

# 电流密度因子及其分布规律

刘思远<sup>1,2</sup>, 刘俊杰<sup>1,2</sup>, 敖涛<sup>1,2</sup>, 白象忠<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 国家非线性连续介质力学重点实验室(LNM), 北京 100080;

2. 燕山大学建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 给出了具有裂纹的无限大导电薄板通入电流时, 裂纹尖端电流密度因子的表达式, 由电流密度与温度场的关系式进一步导出了电流密度因子与温度场的表达式. 通过算例, 描述了电流密度因子在裂尖附近的分布规律, 为电磁热效应裂纹止裂方法的应用打下了理论基础.

**关键词:** 导电薄板; 温度场; 电流密度因子; 裂纹止裂

在过去, 金属构件中产生的裂纹对工程的影响没有引起人们的足够重视, 所以在当时裂纹给人类造成的灾难与损失是不可估量的. 若能够很好地解决裂纹止裂问题, 则可以延长带有裂纹构件的工作寿命, 避免突然破坏带来的灾难. 所以, 裂纹止裂是目前工业生产和实际应用中迫切需要解决的问题. 研究表明: 利用电磁热效应来遏制裂纹扩展的方法是有效的方法之一.

本文在范华林的基础上, 给出了具有裂纹的无限大导电薄板通入电流时, 裂纹尖端电流密度因子的表达式, 由电流密度与温度场的关系式进一步导出了电流密度因子与温度场的表达式. 通过算例, 描述了电流密度因子在裂尖附近的分布规律, 为电磁热效应裂纹止裂方法的应用打下了理论基础. 本文提到的电流密度因子这一概念, 可用来表征裂纹尖端附近由于通入电流所产生的应力场的强弱程度, 可以得到电流密度因子与通入电流强度及裂纹尖端附近温度场之间的关系式, 由此可以按需要来控制通入的电流强度和产生的压应力场的大小, 使裂纹的止裂达到理想的效果.

## 1 电流密度场的解析

对带有裂纹其长度为  $2a$  的无限大金属薄板, 沿垂直于裂纹方向上通入强度为  $J_0$  的电流. 如图 1 所示. 由于裂纹的存在, 电流在裂纹尖端发生聚集, 形成强大的电流场. 设  $j_1$ ,  $j_2$  分别为  $x$ ,  $y$  方向的电流密度分量.

根据 Maxwell 方程  $J = E$  可得到<sup>[1-2]</sup>

$$j_1 = E_1 = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad j_2 = E_2 = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1)$$

收稿日期: 2004-02-24; 修订日期: 2004-06-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50275128)

作者简介: 刘思远(1981—), 男, 硕士研究生.

范华林, 陈平. 电磁热效应理论在薄板裂纹止裂技术中的应用. 兵工学报, 2004, (3) [待发表]

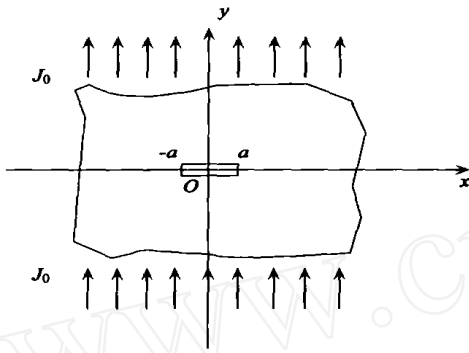


图1 带有中心裂纹的载流薄板

Fig. 1 Thin current-carrying plate with a middle-crack

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

将(2)式表达为极坐标形式,有:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \phi = 0 \tag{3}$$

设  $\phi(r, \theta, z) = r A(\theta)$  \tag{4}

其中  $A(\theta)$  是一个只与  $\theta$  有关的表达式. 将其代入(3)式,得

$$A''(\theta) + A(\theta) = 0 \tag{5}$$

其解为

$$A(\theta) = C \cos \theta + D \sin \theta \tag{6}$$

由边界条件:在  $\theta = 0$  处,  $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ ; 在  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  处,  $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ , 可求得

$$C = 0, \quad D = \frac{2n+1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

由此有:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+\frac{1}{2}} D_n \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \tag{7}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left( n + \frac{1}{2} \right) r^{n-\frac{1}{2}} \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) \theta, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left( n + \frac{1}{2} \right) r^{n-\frac{1}{2}} \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) \theta \tag{8}$$

取  $n = 0$ , 有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2} D_0 r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2} D_0 r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \tag{9}$$

由式(1)可以得到

$$j_1 = \frac{1}{2} D_0 r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad j_2 = -\frac{1}{2} D_0 r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \tag{10}$$

## 2 电流密度因子

由范华林<sup>[1]</sup>, 假设电流密度因子为

$$K_I = D_0 \sqrt{2} \tag{11}$$

将式(11)代入式(10)中得

$$j_1 = \frac{1}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2} r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad j_2 = -\frac{1}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2} r} \cos \frac{\theta}{2} \tag{12}$$

现利用复变函数解法求解电流密度因子<sup>[3]</sup>, 设

$$\phi = \phi(z), \quad z = x + iy \tag{13}$$

见第 121 页脚注

有 
$$j_2 = - \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial z} \quad (14)$$

根据裂纹边界条件:  $x = a$  时  $j_2 = 0$  而  $x = 0$  时  $j_2 = J_0$  及对称性, 选取

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{J_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (15)$$

对于式(15), 当  $y = 0, x < a$  时, 有  $z = x, z^2 - a^2 < 0$ . 即  $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$  只有虚部, 实部为 0. 当  $y = 0, x < a$  时,  $j_2 = 0$  及  $j_1 = 0$ . 因此由满足边界条件的式(12)式可得

$$K_j = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-2 \sqrt{2} r}{\cos \frac{\theta}{2}} j_2 \Big|_{\theta=0} \quad (16)$$

当  $y = 0$  时,  $z = x, r = x - a$  由(14)、(15)和(16)式可得到

$$K_j = \lim_{r \rightarrow a} \frac{-2 \sqrt{2} r(x - a)}{\sqrt{x^2 - a^2}} \frac{J_0 x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (17)$$

于是有 
$$K_j = - \frac{2J_0}{\sqrt{a}} \quad (18)$$

$$j_1 = - J_0 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad j_2 = J_0 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} r} \cos \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

### 3 热源功率的平均密度

裂纹附近的电流集中, 产生焦耳热, 其热源功率为<sup>[2-3]</sup>:

$$Q(r) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (j_1^2 + j_2^2) dx = \frac{1}{2} D_0^2 r^{-1} \quad (20)$$

其中,  $D_0 = \frac{K_j}{\sqrt{2}}$ . 将式(18)代入后得

$$Q(r) = \frac{J_0^2 a}{2r} \quad (21)$$

### 4 电流密度因子的分布规律

采用文献[3]所求出的温度场表达式:

$$T(x, y) = \frac{2hJ_0^2}{2} \left[ a + \frac{a}{2} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} \right] \left( \ln \sqrt{(a-x)^2 + y^2} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad (22)$$

若将坐标原点移到裂纹尖端处如图(2)所示, 经坐标变换为极坐标表达式为

$$T(r, \theta) = \frac{2hJ_0^2}{2} \left[ a + \frac{a}{2} \ln \frac{(a+r)^2}{(a-r)^2 + 2ar \cos \theta} \right] \ln \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta}} \quad (23)$$

由此有

$$J_0 = \frac{T}{\sqrt{2h} \left[ a + \frac{a}{2} \ln \frac{r}{a^2 + 2a} \right] \ln \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2a} \arccos \frac{a}{r}} \quad (24)$$

将其代入到式(18)中有

$$K_J = -2\sqrt{a} \frac{T}{\sqrt{2h} \left[ a + \frac{a}{2} \ln \frac{r}{a^2 + 2a} \right] \ln \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2a} \arccos \frac{a}{r}}} \quad (25)$$

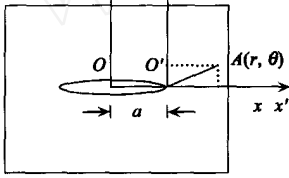


图2 坐标变换关系

Fig. 2 Relationship between the transform of coordinate

当通入适当的瞬间电流时,裂纹尖端处的金属会在瞬时熔化,形成焊口,使之曲率半径增大.通过对通入的电流  $J_0$  的控制,可以使裂纹尖端处熔化后的曲率半径增大到我们需要的尺寸,熔池周边的温度是金属的熔点温度.这样裂纹尖端抵抗外载荷的能力也可以提高到我们要求的程度,以此达到最佳止裂效果.

## 5 电流密度因子 $K_J$ 与应力强度因子 $K$

若在带有裂纹的金属板上,施加

以单向拉伸载荷,同时在与裂纹垂直的方向上通以电流  $J_0$ .由式(25)得到的电流密度因子  $K_J$  的表达式可以看出  $K_J$  必然是个负值,表达为应力场的形式  $K^T$  仍然也是一个负值,产生压应力场.通过  $J_0$  对  $K_J$  的影响,又利用  $K_J$  与  $K^T$  的关系,进而得到  $J_0$  对电流产生的压应力场的控制,将  $K^T$  与外载荷应力场的应力强度因子的表达式  $K$  相叠加后有

$$K^* = K^T + K \quad (26)$$

$K^*$  为总的裂纹强度因子,是描述裂纹尖端附近总的应力场强弱程度的参量.裂纹是会发生失稳扩展取决于  $K^*$  值的大小.由此可利用电磁热效应裂纹止裂时的断裂准则<sup>[4]</sup>

$$K^* \leq K_c \quad (27)$$

即可判断裂纹是否开裂.这里由于  $K^T$  的作用,使总的应力强度因子  $K^*$  与没有通入电流前的应力强度因子相比较,必然是变小了.  $K_c$  是断裂韧度,影响  $K_c$  的因素有很多,在这里  $K_c$  主要受温度的影响.在一定温度范围内,它是随着温度的升高而升高的.在通入瞬间电流后,裂尖处产生高温,薄板试件的温度也会随着有所升高,但并不显著,所以这时的  $K_c$  是要稍大于常温下的  $K_c$ ,虽然这里的  $K_c$  是无法具体确定的,但是温度升高后的薄板材料的安全系数要比常温时的有所提高.

## 6 算例与分析

两块带有裂纹的半无限大高速工具钢薄板,熔点为 1510,厚度为  $2h = 0.5\text{mm}$ ,裂

纹长度分别为  $2a = 20\text{mm}$  与  $2a = 24\text{mm}$ , 电导率  $\sigma = 0.55 \times 10^7 (\text{m})^{-1}$ , 热传导系数  $\lambda = 27.2 \text{W}/(\text{m} \cdot \text{C})$ . 分析计算该金属薄片上的电流密度因子  $K_J$  的分布规律. 其计算结果如图 3—5 所示.

图 3 给出的是通入不同瞬间电流值时, 电流密度因子  $K_J$  的变化规律. 可以发现在同一外界条件, 同一材料、裂纹长度一定的情况下,  $K_J$  与通入的瞬间电流  $J_0$  是成正比的. 通入的瞬间电流越大电流密度因子的值就越大, 在裂尖形成的压应力场就越大. 图中的两条曲线是不同裂纹长度通入瞬间电流  $J_0$  时电流密度因子  $K_J$  的变化规律的比较. 可见, 在其他条件不变的情况下, 达到同一确定的  $K_J$  值, 长度  $a = 12\text{mm}$  的裂纹所需通入的瞬间电流强度要比长度  $a = 10\text{mm}$  的裂纹小.

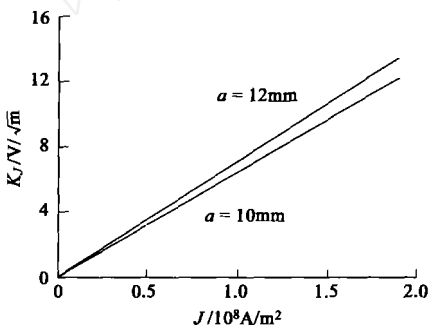
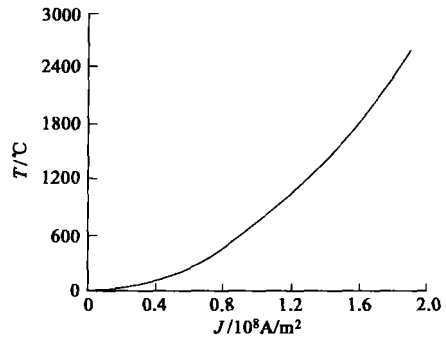
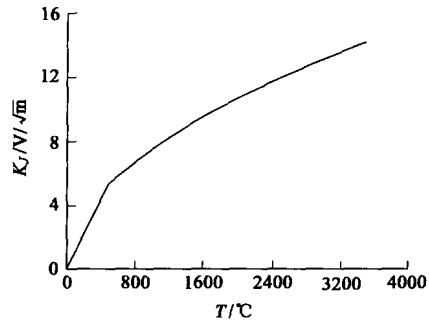
图 3  $K_J \sim J$  曲线Fig. 3 Curve  $K_J \sim J$ 图 4  $T \sim J$  曲线Fig. 4 Curve  $T \sim J$ 

图 4 表示的是  $a = 10\text{mm}$  时, 温度场  $T$  随瞬间电流  $J_0$  的变化规律. 此图说明  $T$  是随  $J_0$  按非线性规律变化的, 通入的电流  $J_0$  值越大其温度  $T$  越大, 裂尖处形成的应力场越强.

图 5 表示的是  $a = 10\text{mm}$  时温度场  $T$  对电流密度因子  $K_J$  的影响的变化规律. 由图可见, 裂尖处的温度越高, 裂尖处的电流密度因子  $K_J$  就越大, 因而形成的压应力场就越大, 止裂效果就越显著. 但不能产生过热而达到金属的升华温度  $T_{\text{升}}$ . 所以, 温度场  $T$  应该控制在  $T_{\text{熔}} < T < T_{\text{升}}$  范围内, 达到最佳的止裂效果.

图 5  $K_J \sim T$  曲线Fig. 5 Curve  $K_J \sim T$ 

## 7 结论

本文给出了电流密度因子在极坐标下的表达式和与温度场的关系. 通过控制通入电流强度的变化来控制温度场及电流密度因子的变化, 进而就可以控制由温度变化所产生的压应力场的变化. 为进一步建立电磁热效应裂纹止裂时的断裂准则和工程应用打下了基础.

## 参考文献

- [1] 毕德显. 电磁场理论[M]. 北京:电子工业出版社, 1985:210-212  
Bi Dexian. Theory of electromagnetic field[M]. Press of Electric Industry, Beijing, 1985:210-212
- [2] 白象忠, 胡宇达, 谭文峰. 电磁热效应裂纹止裂研究的进展[J]. 力学进展, 2000, 30(4):546-557  
Bai Xiangzhong, Hu Yuda, Tan Wenfeng. Advance of the study of crack prevention by the electromagnetic heat effect [J]. Advances in Mechanics, 2000, 30(4):546-557
- [3] 胥红敏, 白象忠, 付宇明, 等. 单边裂纹通电瞬间裂尖处应力场的复变函数解[J]. 力学季刊, 2002, 23(3):362-368  
Xu Hongmin, Bai Xiangzhong, Fu Yuming, et al. The solution of a stress field around the side-crack tip using functions of complex variable undergone a transient current [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2002, 23(3):362-368
- [4] 丁遂栋. 断裂力学[M]. 北京:机械工业出版社, 1997:91-93  
Ding Suidong. Fracture mechanics[M]. Press of Mechanical Industry, Beijing, 1997:91-93

## Electric Current Density Factor and it's Distribution

LIU Siyuan<sup>1,2</sup>, LIU Junjie<sup>1,2</sup>, AO Tao<sup>1,2</sup>, BAI Xiangzhong<sup>1,2</sup>

(1. The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical (LNM), Beijing 100080, China;

2. Institute of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

### Abstract

The electric current density factor near the crack tip was determined in a thin current-carrying plate with a middle-crack. Through the relationship between the electric current density and the temperature field, the expression of the electric current density factor and the temperature field was deduced. As an example, the distribution of the electric current density factor near the crack tip was described. This work is the fundamental theory on crack arresting by application of electrothermal effect.

**Keywords:** thin current-carrying plate; temperature field; electric current density factor; crack arresting