

文章编号: 1000-1301(2004)05-0017-03

修正算子 B_0^0 的物理含义解释

周正华^{1,2}, 廖振鹏¹

(1. 中国地震局工程力学研究所, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要: 本文依据球面波传播原理和介质阻尼效应解释了修正算子的物理含义, 解释结果表明加修正算子 B_0^0 后的多次透射公式考虑了介质的几何扩散特性, 或引入了介质的阻尼特性。最后, 通过分析比较, 指出基于球面波传播原理的物理解释更符合实际。

关键词: 球面波; 阻尼效应; 修正算子; 多次透射公式

中图分类号: P315.915

文献标识码: A

The interpretation of physical implication of modified operator B_0^0

Zhou Zhenghua^{1,2}, Liao Zhenpeng¹

(1. Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: In this paper, the physical implication of modified operator B_0^0 is interpreted based on the theory of spherical wave propagation and damping effect of medium, and results show that modified multi-transmitting formula take geometric decay into account, or introduces damping effect of medium. Finally, it is pointed that physical interpretation based on the theory of spherical wave propagation is of more practical meaning.

Key words: spherical wave; damping effect; modified operator; multi-transmitting formula

前言

笔者在文献[1]中, 基于对双曲型偏微分方程数值解稳定性的 GKS (Gustafsson, Kreiss and Sundström) 准则的物理解释^[2,3], 结合波动的解耦数值模拟方法^[4,5]从理论上详细阐明了多次透射公式 (Multi-Transmitting Formula, 简记为 MTF)^[6] 飘移失稳的机理, 提出了在波动数值模拟中消除多次透射公式飘移失稳的一个简单措施, 即在 MTF 算子中加上修正算子 B_0^0 的简便处理方法, 并用波源问题的数值试验检验了建议的稳定措施的有效性。本文在文献[1]基础上, 以球面波传播原理和介质阻尼效应对修正算子 B_0^0 的物理含义进行了分析。分析结果表明, 加修正算子 B_0^0 的 MTF 考虑了介质的几何扩散特性, 或引入了介质的阻尼特性。

1 修正算子 B_0^0 的物理含义

考虑由点源 S 产生的球面波以波速 c 向外传播 (如图 1 所示), 设有两观测点 A 和 B , 且观测点 A 距点源

收稿日期: 2004-07-15; 修订日期: 2004-08-26

基金项目: 国家自然科学基金项目 (50178065); 国家社会公益研究专项 (2002DIB30076); 国家“九七三”攻关项目 (2002CB412706); 地震科学联合基金项目 (101066)

作者简介: 周正华 (1962-), 男, 研究员, 博士, 主要从事地震工程研究。

S 的距离为 r_0 , 观测点 距点源 S 的距离为 $r_0 + r$ 。若已知点 A 的位移为 $u_A(t)$, 则由球面波传播原理可得点 的位移为^[7]

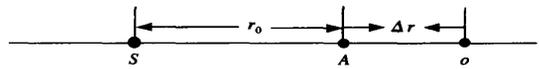


图 1 源点和观测点示意图

$$u(t) = u_A(t - \frac{r}{c}) \quad (1)$$

式中 是介质几何扩散因子, 且

$$= \frac{r_0}{r_0 + r} = \frac{1}{1 + r/r_0}$$

令 $\bar{r} = r/r_0$, 则 $= 1/(1 + \bar{r})$ 。

由文献[1]可知, 加修正算子 B_0^0 的 MTF 可表示为

$$\left[(1 + \bar{r}) B_0^0 - B_1^1 \right]^N u_0^{p+1} = 0 \quad (2)$$

其中, B_m^n (m, n 为任意整数) 为向后移动算子^[8], 其定义为 $B_m^n u_j^p = u_{j+m}^{p-n}$, 且这一移动算子满足运算规则 $B_m^n B_s^r = B_{m+s}^{n+r}$ 。

利用移动算子 B_m^n 的定义及其运算规则可将式

(2) 展开得

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N \frac{u_j^{p+1-j}}{(1 + \bar{r})^j} \quad (3)$$

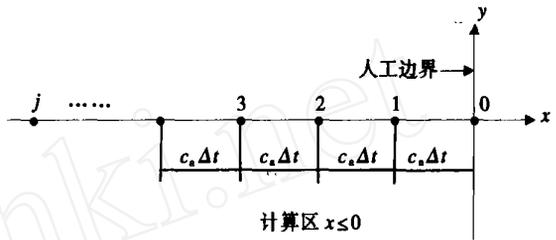


图 2 人工边界节点 o 及 MTF 中计算点位置示意图

其中, N 为透射阶数, $u_j^p = u(p t, -j c_a t)$ (p, j 为任意整数) 表示人工边界节点或内节点 (如图 2 所示) 在 $p t$ 时刻的位移, t 为时间步距, c_a 为人工波速, $C_j^N = N! / [(N-j)! j!]$ 。

与 MTF 比较可知, 加修正算子 B_0^0 的 MTF 在用内点位移外推人工边界点的位移时, 应将内点位移乘以相应的因子。

为讨论简便起见, 且不失一般性, 取式 (3) 中的 $N=2$, 则得

$$u_0^{p+1} = \frac{2}{1 + \bar{r}} u_1^p - \frac{1}{(1 + \bar{r})^2} u_2^{p-1} \quad (4)$$

将式 (4) 改写成

$$u_0^{p+1} = \frac{1}{1 + \bar{r}} u_1^p + \frac{1}{1 + \bar{r}} \left(u_1^p - \frac{1}{1 + \bar{r}} u_2^{p-1} \right) \quad (5)$$

经简化, 式 (5) 亦可表示成

$$u_0^{p+1} = u_1^p + u_0^{p+1} \quad (6)$$

式中

$$u_1^p = \frac{1}{1 + \bar{r}} u_1^p \quad (7)$$

$$u_0^{p+1} = \frac{1}{1 + \bar{r}} u_1^p \quad (8)$$

且

$$u_1^p = u_1^p - u_2^{p-1} \quad (9)$$

$$u_2^{p-1} = \frac{1}{1 + \bar{r}} u_2^{p-1} \quad (10)$$

式 (6) 为加修正算子 B_0^0 的二阶 MTF 另一表达形式, 与文献[6]的式 (22) 等价。将式 (7)、式 (8) 和式 (10) 与式 (1) 比较可以看出, 入射波和误差波均以球面波形式传播, 其几何扩散因子 均等于 $\frac{1}{1 + \bar{r}}$ 。由此可以看出, 加修正算子 B_0^0 的 MTF 考虑了介质的几何扩散特性。

下面仍以二阶 MTF 为例给出加修正算子 B_0^0 的 MTF 另一物理解释。取 MTF 中的 $N=2$, 则有^[6]

$$u_0^{p+1} = 2 u_1^p - u_2^{p-1} \quad (11)$$

设

$$u_j^p = e^{-\mu p} u_j^p \quad (12)$$

其中 $e^{-\mu p}$ 为引进的阻尼因子。根据式(12)的假设,式(11)可改写为

$$e^{\mu(p+1)} u_0^{p+1} = 2e^{\mu p} u_1^p - e^{\mu(p-1)} u_2^{p-1}$$

经整理得

$$u_0^{p+1} = 2e^{-\mu} u_1^p - e^{-2\mu} u_2^{p-1} \quad (13)$$

令

$$e^{-\mu} = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (14)$$

则有 $\mu = \ln(1 + \alpha)$ 。

将式(14)代入式(13)可得

$$u_0^{p+1} = 2 \frac{1}{1 + \alpha} u_1^p - \frac{1}{(1 + \alpha)^2} u_2^{p-1} \quad (15)$$

由此导出了与式(4)完全等价的加修正算子 B_0^0 的 MTF,由此可解释为加修正算子 B_0^0 的 MTF 引入了介质的阻尼特征。

综上所述,加修正算子 B_0^0 后的 MTF 引入了介质对波的吸收机制。同时,第 2 种解释给笔者以启发:能否通过适当地引入与质点运动速度成比例的阻尼来消除多次透射公式的飘移失稳。对于这一问题有待以后进行研究。

2 结语

比较上述两种物理含义的解释,笔者认为第一种解释更符合实际。在近场波动问题中,无论是波源问题还是散射问题,大多为三维问题,其波场均可视为由若干球面波叠加而成,因此,波的传播具有几何扩散特性。对于第二种解释,在完全线弹性介质中阻尼因子是人为引入的,无实际物理意义。此外,即使介质存在阻尼,认为阻尼因子模拟了介质的阻尼特性,但从假定条件式(11)可以看出,对于不同的计算时间步波的衰减不同,且随 p 的取值越大,波的衰减越快,这与由实际介质阻尼引起的衰减不符。

参考文献:

- [1] 周正华,廖振鹏. 消除多次透射公式飘移失稳的措施[J]. 力学学报,2001,33(4):550~554
- [2] B. Gustafsson, H-O Kreiss, A Sundström. Stability theory of difference approximation for mixed initial boundary value problems[J]. Math Comp, 1972, 26(119):649~686.
- [3] Higdon RL. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equations[J]. Mathematics of Computation, 1987, 49(179):65~90.
- [4] Liao ZP. A decoupling numerical simulation of wave motion[A], Dynamic Soil-structure Interaction[C]. Elsevier, Amsterdam, 1998. 125~140.
- [5] 廖振鹏. 近场波动问题的有限元解法[J]. 地震工程与工程振动,1984,4(2):1~14.
- [6] 廖振鹏. 工程波动理论导引[M]. 北京:科学出版社.
- [7] Aki K, Richard PG. Quantitative Seismology, Theory and Methods[M]. USA:W. H. Freeman and Company, 1980.
- [8] Liao ZP. Extrapolation non-reflecting boundary conditions[J]. Wave Motion, 1996,24:117~138.