振动柱柱径比的减小都使发生高阶分离的临界整流雷诺数之值下降。

关键词 定常整流; 双柱振动; NS 方程数值求解

中图分类号 O 357. 1

0 引 言

不可压缩粘性流体与固体边界作相对小振幅简谐振动时, 由于粘性和惯性的非线性相互作用, 会在流场中诱导出二阶量的定常流动, 称为定常整流流动 (steady streaming)。这是一个典型的非线性问题, 在海洋地理学、水动力学、大气动力学、生物流体力学、声学、近海结构动力学等众多领域都存在这类小振幅振动引起的流体对流、传质、传热等现象, 其长期的积累效应往往是不可低估的。由于现象的特殊性和它的广泛存在, 一百多年来吸引了许多不同学科专家的关注, 取得了大量成果^[1-7]。Bertelsen 首先发现实验结果与无界流场中振动圆柱的理论解有很大偏差。Riley 的研究指出流场外边界的存在对流态有重要影响。研究还表明, 对整流流动有几个重要的无量纲参数:

$$\epsilon = U / a\omega, M = a(\omega/\nu)^{1/2}, Re = U a/\nu = \epsilon M^2, Rs = Re = \epsilon M^2 \quad (1)$$

其中 ϵ 为无量纲振幅, 有 $\epsilon \ll 1$; ω 是振动角频率; ν 为流体的运动粘性系数; U 是简谐振动速度的幅值; M 表示柱体特征尺度与粘性厚度之比; Re 是通常以 U 为特征速度的雷诺数; Rs 为定常整流雷诺数。当 $M \ll 1$ 时, 非定常振荡流和定常整流波及全流域, 当 $M \gg 1$ 时, 流体的非定常运动限于柱体表面厚度为 $O(\sqrt{\nu/\omega})$ 的 Stokes 层内, 在该层外缘存在非零的定常切向速度, 由此驱动层外流体的定常整流流动。对双柱或多柱振动诱导的整流流动, Zapryanov 等在 $\epsilon^3 \ll Re \ll 1$ 情况下对无界域中串列和并列双柱问题采用内外匹配渐近展开法进行了理论分析;

* 国家自然科学基金资助项目。

本文于 1997 年 12 月 20 日收到, 1998 年 8 月 5 日收到修改稿。

Ingham 和 Yan 等研究了无界域中平板、方柱和圆柱栅列诱导的定常整流流动。外部边界对多柱振动整流流动的影响如何尚未见到报导。本文研究 $\epsilon \ll 1$ 和 $Re_s \rightarrow 0(1)$ 情况下圆形外边界域中串列双柱振动诱导的 Stokes 层外的定常整流流动, 探讨外部边界及柱间距和整流雷诺数对流动的影响。

1 基本方程和数值方法

考虑如图 1 所示的在直径为 D_1 的圆柱域内有两个直径为 D_0 、相距为 L 的小圆柱。域内充满静止不可压缩粘性流体。小圆柱圆心位于 X 轴上, 并对 Y 轴对称分布。两个小圆柱沿 X 轴作同频同相的高频小振幅简谐振动: $X = U \sin \omega t$ 。由于 $Re_s \rightarrow 0(1)$, Stokes 剪切层很薄, 在考虑层外的定常整流流动时, 我们忽略 Stokes 层的厚度, 即将 Stokes 层外缘的切向定常整流速度取在内外圆柱的表面上。对 $Re_s \rightarrow 0(1)$, Stokes 层外的定常整流由 NS 方程描述。以 D_0 为特征长度, ω^{-1} 为特征时间, U 为特征速度无量纲化, 涡量-流函数形式的 NS 方程为

$$\begin{cases} u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re_s} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta \\ u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

边界条件为在内、外圆柱表面上满足

$$u_\tau = u_s, \quad u_n = 0 \quad (3)$$

上面 u_x, u_y, u_τ, u_n 分别表示 x, y 方向及物面切向和法向的速度分量, ψ 为流函数, ζ 为涡量, u_s 为物体表面 Stokes 层外缘的切向定常整流速度。根据 Rayleigh 整流定律, 有

$$u_s = -\frac{3}{4} \omega^{-1} u_e \frac{du_e}{ds} \quad (4)$$

u_e 为相应势流解在物面边界上的切向速度, s 为物面切向。

考虑到问题对 x 轴的对称性, 仅对上半平面进行计算。采用贴体坐标网格生成技术, 将 $y \geq 0$ 的物理平面域变换到如图 2 所示的计算平面矩形域。需要指出的是物理平面上的 C, D 两

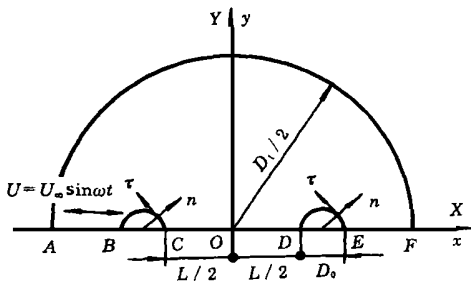


图 1 物理平面
Fig 1 Physical plane

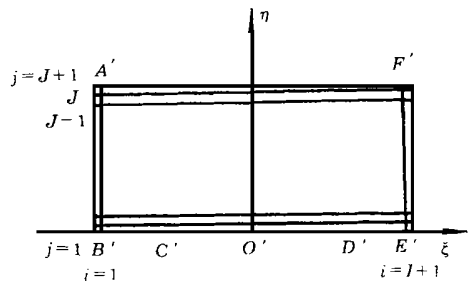


图 2 计算平面
Fig 2 Numerical plane

点本是角点, 变换到计算平面后角点不能保持, 故在该点处变换具有奇异性, 在该两点处网格密度亦较周围为粗。通过在整个求解域加密网格使该点处网格绝对尺度变小, 从而认为对后续计算影响有限。本文网格密度为 100×100 。

采用中心差分离散, 用 SOR 法求解相应问题的势流方程, 结合方程式 (3) 和 (4) 给出所论问题的边界条件。

在计算平面 (ζ, η) 内求解方程式 (2) 时, 对涡量方程采用时间相关算子分裂法。对涡量方程的粘性扩散项中的交叉导数项进行了适当处理, 避免了因其系数可正可负而不易构造稳定格式的问题。流函数方程的求解则采用中心差分格式, 用 SOR 法解得。

关于边界条件的处理, 本文采用了将切向速度边界条件直接嵌入流函数求解中去的处理方法, 使解出的流函数有满意的精度满足切向速度的边界条件。

2 算例和结果分析

典型的串列双柱在圆形有界域中诱导生成的整流旋涡流动的流函数计算结果如图 3 所示, 图题中 $d = D_1/D_0$ 为无量纲柱径比, $e = L/D_0$ 为无量纲柱间距。可以看到虽然流谱均由八个整流旋涡组成, 但依整流雷诺数不同可大致分为两种类型。图 3(a) 代表雷诺数不太高, 外边界影响不太大时的整流流动。各个旋涡的流动方向如图所示。在流场的中间沿 Y 轴有三个鞍点 P 、 O 以及下半平面中相应的 P 。这个结果与文献 [4] 低 Re_s 下的解析结果定性上一致, 不同的是由于外边界的存在, 在外边界上与振动柱内边界上相仿, 两个相邻的柱外旋涡在外边界上相会处形成流动的半鞍点, 图 3(a) 中外边界上共有四个半鞍点, 内边界上共有八个半鞍点, 在图中用黑圆点表示。这一典型流谱与我们在低雷诺数下观察到的流谱也基本一致, 参见图 4。图 3(b) 代表雷诺数大于一定值后的典型的流函数等值线分布。可以看到振动柱之间的旋涡有了很大的发展, 流场中间的鞍点 P 和 P 不再存在, 而外边界上的半鞍点则增加为八个, 流谱发生了较大改变。

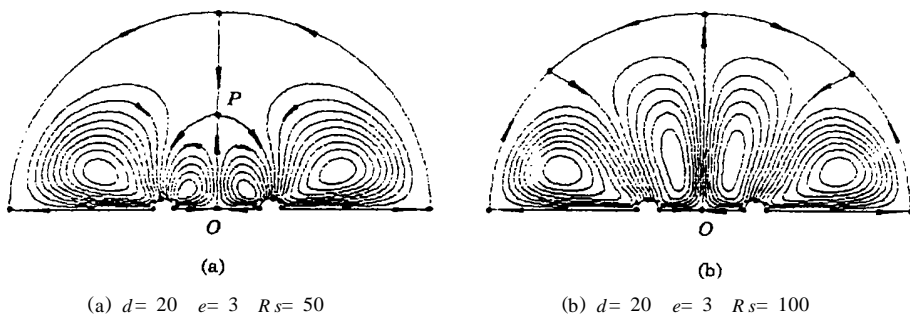


图 3 典型的定常整流流谱

Fig 3 Typical steady streamling flow pattern

为了探讨流谱随着整流雷诺数、柱间距和柱径比的改变是如何转换的, 我们首先在固定柱径比和柱间距的前提下进行了流函数图谱随 Re_s 变化的仔细计算。图 5 给出 $d = 20, e = 5$ 时定常整流流谱随 Re_s 的变化。可以看到, 当 Re_s 大于某一临界值时 (本算例中该临界值为 $Re_s = 55$),

外边界附近形成了高阶分离涡流, 这一现象与单柱振动中所见一致^[7]; 分离涡流与振动柱间



图 4 串列双柱振动整流实验流谱 ($d=20.5, e=4.5, R_s=3.79$)

Fig 4 Steady streamling flow pattern of two tandem oscillation circular cylinders

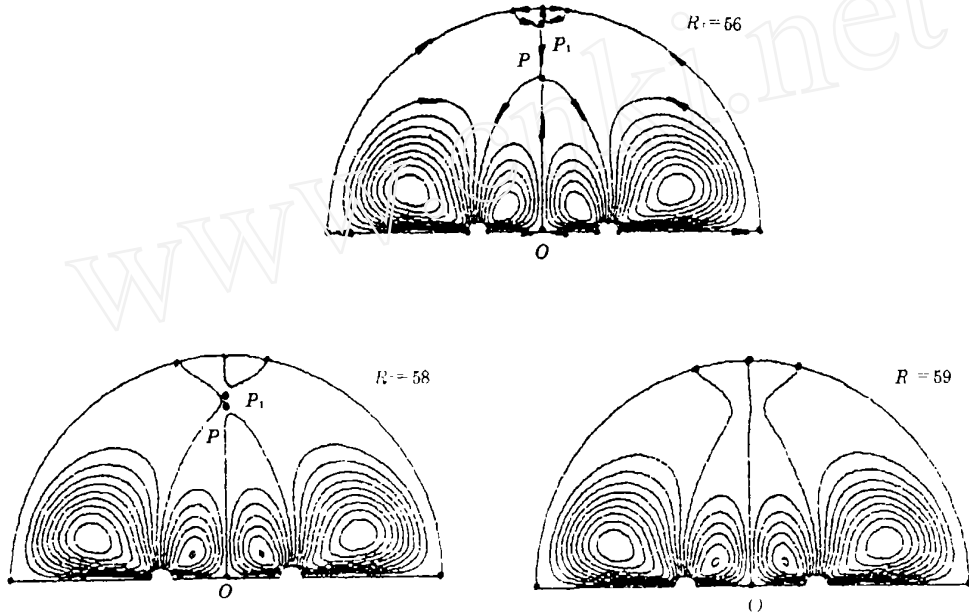


图 5 整流流谱的转换过程 ($d=20, e=5$)

Fig 5 Transition of the steady streamling flow pattern

的主阶整流旋涡随 R_s 的增加各自很快长大并相互靠近, 从而把振动柱外的主阶涡流推向两边。高阶分离旋涡的形成使外边界上的半鞍点由低雷诺数时的四个增加到八个, 流场中间的鞍点又增加了两个 P_1 和 P_1 。在高阶涡和柱间主阶涡发展过程中鞍点 P 和 P_1 相互靠近, 在算例中当 $R_s=58$ 时 P 和 P_1 几乎成为一点; 随着 R_s 继续增加, 高阶涡并入柱间主阶涡中, 流谱由 3(a) 到 3(b) 类型的转换完成。由此, 我们知道不同类型流谱的出现本质上是当外边界存在时, 外边界附近在某一临界整流雷诺数下形成高阶分离涡流的结果。从算例还可以看到, 两类不同流谱的转换发生在很小的整流雷诺数变化范围内, 对图 5 的算例, 临界雷诺数范围为 $R_{sc}=55 \sim 58$ 。

当柱径比固定,柱间距由大变小时,实质上是使外边界的影响减弱,因此会使流函数图谱产生切换的临界整流雷诺数提高。例如 $d=20, e=3, R_{sc}=85\sim 88$ 。

固定柱间距,减小柱径比,将使外边界影响加大,从而使临界整流雷诺数下降,我们对 $d=15$ 和 20 的算例验证了这个结论。

3 结 论

本文采用贴体坐标网格,在 $R_s \rightarrow 0(1)$ 下数值求解 NS 方程给出了圆形域内串列等径双柱作同频同相小振幅振动诱导的 Stokes 层外的定常整流旋涡流动。

随着 R_s 的增大,与单柱振动在有界域中诱导的整流流动相仿,在外边界附近流动发生分离,形成高阶分离涡流。高阶分离涡流与柱间主阶涡流靠近、合并,整流流谱发生较大变化发生在很小的 R_s 变化范围之内。

串列双柱柱间距的增加和圆域与振动柱柱径比的减小使外边界处发生高阶分离的临界整流雷诺数之值下降。

熊熬魁同学协助进行数值计算工作,作者深表感谢。

参 考 文 献

- 1 Rayleigh L. On the circulations of air observed in Kundt's tubes and on some allied acoustical problems. *Phil Trans*, 1883, A 175: 1~ 21.
- 2 Bertelsen A. An experimental investigation of high Reynolds numbers steady streaming generated by oscillating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 1974, 64(3): 589~ 597.
- 3 Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1975, 68(4): 801~ 812.
- 4 Zapryanov Z, Kozhoukhorova Zh, Jordanova A. On the hydrodynamic interaction of two circular cylinders oscillating in a viscous fluid. *J. Appl Maths Phys (ZAMP)*, 1988, 39: 204~ 220.
- 5 Yan B, Ingham D B, Morton B R. Streaming flow induced by an oscillating cascade of circular cylinders. *J. Fluid Mech.*, 1993, 252: 147~ 171.
- 6 Pattani P G, Olson M D. Force on oscillating bodies in viscous fluids. *Int J. Numer Meth. Fluids*, 1988, 7: 653~ 695.
- 7 浦群, 王玮. 小振幅振动圆柱在偏心圆域中诱导的二次定常旋涡流动. *空气动力学学报*, 1997, 15(1): 81~ 86.

Numerical Simulation of the Steady Streaming Flow Induced by Two Oscillating Tandem Cylinders in a Circular Container

Pu Qum

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080*)

Abstract A steady streaming vortex flow out of the Stokes layer is studied in this paper by the numerical simulation of NS equations in a fitted body grid with the conditions of $\epsilon \ll 1$ and $R_s = O(1)$. This flow is induced by two oscillating cylinders in an incompressible rest viscous fluid in the circular container. Two cylinders oscillate with the same diameter, same oscillating frequency and same phase at the condition of small amplitude and are arranged in tandem along x axis.

It is found that the secondary separated vortex flow is generated near the container wall due to the outer solid boundary of flow field if the streaming Reynolds number is larger than the critical Reynolds numbers. And streaming flow patterns can be changed in a very small range of the streaming Reynolds number.

The critical streaming Reynolds number becomes smaller at the larger distance between two cylinders or at the smaller diameter ratio of container and cylinder.

Key words steady streaming flow; two cylinders oscillation; numerical solution of NS equation