

# 具有中心裂纹载流薄板拉伸时的应力强度因子

敖 涛<sup>1,3</sup>, 白象忠<sup>1,3</sup>, 郑 坚<sup>1,2</sup>, 刘俊杰<sup>1,3</sup>, 刘思远<sup>1,3</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 国家非线性连续介质力学重点实验室 (LNM), 北京 100080; 2. 中国人民解放军军械工程学院一系, 河北 石家庄 050003; 3. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 采用复变函数的方法, 通过保角变换, 推导出具有中心穿透裂纹导电薄板在通入电流和拉应力共同作用下, 裂纹尖端附近的应力强度因子。并结合算例利用断裂判据来衡量电热效应的止裂效果, 为裂纹止裂打下理论基础。

关键词: 中心穿透裂纹; 拉应力; 电流; 应力场; 综合应力强度因子

中图分类号: 0346.1 文献标识码: A

## 0 引言

本文在文献 [1-5] 及求解裂纹尖端应力场的基础上, 提出了中心穿透裂纹的载流薄板在拉应力与通电电流共同作用下的应力强度因子。其中, 在通入电流瞬间, 由于电热效应在裂纹尖端产生的应力场与机械载荷作用下的应力场是分别考虑的。由电流产生的应力场定义了电热应力强度因子的表达式, 与机械载荷引起的应力场所定义的应力强度因子叠加。得到了电流与拉应力共同作用下的应力强度因子, 再利用断裂判据来衡量电热止裂的效果。

## 1 热应力场的复变函数表示

图 1 所示带有机械载荷的中心裂纹的导电薄板, 通入与裂纹成 $\beta$ 角的电流。

由文献 [1] 可以确定 $\zeta$ 平面内的应力函数表达式如下:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_z = 2 \times (\phi(\zeta) + \overline{\phi(\zeta)}) = 4 \operatorname{Re} \phi(\zeta) \\ \sigma_y - \sigma_z + 2i\tau_{yz} = 2 \times [\overline{\zeta} \phi(\zeta) + \psi(\zeta)] \end{cases} \quad (1)$$

其中在 $\zeta$ 平面,  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 为域中的调和函数。

由参考文献 [2],  $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ 可以下式确定:

$$\begin{cases} \phi(\zeta) = A \ln \zeta \\ \psi(\zeta) = \overline{A} \ln \zeta + A \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2} \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $A = \frac{\alpha q G k E_s^2}{2\lambda} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ ,  $q(x, y) = \frac{2hJ_s^2}{\sigma} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4}}$  为热源功率密度,  $G$  为材料的剪切弹性模量,  $k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  为平面应力情形,  $E_s = \frac{\alpha}{4}$ ,  $\nu$  为材料的泊松比,  $\alpha$  为线胀系数,  $\sigma$  为电导率,  $J_s$  为电流密度 [6]。

利用映射函数 [7]:

$$z = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) \quad (3)$$

得

$$\zeta = \frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1} \quad (4)$$

则有

$$\begin{cases} \phi(\zeta) = A \ln \left( \frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1} \right) \\ \psi(\zeta) = \overline{A} \ln \left( \frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1} \right) + A \frac{z^2 - az \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1}}{a^2 - z^2 + az \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1}} \end{cases} \quad (5)$$

由此得出

$$\begin{cases} \sigma_{x1} + \sigma_{y1} = -4\text{Re}\phi(z) \\ \sigma_{y1} - \sigma_{x1} + 2i\tau_{xy1} = 2 \times [\bar{z}\phi'(z) + \psi'(z)] \end{cases} \quad (6)$$

在式(6)中,  $\sigma_{x1}$ 、 $\sigma_{y1}$ 、 $\tau_{xy1}$ 表示电流在Z平面上产生的应力。通过进一步计算得到:

$$\begin{cases} \sigma_{x1} + \sigma_{y1} = -4A\text{Re} \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\ \sigma_{y1} - \sigma_{x1} + 2i\tau_{xy1} = 2A \left[ \frac{z\bar{z}}{\sqrt{z^2 - a^2}(z - a^2) + \sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] \\ \quad + 2A \left[ \frac{-2a^2z + a^2\sqrt{z^2 - a^2} + a^2z^2}{(a^2 - z^2 + z\sqrt{z^2 - a^2})^2} \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] \end{cases} \quad (7)$$

在原有的x-y平面基础上,建立以裂纹的右端点为原点的极坐标系(r, θ),则 $z = a + r\cos\theta + ir\sin\theta$ ,将其代入式(7)中,即可得到极坐标r和θ表示的 $\sigma_{x1}$ 、 $\sigma_{y1}$ 、 $\tau_{xy1}$ 的表达式。

通过化简得到:

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} + \sigma_{y1} &= -2A\sqrt{\frac{\cos\theta}{ar}} \\ \sigma_{y1} - \sigma_{x1} + 2i\tau_{xy1} &= \frac{A}{2r} \sqrt{\frac{\sqrt{\sin^8\theta + (\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1 - 4\sin^2\theta)^2 + \sin^6\theta}} - \frac{A\sqrt{r}(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta)}{4} + \left\{ \frac{A\sqrt{r}\sin\theta}{4} + \frac{A}{2r} \sqrt{\frac{-\sin^4\theta + \sqrt{\sin^8\theta + (\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1 - 4\sin^2\theta)^2 + \sin^6\theta}} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

解得:

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} &= -A\sqrt{\frac{\cos\theta}{ar}} - \frac{A}{4r} \sqrt{\frac{\sqrt{\sin^8\theta + (\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1 - 4\sin^2\theta)^2 + \sin^6\theta}} + \frac{A\sqrt{r}(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta)}{8r} \\ \sigma_{y1} &= -A\sqrt{\frac{\cos\theta}{ar}} + \frac{A}{4r} \sqrt{\frac{\sqrt{\sin^8\theta + (\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1 - 4\sin^2\theta)^2 + \sin^6\theta}} + \frac{A\sqrt{r}(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta)}{8r} \end{aligned}$$

$$\frac{A}{4r} \sqrt{\frac{\sqrt{\sin^8\theta + (\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1 - 4\sin^2\theta)^2 + \sin^6\theta}}$$

$$\frac{A\sqrt{r}(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta)}{8r}$$

$$\tau_{xy1} = \frac{A\sqrt{r}\sin\theta}{8r} +$$

$$\frac{A}{4r} \sqrt{\frac{-\sin^4\theta + \sqrt{\sin^8\theta + (\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1 - 4\sin^2\theta)^2 + \sin^6\theta}} \quad (9)$$

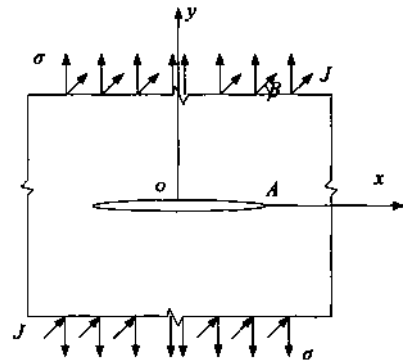


图1 带有机载中心裂纹的载流薄板

Fig. 1 Plate with a penetrated linear crack under the action of current and stress

## 2 拉应力在裂尖处产生的应力场的复变函数表示

在拉应力作用下的裂尖处的应力场表达式<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} \sigma_{x2} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{y2} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy2} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (10)$$

$\sigma$ 为作用在板边缘垂直裂纹走向的拉应力。

## 3 应力场的叠加

把两个应力场叠加,可以得到总的应力场 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ 如下:

$$\sigma_x = \sigma_{x2} + \sigma_{x1} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & A\sqrt{\frac{\cos\theta}{ar}} - \frac{A}{4r}\sqrt{\frac{\sqrt{\sin^8\theta+(\sin\theta\cos\theta-4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1-4\sin^2\theta)^2+\sin^6\theta}} + \\
 & \frac{A\sqrt{r}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)}{8r} \\
 \sigma_r = \sigma_{\theta 2} + \sigma_{\theta 1} = & \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) - \\
 & A\sqrt{\frac{\cos\theta}{ar}} + \frac{A}{4r}\sqrt{\frac{\sqrt{\sin^8\theta+(\sin\theta\cos\theta-4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1-4\sin^2\theta)^2+\sin^6\theta}} - \\
 & \frac{A\sqrt{r}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)}{8r} \\
 \tau_{xy} = \tau_{xy 2} + \tau_{xy 1} = & \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} - \frac{A\sin\theta\cos\theta}{8r} + \\
 & \frac{A}{4r}\sqrt{\frac{-\sin^4\theta+\sqrt{\sin^8\theta+(\sin\theta\cos\theta-4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1-4\sin^2\theta)^2+\sin^6\theta}} + \\
 & \frac{A\sqrt{r}\sin\theta}{8r} \tag{11}
 \end{aligned}$$

4 应力强度因子

复合应力场的应力强度因子为<sup>[8]</sup>：

$$\sigma_r = \frac{K_{I_s}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{12}$$

把 $\sigma_r$ 代入得：

$$\begin{aligned}
 K_{I_s} = & \frac{\sigma_r\sqrt{2\pi r}}{\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)} = \sigma\sqrt{a\pi} + \\
 & \frac{-A\sqrt{\frac{\cos\theta}{ar}} - \frac{A}{4r}\sqrt{\frac{\sqrt{\sin^8\theta+(\sin\theta\cos\theta-4\sin^3\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta(1-4\sin^2\theta)^2+\sin^6\theta}}}{\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)} \cdot \\
 & \sqrt{2\pi r} + \frac{[A\sqrt{r}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)]\sqrt{2\pi r}}{\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)} \tag{13}
 \end{aligned}$$

$K_{I_s}$ 命名为综合应力强度因子。

5 算例分析

一内部含有长度为  $2a=20$  mm 的中心穿透裂

纹，由 T7 钢制成的试件。已知试件的长度为  $l=60$  mm，宽度  $D=40$  mm，弹性模量  $E=2.0\times 10^{11}$  Pa，泊松比  $\nu=0.35$ ，线膨胀系数  $\alpha_r=11.2\times 10^{-6}$  m/(m· )，磁导率  $\mu=7.5\times 10^{-3}$  H/m，表面放热系数  $\beta_s=11.2\times 10^{-6}$  W/(m<sup>2</sup>· )， $G=79\times 10^9$  Pa<sup>[9]</sup> 传热系数  $\alpha_s=1.1\times 10^5$  m<sup>2</sup>/s，电导率  $\sigma^*=5.9\times 10^6$  (Ω·m)<sup>-1</sup>。向板内垂直裂纹方向通入密度为  $J_s\approx 6.2\times 10^5$  A/m<sup>2</sup> 的电流，T7 的  $K_{Ic}=39$  MPa·m<sup>1/2</sup><sup>[10]</sup>，外加机械载荷  $\sigma=200$  MPa。

可得应力强度因子  $K_{I_s}=32.6$  MPa·m<sup>1/2</sup>，当不考虑电流作用时  $K_{I_s}=35.4$  MPa·m<sup>1/2</sup>，两数值都小于  $K_{Ic}=39$  MPa·m<sup>1/2</sup>，可见在电流作用下  $K_{I_s}$  下降许多。图 2 表示综合应力强度因子与所通电流的平方值成反比，随着电流值的增大，综合应力强度因子随着减小。

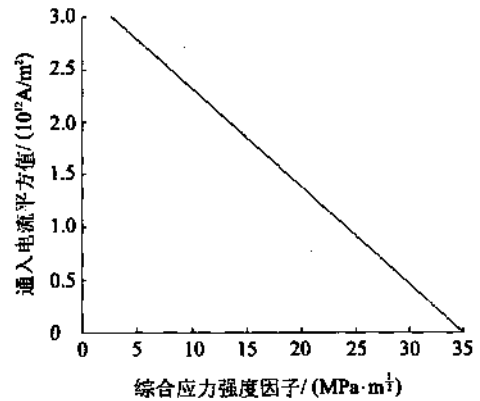


图 2  $K_{I_s} \sim J_s^2$  曲线

Fig. 2 Cure of  $K_{I_s} \sim J_s^2$

6 结论

1) 在两应力场叠加的基础上，可以推导出综合应力强度因子  $K_{I_s}$ 。

2) 在给出的具体算例中，得出  $K_{I_s}$  远小于  $K_{Ic}$ ，从而证实了制止裂纹扩展是可以实现的。可以把这理论推广到工程技术应用之中。

参考文献

[1] 徐芝纶. 弹性力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 118-154.  
 [2] Norio Hasebe, Kenji Tamai, Takuji Nakamura. Analysis of Kinked Crack under uniform heat flow [J]. J of Engineering Mechanics, 1986,112: 31-42.  
 [3] Fu Y M, Bai X Z, Qiao G Y, et al.. Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating [J]. Materials Science and Tech-

- nology, 2001,17: 1653-1656.
- [4] Bai xiangzhong, Fu YuMing, Zheng LiJuan, Gao Diankuei. Experimental research on electromagnetic Heating effects to stop crack propagation in metal components [A]. Third International Conference on Experimental Mechanics [C], 2001: 257-260.
- [5] Wang P, Tian Z G, Bai X Z. Electrothermal stress in conductive body with collinear creaks [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechaninc, 2003,40: 187-195.
- [6] Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами [M]. Киев. Наукова думка. 1983: c16-43,78-90.
- [7] 周光炯, 严宗毅, 许世雄, 章光本. 流体力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 265-321.
- [8] 范天佑. 断裂理论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 73.
- [9] 工程材料实用手册编辑委员会. 工程材料实用手册 (1) [M]. 北京: 中国标准出版社, 1988: 451.
- [10] 刘宝琛. 实验断裂损伤力学测试技术 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1994: 314.

## Stress intensity factor in current-carrying plate with central penetrated linear crack under action of loading

AO Tao<sup>1,3</sup>, BAI Xiang-zhong<sup>1,3</sup>, ZHENG Jian<sup>1,2</sup>, LIU Jun-jie<sup>1,3</sup>, LIU Si-yuan<sup>1,3</sup>

( 1. The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical (LNM), Beijing 100080, China; 2. Dept.of Artillery Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang, Hebei 050003, China; 3. College of Architecture Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: By using complex function and adopting conformal transformations, from a central hole thin plate to the plate with a penetrated linear crack under the action of current and stress, proceed to derive the stress intensity factor around the crack tip. At same time, giving the concrete example and evaluating the effect. So that we can lay the theoretical foundation for prevention of the expend of crack.

Key words: central penetrated linear crack; stress; current; stress field; the compound stress intensity factor