

# 全机绕流 Euler 方程多重网格分区计算方法

兰黔章<sup>1</sup>, 吕晓斌<sup>2</sup>

(1. 上海交通大学动力与能源工程系, 上海 200030; 2. 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要:** 全机三维复杂形状绕流数值求解只能采用分区求解的方法, 本文采用可压缩 Euler 方程有限体积方法以及多重网格分区方法对流场进行分区计算。数值方法采用改进的 van Leer 迎风型矢量通量分裂格式和 MUSCL 方法, 基于有限体积方法和迎风型矢量通量分裂方法, 建立一套处理子区域内分界面的耦合条件。各个子区域之间采用显式耦合条件, 区域内部采用隐式格式和局部时间步长等, 以加快收敛速度。计算结果飞机表面压力分布等气动特性与实验值进行了比较, 二者基本吻合。计算结果表明采用分析“V”型多重网格方法, 能提高计算效率, 加快收敛速度达到接近一个量级。根据全机数值计算结果和可视化结果讨论了流场背风区域旋涡的形成过程。

**关键词:** 计算流体力学; 多重网格方法; 区域分解方法; Euler 方程

**中图分类号:** V211.3

## Multi-Block and Multi-Grid Computational Methods of Aircraft Flow Euler Equations

LAN Qian-zhang<sup>1</sup>, LU Xiao-bin<sup>2</sup>

(1. Dept. of Power & Energy Engineering, Shanghai JiaoTong University, shanghai 200030, China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** Numerical solution of three-dimensional Euler equations using multi-block and multi-grid computational methods was studied with finite volume method. Modified Van Leer upwind flux-vector-splitting method and MUSCL scheme were used. The conservative multi-block zonal boundary conditions from the flux-vector-splitting method and propagating characteristic theory of hyperbolic equations using finite volume methods were derived. The explicit zonal interface boundary conditions were used for multi-block zonal message transformation. The “V”-type multi-grid method was introduced to accelerate the convergence speed while the implicit time marching scheme was used to accelerate calculation convergence. Numerical results show that the multi-grid technology can raise the convergence speed by nearly one order of magnitude. The numerical and experimental results of aerodynamic characteristics, such as lift and drag agree very well at moderate high angle of attack. The numerical visualization of three-dimensional vortex flow shows that a vortex roll-up separated from leading edge can be seen.

**Key words:** computational fluid dynamics; Multi-grid methods; domain decomposition method; Euler equations;

现代飞行器全机外形具有不规则的边界形状, 而且流场中包含激波、分离区和诱导涡等, 其流场是一个十分复杂的三维流场。无论从计算几何形状, 还是从复杂流动物理现象来说, 数值求解全机三维绕流流场的气动问题, 都有必要采用分区求解的方法。

收稿日期: 2001-12-19

作者简介: 兰黔章(1966-), 男, 贵州人, 副教授, 博士。

分区计算与单域计算的重要差异在于存在着相邻子区域交界面,和实现相邻区域解光滑过渡的交界面耦合条件<sup>[1]</sup>。交界面处的耦合条件不仅影响分区计算数值方法的精度、稳定性和收敛性,而且随子域分区方式不同而差别很大<sup>[2,3]</sup>。区域分解方法分为重叠和对接两种分区方式。重叠分区方式采用网格嵌套(Chimera)技术建立耦合条件,即:(1)通过挖洞和建立边界点的方法确定子域的内边界;(2)通过从邻近子域流场解线性插值得到内边界上的流动参数。而对接分区网格相邻子域有共同的分界面,不存在彼此覆盖的重叠区。特别当相邻两区的网格线在对接面上是连续光滑连接的情况下,分界面处有较准确保证通量守恒的分界面耦合条件。本文计算中采用的是连续对接的分区网格。

加快收敛技术的重大发展是采用多重网格方法<sup>[4,5,6]</sup>。多重网格方法的特点是,粗网格可以消除低频误差,细网格可以消除高频误差,通过反复交替消除不同频率范围的误差,可以加快计算收敛速度。本文采用了“V”型多重网格方法和隐式格式时间积分和局部时间步长方法,以提高计算收敛效率。

## 1 数值方法

### 1.1 有限体积离散方法

本文采用直角坐标系  $o(x, y, z)$  中积分形式的可压缩 Euler 方程组作为控制方程,即:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \oint_S (\vec{E}\vec{i} + \vec{F}\vec{j} + \vec{G}\vec{k}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1)$$

其中  $Q$  为守恒向量,  $E, F, G$  分别为在三个坐标  $x, y, z$  方向的无粘对流通量向量,具体形式见文献<sup>[7]</sup>。

在空间贴体曲线网格任意单元  $V_{i,j,k}$  上,将(1)式用有限体积方法离散,整理可得半离散方程为:

$$\begin{aligned} V_{i,j,k} dQ_{i,j,k} = & -dt(\tilde{E}_{i+1/2,j,k} S_{i+1/2,j,k} - \tilde{E}_{i-1/2,j,k} S_{i-1/2,j,k} + \tilde{F}_{i,j+1/2,k} S_{i,j+1/2,k} \\ & - \tilde{F}_{i,j-1/2,k} S_{i,j-1/2,k} + \tilde{G}_{i,j,k+1/2} S_{i,j,k+1/2} - \tilde{G}_{i,j,k-1/2} S_{i,j,k-1/2}) \end{aligned} \quad (2)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{i+1/2,j,k} &= (n_x E + n_y F + n_z G)_{i+1/2,j,k} \\ \tilde{F}_{i,j+1/2,k} &= (n_x E + n_y F + n_z G)_{i,j+1/2,k} \\ \tilde{G}_{i,j,k+1/2} &= (n_x E + n_y F + n_z G)_{i,j,k+1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

$\tilde{E}_{i+1/2,j,k}$ ,  $\tilde{F}_{i,j+1/2,k}$ ,  $\tilde{G}_{i,j,k+1/2}$  等分别为控制体边界面  $(i+1/2, j, k)$ ,  $(i, j+1/2, k)$ ,  $(i, j, k+1/2)$  的法向对流通量向量,  $S$  是控制体边界面,  $\vec{n}$  为边界面的外法向单位向量。如果网格足够光滑,上式边界面物理量采用二阶插值公式 MUSCL 方法插值计算,则方程(2)式具有空间二阶精度。

### 1.2 Van Leer/Hanel 矢通量分裂格式

Steger-Warming 的矢通量分裂方法<sup>[10]</sup>是根据 Jacobian 矩阵特征值的正、负进行分裂。这种分裂方法的缺点在于当特征值为零处通量分裂并不可微,将会造成解的小振荡。Van Leer 提出一种改进方法<sup>[11]</sup>,将通量表示成局部马赫数的二次多项式函数,然后进行分裂, Van Leer 分裂方法满足通量分裂的可微要求。此外, Liou 将动量项与压力项分别分裂,提出另外一种 AUSM+ 分裂格式<sup>[12]</sup>,亦可以满足通量分裂的连续可微要求。

本文采用多维 Van Leer 矢通量分裂方法。因(2)式中  $\tilde{E}(Q)$ ,  $\tilde{F}(Q)$ ,  $\tilde{G}(Q)$  不仅是  $Q$  的函数,同时又是控制体边界几何形状的函数,不能直接应用 Van Leer 分裂公式。先用一个局部正交变换将速度分量  $(u, v, w)$  转动一个方向,使变换后局部正交速度分量  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  中  $\bar{u}_{i+1/2,j,k}$  沿控制单元  $(i, j, k)$  的  $\xi$  向边界  $S_{i+1/2,j,k}$  的法向,而  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  与  $\bar{u}$  垂直。

坐标系的局部旋转变换矩阵  $T$  由下式定义:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & t_x & t_y & t_z & 0 \\ 0 & s_x & s_y & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$n_x = \frac{\xi_x}{|\text{grad}\xi|}, \quad n_y = \frac{\xi_y}{|\text{grad}\xi|}, \quad n_z = \frac{\xi_z}{|\text{grad}\xi|},$$

$$t_x = \frac{x_\eta}{|r_\eta|}, \quad t_y = \frac{y_\eta}{|r_\eta|}, \quad t_z = \frac{z_\eta}{|r_\eta|}, \quad r_\eta = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2} \quad (5)$$

$$\vec{s} = \vec{n} \times \vec{t}$$

经过转换,在边界处得到局部正交通量向量  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$ ,其中  $\bar{E}$  为:

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} \rho \bar{u} \\ \rho \bar{u}^2 + p \\ \rho \bar{u} \bar{v} \\ (e + p) \bar{u} \end{bmatrix} \quad (6)$$

本文采用 Hanel 改进 van Leer 分裂公式<sup>[13]</sup>,以  $\bar{E}$  为例,对亚音速流动,即当  $|M_n| = \bar{u}/c < 1$  时,

$$\bar{E}^\pm = \begin{bmatrix} f_1^\pm \\ f_1^\pm c [(\gamma - 1)M_n \pm 2]/\gamma \\ f_1^\pm \bar{v} \\ f_1^\pm \bar{w} \\ f_1^\pm [(e + p)/\rho] \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中  $f_1^\pm = \pm \frac{\rho c}{4} (1 \pm M_n)^2$ ,  $c, \rho, p, e$  分别为音速、密度、压力和单位体积总内能。

$$\text{对超音速流动,即当 } |M_n| \geq 1 \text{ 时,} \begin{cases} \text{当 } M_n \geq 1, \bar{E}^+ = \bar{E}, \bar{E}^- = 0 \\ \text{当 } M_n < -1 \text{ 时, } \bar{E}^- = \bar{E}, \bar{E}^+ = 0 \end{cases} \quad (8)$$

容易推导,矩阵  $T$  的逆阵  $T^{-1}$  为:  $T^{-1} = T^T$  (9)

待作完分裂后,(7)式或(8)式再用  $T^{-1}$  将通量变换回物理坐标系,这样才能曲线坐标网格上进行局部多维对流项矢通量分裂。

### 1.3 内分界面耦合条件

本文结合矢通量分裂方法和信息传播特征理论,采用下列内分界面耦合条件<sup>[14]</sup>:(1)各子区域流出内边界,即沿正法线方向传播的通量,由各子区域独立迎风线性插值计算;(2)流入内边界,即沿负法线方向传播的通量,由相邻区域迎风线性插值计算。

上述内分界面耦合条件使得法线方向的特征速度在两相邻区域是统一的,所以交界面满足通量守恒关系式。而且本文内交界面耦合条件可以应用多重网格方法。

### 1.4 多重网格方法

我们知道,在细网格中迭代计算,高频分量收敛较快,低频分量却收敛较慢。如果网格尺寸增大,类似在粗网格中进行迭代,低频分量相对来说又成了高频分量,则可以加速流场收敛<sup>[15]</sup>。本文在迭代求解过程中采用“V”型多重网格方法,由一系列由细到粗直到最粗层网格,再由粗到细的网格组成,不断利用粗网格消除低频误差,加快流场计算收敛速度。各子区域之间在同层网格上进行耦合。

本文在分区计算中采用的“V”型多重网格方法,各个子区域之间同一层网格在每次时间积分前交换

信息,由耦合条件确定内边界通量,子区域内部进行类似单区计算。对应的数据在同层网格间传递时不易出错,易于增加网格的层数。

### 1.5 子区域时间隐式格式和局部时间步长方法

对(2)式时间积分采用隐式因式分解(AF)方法。为了加速定常解收敛,子区域内部对每个控制单元取其最大时间步长。根据稳定性条件,局部时间步长为:

$$\Delta t = CFL \cdot \left( \frac{|u_n| + C}{\Delta \xi_{i,j,k}} + \frac{|v_n| + c}{\Delta \eta_{i,j,k}} + \frac{|w_n| + c}{\Delta \zeta_{i,j,k}} \right)^{-1} \quad (10)$$

式中下标  $n$  表示边界的法向,  $\Delta \xi_{i,j,k}$ ,  $\Delta \eta_{i,j,k}$ ,  $\Delta \zeta_{i,j,k}$  分别表示  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  方向网格的尺度。

## 2 计算结果分析

对机身-机翼-立尾-平尾战斗机外型,计算网格是由三块区域分区生成对接连成的翼-身-尾组合体网格,右半场空间分区计算网格见图1。分界面分别是机翼平面和平尾平面延伸至远场形成的空间曲面。翼尖,顶点及翼面附近的网格作了局部加密。

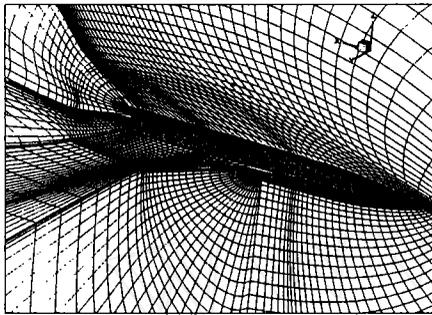


图1 空间分区计算网格

Fig. 1 Space multiblock mesh

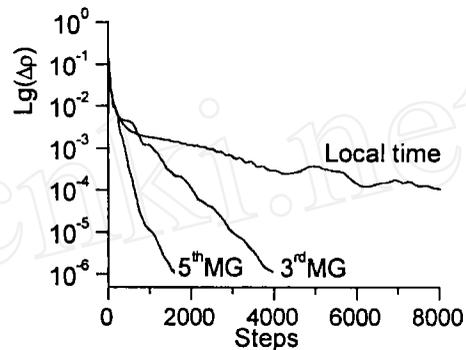


图2 计算收敛曲线

Fig. 2 Convergence history

图2为本文多重网格方法计算的收敛曲线,图中给出了由密度的均方根误差表示的3层与5层网格收敛过程。与只用局部时间步长的结果相比,多重网格的加速收敛作用十分明显,5层网格的收敛速度提高了近一个量级。

图3、4分别给出了来流条件为  $Ma = 0.9$ ,  $\alpha = 4.5^\circ$  和  $\alpha = 24.1^\circ$  时机翼上不同展向位置上下翼面压力分布与实验测量<sup>[16]</sup>的翼身组合体的机翼上下翼面压力分布比较。图5为  $Ma = 0.9$  时,计算的机翼法向力系数  $C_n$  和俯仰力矩系数  $C_m$  与实验值的比较。在较小攻角时计算压力分布、法向力系数等与实验结果符合较好;在较大攻角时,如  $\alpha = 24.1^\circ$  等,计算法向力系数  $C_n$  的值略高于实验结果。

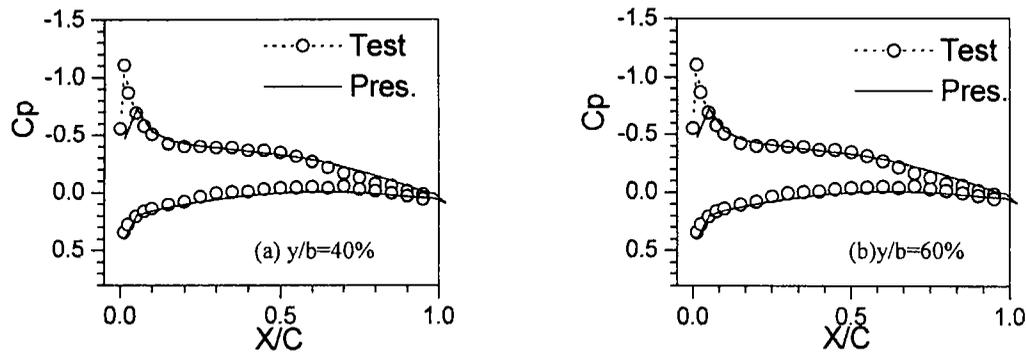


图3 机翼表面压力分布计算与实验比较

Fig. 3 Comparison of pressure distribution of wing surface at  $Ma = 0.9$ ,  $\alpha = 4.5^\circ$

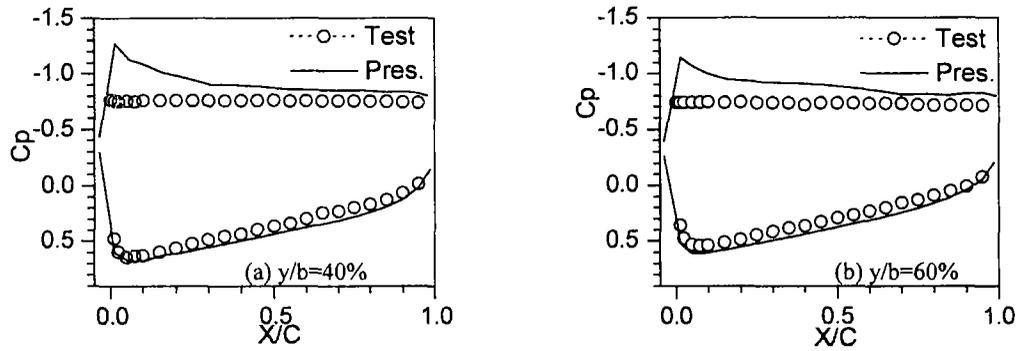


图 4 机翼表面压力分布计算与实验比较

Fig. 4 Comparison of pressure distribution of wing surface at  $Ma = 0.9, \alpha = 24.1^\circ$

图 6 为  $Ma = 0.9, \alpha = 24.1^\circ$  时沿机身不同机翼截面的横向速度矢量分布图。计算结果表明大迎角时,在上翼面和机身背风区,横向流动有较大范围的回流区,形成了背风区上的主涡,前缘脱体涡是流动的主要特征;从实验的压力分布看,也说明上翼面的流动已全面分离。利用 Euler 方程数值计算结果可以很好地模拟前缘分离引起的背风区脱体涡。图 7 则为机翼背风区主涡三维流线图,反映了主涡是由机翼机身结合部前缘脱体涡发展而形成的过程。

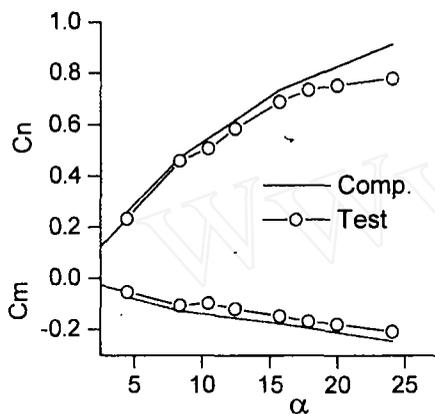


图 5 机翼法向力、俯仰力矩系数比较

Fig. 5 Normal lift and pitching moment coefficient

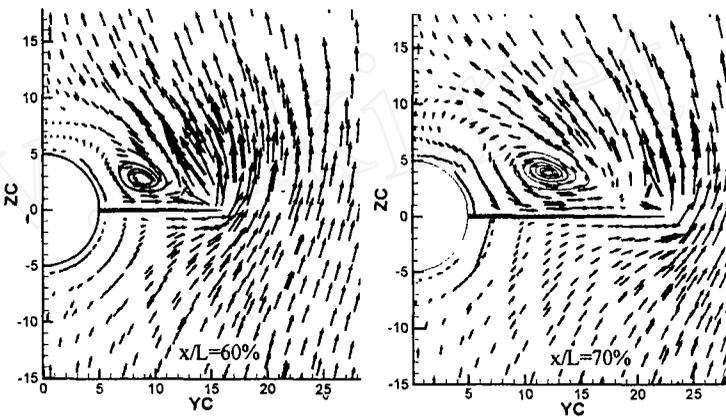


图 6 沿机身纵向截面速度矢量线

Fig. 6 Velocity vector of longitude profile at  $Ma = 0.9, \alpha = 24.1^\circ$

### 3 结论

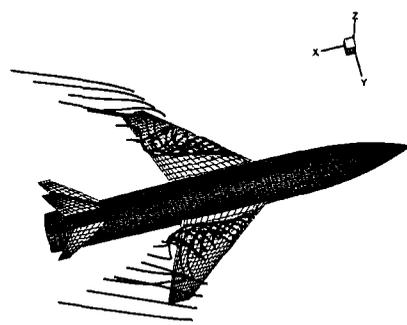


图 7 三维流线

Fig. 7 3D stream lines

本文研究了全机三维绕流 Euler 方程分区多重网格计算方法,利用有限体积方法并采用 Van Leer/Hanel 多维迎风型矢量通量分裂方法对战斗机简化全机外流场进行了数值模拟。由于三维流场计算收敛较慢,本文应用“V”型多重网格方法,使收敛速度提高了近一个数量级。

本文提出的内分界面迎风型守恒耦合条件,使得分区计算方法仍可满足物理守恒方程,并且可以用于多重网格方法,对全机外流场的数值计算,获得了与实验测量符合较好的物面压力分布及背风区的脱体涡计算结果。本文方法可用于飞行器全机流场数值模拟与设计。

## 参考文献:

- [1] Cheshire G, Henshaw W D. Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations. *J Comp Phys* 1990,90:1-64
- [2] Bramble J H, Pasciak J E, Vassilev A T. Analysis of non-overlapping domain decomposition algorithms with inexact solves. *Math Comp* 1998, 67:1-19
- [3] Wu Z. Convergence study of an implicit multi-domain approximation for the compressible Euler equations. *Computers and Fluids*, 1996, 25:181-196
- [4] Jameson A, Baker T J. Multigrid solution of the Euler equations for aircraft configurations. *J AIAA*,1984,22:0093-
- [5] Vetsa V N, Wedan B W. Development of a multigrid code for a 3-D Navier-Stokes equations and its application to a grid refinement study. *Computers and Fluids*, 1990,18:391-403
- [6] Swanson R C, Radespiel R. Cell centered and cell vortex multigrid schemes for the Navier-Stokes equations. *J AIAA*,1991,29(5)
- [7] 兰黔章. 格点有限体积多重网格法 Euler 方程计算研究. 南京航空航天大学, 学位论文, 1995
- [8] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V: A second order equal to Godunov's method. *J Comp Phys* 1979,32: 101-136
- [9] Van Albada G D, Van Leer B, Roberts W W Jr. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astronomy and Astrophysics*, 1982,108(76)
- [10] Steger J L, Warming R F. Flux-vector splitting of the inviscid gas equations with application to finite difference methods. *J Comp Physics*. 1981,40(2):263-293
- [11] Leer B V. Flux-vector splitting for the Euler equations. *Lecture Notes in Physics*, 1982,170:507-512
- [12] Liou M S. Progress towards an improved CFD method: AUSM<sup>+</sup>. *J AIAA*,1995,33:1701-
- [13] Hanel D, Schwane R, Seider D. On the accuracy of upwind schemes for the solutions of the Navier-Stokes equations. 8th AIAA CFD conference, *J AIAA*,1987,25:1105-
- [14] 吕晓斌. 欧拉方程的分区和并行计算. 北京航空航天大学, 学位论文, 2000
- [15] Trottenberg U, schuyller A, Oosterlee c. *Multigrid*. Academic Press, 2000
- [16] Runckel J F, Lee E E Jr. Investigation at transonic speeds of the loading over a 45° swept-back wing having an aspect ratio of 3, a taper of 0.2 and NACA 65A004 airfoil sections. *NASA TN D-712*, 1961