

[文章编号] 1001-246X(2004)02-0131-06

摄动有限体积法重构近似高精度的意义

高 智, 向 华, 申义庆

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

[摘 要] 研讨有限体积(FV)方法重构近似高精度的作用问题. FV方法中积分近似采用中点规则为二阶精度时, 重构近似高精度(精度高于二阶)的意义和作用是一个有争议的问题. 利用数值摄动技术^[1,2]构造了标量输运方程的积分近似为二阶精度、重构近似为任意阶精度的迎风型和中心型摄动有限体积(PFV)格式. 迎风PFV格式无条件满足对流有界准则(CBC), 中心型PFV格式为正型格式, 两者均不会产生数值振荡解. 利用PFV格式求解模型方程的数值结果表明: 与一阶迎风和二阶中心格式相比, PFV格式精度高、对解的间断分辨率高、稳定性好、雷诺数的适用范围大, 数值地“证实”重构近似高精度和PFV格式的实际意义和好处.

[关键词] 计算流体力学; 有限体积方法; 摄动有限体积方法

[中图分类号] O35 [文献标识码] A

0 引言

在计算流体力学(CFD)、数值传热学(NHT)中,有限体积(FV)方法是最主要的实用方法,它在CFD/NHT软件中得到了普遍的应用.但一般认为它的精度不如有限差分方法和有限元方法的精度高.这是因为FV方法是二级近似:积分近似和插值(或称重构)近似.积分近似常取中点规则,具有二阶精度,精度高于二阶的积分近似需要过多的基点,因此很难使用.精度高于二阶的重构近似需要同时使用相邻和较远的控制单元,对非结构网格(特别是三维情况)重构近似为高精度的格式既复杂又难构造.何况当积分近似为二阶精度时,重构近似的精度再高、FV格式的整体精度仍为二阶.因此重构近似高精度的FV格式并不多见.摄动有限体积(PFV)方法^[1,2]的提出,使我们有可能构造节点数与一阶迎风和二阶中心有限体积格式一致,即积分近似精度为二阶但重构近似为任意阶精度的PFV格式.由于PFV格式的整体精度理论上仍为二阶,此外还应当强调,在FV方法中积分方程对任一小体积单元列出,因此使用更多基点明显偏离积分方程的数学规定,物理含义也不清楚.看来构造的高精度FV格式应以维持三基点为前提.摄动有限体积格式^[1,2]在维持三基点不动的前提下,把重构近似的精度提高到了任意阶,但由于PFV格式中积分近似使用了中点规则,PFV格式的整体精度理论上仍为二阶.因此首先需要弄清楚重构近似高精度和PFV格式的实际效果和好处.本文构造了标量输运方程的PFV格式,通过一维和二维标量输运问题的典型算例,分析并数值地证实了重构近似高精度和PFV格式的好处和意义.

1 高精度摄动有限体积(PFV)格式

考虑标量输运方程

$$\int_S \mathbf{u} \phi \cdot \mathbf{n} ds = \int_S \phi \cdot \mathbf{n} ds + S_d v, \quad (1)$$

从方程(1)的一阶迎风有限体积格式

$$[(\phi \cdot \mathbf{s})_f - \min(\dot{m}_f, 0) \phi_f - \max(\dot{m}_f, 0) \phi_p] + v_p S_p = 0 \quad (2)$$

出发,对界面通量数值 \dot{m}_f 作摄动处理,即把 \dot{m}_f 展开成相邻控制体中心连线距离 $|d_j|$ 的幂级数,参见图1,再利用空间分裂技术,并利用方程本身推导出幂级数的系数;对相邻控制体中心连线近似垂直于界面的情况,获

[收稿日期] 2003-01-27; [修回日期] 2003-08-15

[基金项目] 国家自然科学基金(10272106)资助项目

[作者简介] 高智(1937-),男,山西祁县,研究员,从事流体和计算流体力学方面的研究.

得积分近似为二阶精度而重构近似为任意阶精度的迎风型和中心型摄动有限体积(PFV)格式,它们分别为

$$j \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)!} (R_{\bar{f}})^n \left[\frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} - \frac{1}{2} m_{\bar{f}} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(n+1)!} R_{\bar{f}}^n \right] (\phi_{jP} - \phi_P) + V_P S_P = 0 \quad (3)$$

和

$$j \sum_{n=0}^M \frac{1}{(2n+1)!} R_{\bar{f}}^{2n} \left[\frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} - \frac{1}{2} m_{\bar{f}} \sum_{n=0}^{2M+1} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} R_{\bar{f}}^n \right] (\phi_{jP} - \phi_P) + V_P S_P = 0, \quad (4)$$

其中 $m_{\bar{f}} = \text{sign} \dot{m}_{\bar{f}}, R_{\bar{f}} = \dot{m}_{\bar{f}} |d_j| / S_j, V_P$ 是控制单元的体积。

2 摄动有限体积(PFV)格式的性质

由 PFV 格式的推导过程可知,PFV 格式修正微分方程的截断误差首项对迎风 PFV 格式(3)为 $O(R_{\bar{f}}^{N+1})$ 阶,对中心 PFV 格式(4)为 $O(R_{\bar{f}}^{2M+2})$ 阶;因此迎风 PFV 格式(3)的重构近似精度为 $(N+1)$ 阶,中心 PFV 格式(4)的重构近似精度为 $(2M+2)$ 阶.在迎风 PFV 格式(3)中令求和上限 $N=0$,格式(3)简化为一阶迎风有限体积(UFV)格式.与一阶 UFV 格式一样,所有高阶迎风 PFV 格式无条件满足对流有界准则^[3],均不会产生数值振荡解.在中心型 PFV 格式(4)中令求和上限 $M=0$,并略去含 $R_{\bar{f}}$ 的项,格式(4)简化为二阶中心有限体积(CFV)格式,当网格雷诺数约大于 2 时,二阶 CFV 格式产生数值振荡解.当 $M=1$ 时,格式(4)为正型 PFV 格式,事实上,由于

$$\frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} - \frac{1}{2} m_{\bar{f}} \sum_{n=0}^{2M+1} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} R_{\bar{f}}^n = \frac{d_j \cdot S_j}{2|d_j|^2} \left[2 - R_{\bar{f}} \sum_{n=0}^{2M+1} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} R_{\bar{f}}^n \right] \approx \frac{d_j \cdot S_j}{2|d_j|^2} (1 + e^{-R_{\bar{f}}}), \quad (5)$$

在(5)式中对 $e^{-R_{\bar{f}}}$ 的偶数阶展开和对 $R_{\bar{f}}$ 的任意值,均有 $(1 + e^{-R_{\bar{f}}}) > 1$,所以中心型 PFV 格式(4)的二阶、四阶、六阶...偶数阶均为正型格式,一维情况下即为 TVD 格式.在时间前进积分中,正型格式不会产生振荡解^[4].此外应指出,相邻体积元基点 P 和 $jP(j=1,2,3)$ 到相邻界面不等距离的 PFV 格式与等距离之 PFV 格式完全一致,这是高精度 PFV 格式的一个突出优点.PFV 方法中相邻基点到相邻界面往往为不等距情况,而不等距时高精度格式往往比等距高精度格式复杂许多,例如不等距摄动有限差分(PFD)格式比等距 PFD 格式的数值精度高,但格式要复杂许多^[5,6].

3 数值算例

3.1 无源项一维对流扩散问题

方程(1)中令 $S=0$,用 PFV 格式(4)的定常及时间相关法作了计算.计算条件为 $u=10.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}, \nu=0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, R_d=100, \phi(0)=\phi_A=1, \phi(1)=\phi_B=0$.解析解 $\phi - \phi_A = (\phi_B - \phi_A) (e^{100x} - 1) (e^{100} - 1)^{-1}$.计算结果参见图 2.

从图 2 可以看出,在网格雷诺数 $R=3$ 时,普通的二阶 CFV 格式给出振荡解,而二阶和四阶中心型 PFV 格式在 R 大时仍能给出很好的结果.在网格雷诺数 $R=2$ 时,二阶 PFV 的计算结果也比二阶 CFV 格式好,四阶和六阶 PFV 格式的结果几乎与精确解相同,格式精度越高效果越好,且随精度的提高,适用的雷诺数范围越大.

图 3 给出了网格雷诺数 $R=5$ 和 10 时,二阶、四阶、六阶和八阶中心型 PFV 格式的计算结果,格式精度越高,计算结果与精确解符合越好.

迎风型二阶 PFV 格式的效果明显优于中心型二阶 PFV 格式和普通一阶 UFV 格式,高于二阶的迎风型 PFV 格式效果有进一步提高,参见图 4.其计算条件分别为 $u=2.5$ 和 $10.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ 两种情况,相应的雷诺数 $R_d=25$ 和 100,第 1 和第 2 种情况分别取了 5 和 10 个计算点,网格雷诺数 R 分别为 5 和 10.

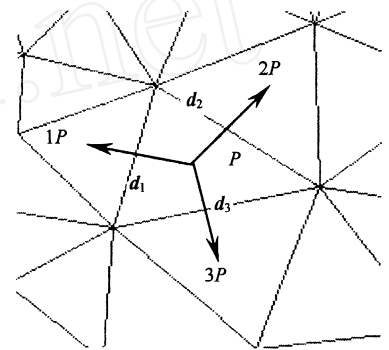


图 1 Delaunay 三角剖分网格

Fig. 1 Two-dimensional grids by Delaunay triangulation method

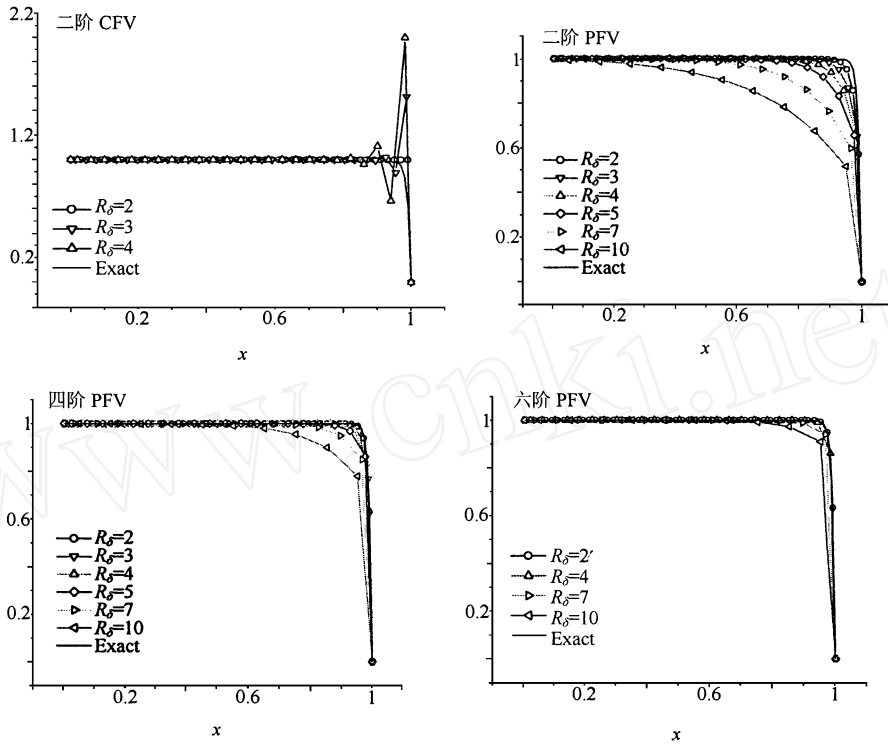


图 2 一维对流扩散方程 CFV 和中心型 PFV 格式数值结果的比较

Fig. 2 Numerical solutions of various central PFV schemes and second-order CFV scheme for one-dimensional convective-diffusion equation

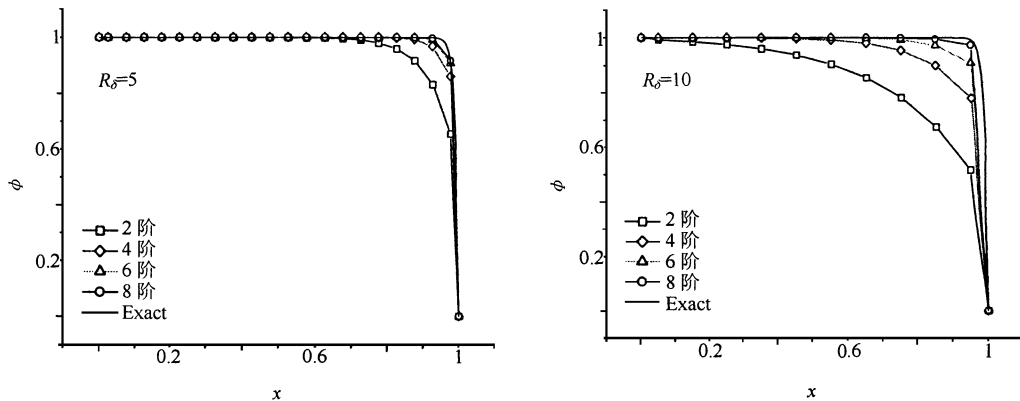


图 3 在相同网格雷诺数下提高 PFV 格式重构近似精度的结果

Fig. 3 Numerical solutions of central PFV schemes with different accurate order for grid Reynolds numbers $R = 5$ and 10

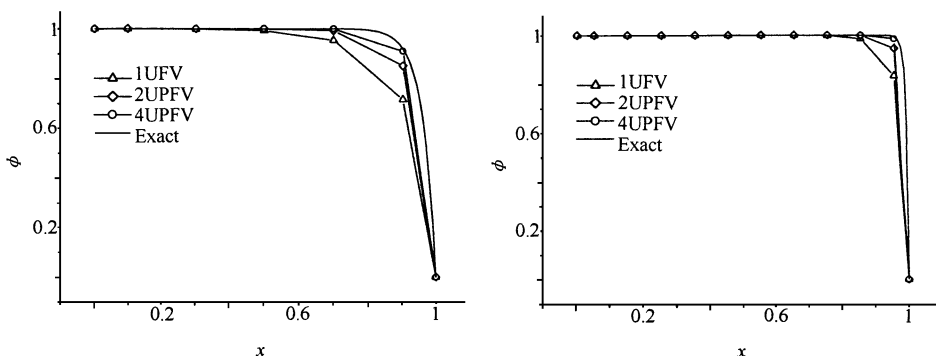


图 4 二阶迎风 PFV 格式与二阶中心 PFV 格式及一阶迎风 (UFV) 格式结果之比较

Fig. 4 Numerical solutions of second-order upwind and central PFV schemes and first-order upwind UFV scheme

3.2 Burgers 方程

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

边界条件

$$u(0) = u_A = 1, \\ u(1) = u_B = -1.$$

解析解 $u = \tanh[0.5 Re (0.5 - x)]$.

利用定常和时间相关法分别用二阶、四阶、六阶、八阶和十阶中心型 PFV 格式对 Burgers 方程进行了计算,这里取 $R_d = 10^3$,网格雷诺数 $R = 22$,一些计算结果参见图 5. 这样高的网格雷诺数,一般格式很难获得有效的结果. 中心型 PFV 格式可以做到完全无振荡,而且可以看出重构近似的精度越高,结果越好. 说明对线性以及非线性标量输运问题,重构近似高精度同样具有改进数值精度、提高分辨率、提高解的稳定性和扩大雷诺数适用范围的实际效果和好处(参见图 6).

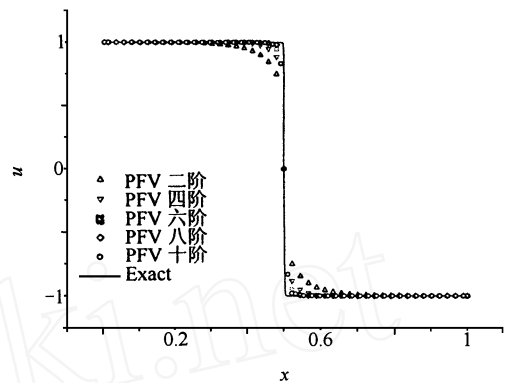


图 5 Burger 方程各阶中心型 PFV 格式数值解之比较
Fig. 5 Numerical solutions of various central PFV schemes for Burgers equation

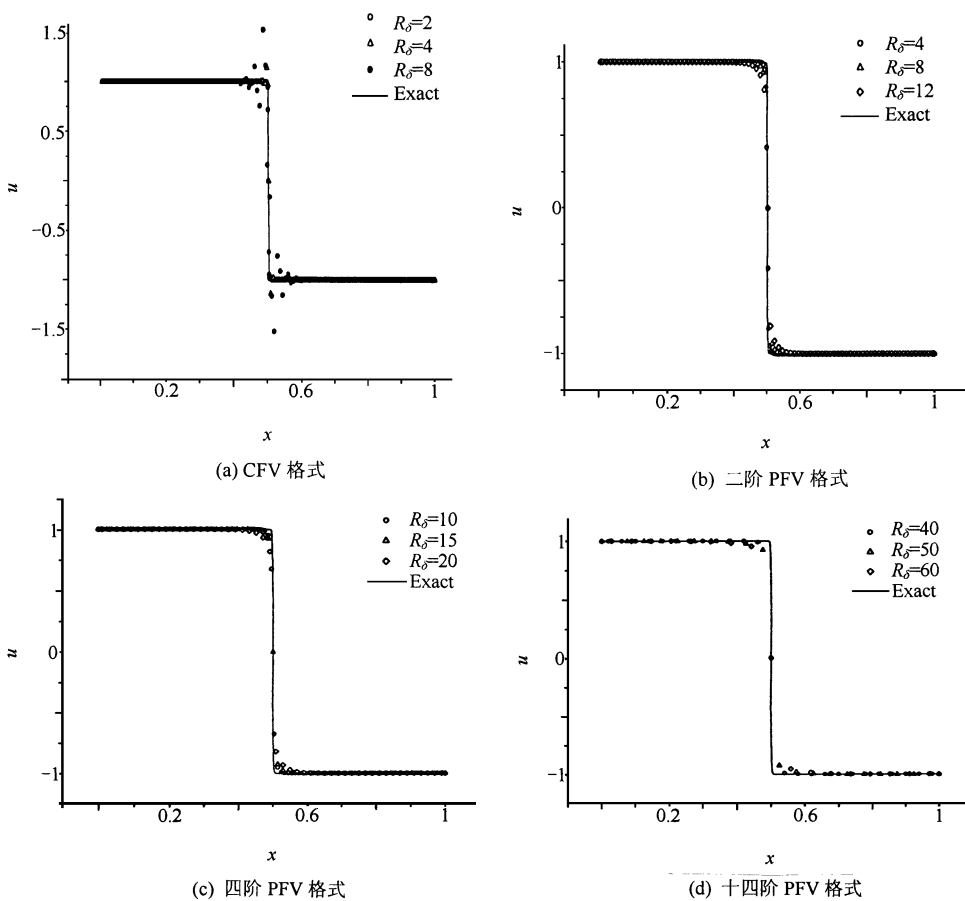


图 6 CFV 和 PFV 格式所能计算的最大网格雷诺数

Fig. 6 Numerical estimation of maximum grid Reynolds numbers R given by second-order CFV and PFV schemes

3.3 二维标量输运问题

控制方程为(1),其中 $S = 0$. 计算区域是如图 7 所示的边长为 1 的正方形区域. 已知驻点 ($x = y = 0$) 邻域流动的流场解为 $u = x, v = -y$. 边界条件为入口 ($y = 1$), $\phi = 0$; 固壁 ($x = 0$), ϕ 为线性分布 $\phi = 1 - y$; $y = 0$, 标量输运满足对称条件, $\partial \phi / \partial y = 0$; 出口 ($x = 1$), $\partial \phi / \partial x = 0$.

对于大的 ϵ 值,扩散引起的输运作用明显;小的 ϵ 值,对流作用占优.对 $\epsilon = 1.0$, $\nu = 0.001$,图 8 给出了网格划分为 40×40 控制体(CV)时二阶 PFV 格式计算的 ϕ 等值线分布.在西部固壁边界附近, ϕ 的梯度很大,如果计算网格较粗,用 CFV 格式会引起强烈振荡而使大多数迭代不能收敛,如果用 GS 和 TDMA 方法^[7,8]迭代,网格雷诺数均不能大于 3.而采用 PFV 格式,在网格划分为 10×10 CV(网格雷诺数的范围为 10 到 100)时均无振荡,仍给出收敛解.虽然 UFV 也有收敛解,但误差较大.例如网格为 80×80 CV 时,西边固壁边界($x = 0$)处的扩散通量,二阶 PFV 格式的误差为 0.5%,而一阶 UFV 格式误差为 4.0%.

图 9 对比了 UFV、CFV 和 PFV 格式计算固壁边界处扩散通量的数值结果.其中 CFV 是 Ferziger-Peric^[7]给出的结果,在粗网格下得不到收敛解. PFV 格式在粗网格下也有收敛解,而且精度也比 UFV 格式高.

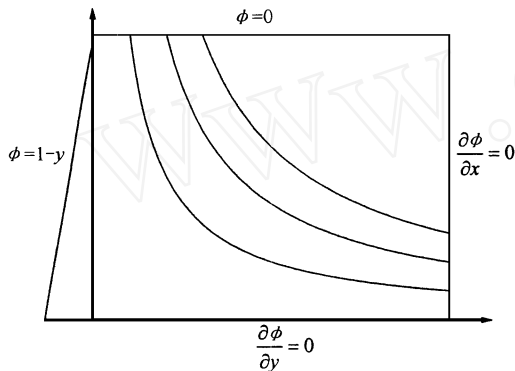


图 7 计算区域和边界条件

Fig. 7 Geometry and boundary conditions

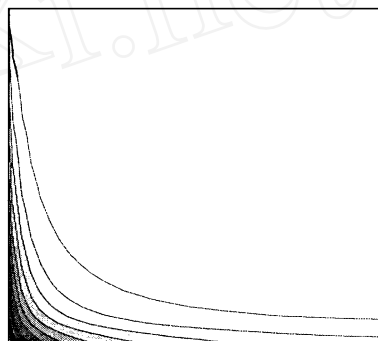


图 8 phi 的等值线

Fig. 8 Isolines of the transported quantity phi

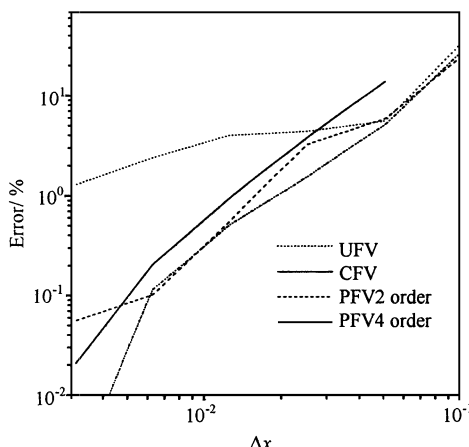
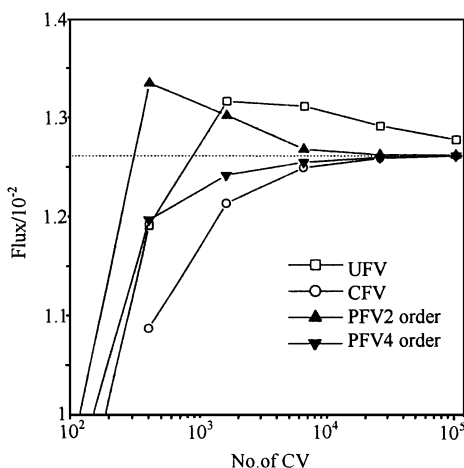


图 9 各格式计算固壁边界扩散通量的收敛性和误差

Fig. 9 Convergence of total flux of phi through the west wall (left) and the error in computed flux as a function of grid spacing, for nu = 0.001

4 结论

有限体积(FV)方法为两级近似:积分近似和重构近似.本文给出了一种积分近似为二阶精度、重构近似精度为任意阶的摄动有限体积(PFV)格式,所有高阶迎风型 PFV 格式无条件满足对流有界准则,所有偶数阶中心型 PFV 均为正型格式.求解标量输运方程的数值试验表明 PFV 格式精度高,捕捉间断好,稳定性好,容易得到收敛解,适用的网格雷诺数范围大,数值地证实重构近似高精度和 PFV 格式具有实际应用价值.

[参 考 文 献]

[1] Gao Zhi. Perturbational finite volume method—a numerical-value perturbation treatment of solving convective diffusion integral equation [A]. ICM2002-Beijing, Satellite Conference on Scientific Computing, 2002.

- [2] 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积方法及讨论 [A]. 第十一届全国计算流体力学会议论文集 [C]. 河南洛阳, 2002. 20 - 26; 力学学报.
- [3] Darwish M S. A new high-resolution scheme based on the normalized variable formulation [J]. Numerical Heat Transfer, Part B, 1993, **24**: 353 - 371.
- [4] 李荫藩, 宋松和, 周铁. 双曲守恒律的高阶、高分辨有限体积法 [J]. 力学进展, 2001, **31**(2): 245 - 263.
- [5] 高智, 李明军, 朱力立. 对流扩散方程的变步长摄动有限差分格式 [A]. 第十一届全国计算流体力学会议论文集 [C]. 河南洛阳, 2002. 36 - 41.
- [6] 高智. 摄动有限差分方法研究进展 [J]. 力学进展, 2000, **30**(2): 200 - 214.
- [7] Ferziger J H, Peric M. Computational methods for fluid dynamics [M]. 2nd edit. Springer, 1999.
- [8] Versteeg H K, Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method [M]. Essex: longman Scientific & Technical, 1995.

Significance of Higher-order Accuracy Reconstruction Approximation and Perturbational Finite Volume Method

GAO Zhi, XIANG Hua, SHEN Yi-qing

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract: The perturbational finite volume (PFV) scheme has the same terse formulation as the first-order upwind scheme. However, PFV scheme is a mixed one in which the integration approximation is of second order accuracy and the reconstruction (or interpolation) approximation is of higher order. PFV scheme is still of second order accuracy in theory. The practical effect and benefit offered by higher-order reconstruction approximation in the upwind and central PFV schemes are verified numerically in this paper.

Key words: computational fluid mechanics; finite-volume method; perturbational finite volume method