

机械载荷作用下单边裂纹载流薄板的应力场¹⁾

刘思远 白象忠 刘俊杰 敖涛

(中国科学院力学研究所, 国家非线性连续介质力学重点实验室 (LNM), 北京 100080;
燕山大学建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004)

摘要 采用坐标变换的方式, 将单边裂纹载流薄板通电瞬间由温度产生的应力场表达式中的各应力分量分离, 并用极坐标进行表示. 给出了 I 型穿透裂纹尖端附近的应力场的表达式. 最后将温度产生的应力场与单向拉伸载荷作用产生的应力场相叠加, 推导出用极坐标表示的机械载荷作用下单边裂纹载流薄板的应力场的表达式, 并给出算例.

关键词 坐标变换, 单边裂纹, 载流薄板, 应力场, 机械载荷

1 引言

对带有裂纹的导电薄板进行电热止裂时, 由于薄板裂纹的存在, 裂尖处的应力场是非常复杂的. 其中包含有温度分布不均引起的温度应力, 温度梯度影响的金属相变产生的相变应力, 及外载荷作用产生的机械应力. 本文只限于研究带有边缘裂纹的导电薄板在机械载荷作用下通电瞬间的应力场. 在通电时间仅为 $25\mu\text{s}$ 的情况下, 裂纹尖端附近的应变速率将非常大. 塑性变形在非常高的应变速率下来不及发生, 故在裂纹尖端熔化区外一定尺寸范围内, 温度应力可以近似地按弹性区来计算. 有关研究机械载荷与通入的瞬间电流共同作用的薄板试件裂纹尖端应力场的问题 (如图 1 所示), 在过去已发表的论文中尚未见到.

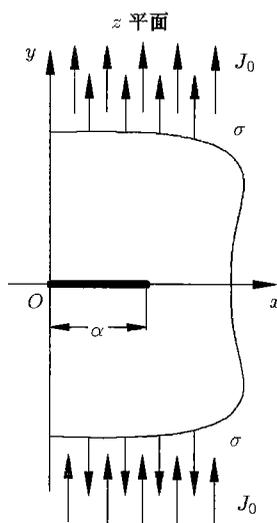


图 1 加入载荷的单边裂纹载流薄板

本文利用文献 [1] 中的无机械载荷作用时, 通电瞬间的裂纹尖端应力场的表达式, 通过坐标变换的方式, 分离各应力分量, 将原有的复变函数表示的应力场的表达式转化为极坐标表达形式, 与同样用极坐标表示的机械载荷的应力场线性叠加, 得到了共同作用下的应力场的表达式. 给出了裂尖附近的应力状态. 这一方法的研究结果为进一步研究机械载荷作用下各种复杂裂纹的应力场打下了基础.

2 温度应力函数 $\Phi(\zeta)$ 的确定

半平面的应力表达式为^[2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta} + \sigma_{\xi} &= 2 \times [\varphi'(\zeta) + \overline{\varphi'(\zeta)}] \\ \sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} &= 2 \times [\zeta\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

引用解析函数 $\Phi(\zeta)$ 和 $\Psi(\zeta)$, 并且 $\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)$, $\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)$. 则式 (1) 可表示成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta} + \sigma_{\xi} &= 2 \times [\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] = 4\text{Re}[\Phi(\zeta)] \\ \sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} &= 2 \times [\zeta\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $\zeta = \xi + i\eta$, ζ 平面是半平面, $\Phi(\zeta)$ 和 $\Psi(\zeta)$ 为在域中的调和函数, 在无限远处等于零. 这里的应力表达式是在直线 $L(\eta=0)$ 限定平面域 $D^-(\eta < 0)$ 上确定的, 如果在域 D^- 中的某个点 (ξ_0, η_0) 放置功率为 q_0 的热源, 在没有机械载荷作用下, 半平面的应力函数^[3]

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau + A(\zeta) + B(\zeta) \quad (3)$$

2004-06-10 收到第 1 稿, 2005-03-16 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金项目 (50275128) 资助.

式 (3) 中, $f(\tau) = \sigma_\eta - i\tau\xi_\eta$. $\sigma_\eta, \tau\xi_\eta$ 为在域边界上给定的外部应力, 在此问题中, 由于只有点热源作用, 所以二者皆为零, 于是 $f(\tau)$ 等于零. 则有

$$\left. \begin{aligned} A(\zeta) &= A_0 \times \ln(\zeta - \zeta_0) \\ B(\zeta) &= A_0 \times \left[\frac{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} - \ln(\zeta - \bar{\zeta}_0) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

综合式 (3), 式 (4) 得到

$$\Phi(\zeta) = A_0 \times \left[\frac{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} - \ln \frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} \right] \quad (5)$$

式 (5) 中

$$A_0 = \frac{f q_0}{4\pi\lambda(1+\chi)}, \quad f = \frac{2E\alpha_t}{1+\nu}, \quad \chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

其中, E 为材料的弹性模量 (N/m^2); ν 为泊松比; α_t 为线膨胀系数 ($\text{m}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$); q_0 为热源单位时间单位长度所放出的热量, 由功率密度绕裂尖积分求得 (W/m); λ 为热传导系数 ($\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$).

取一扰动值 $\delta \rightarrow 0$, 点热源的位置定义在 $\zeta_0(0, -\delta)$, 将其带入式 (5) 得到

$$\Phi(\zeta) = A_0 \times \left[\frac{-2\delta i}{\zeta - \delta i} - \ln \frac{\zeta - \delta i}{\zeta + \delta i} \right] \quad (6)$$

近似地认为 $\zeta - \delta i \approx \zeta \approx \zeta + \delta i$, 所以上式可以写成

$$\Phi(\zeta) = -\frac{2A_0\delta i}{\zeta} \quad (7)$$

由此可以得到以下各式

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(\zeta) &= \frac{2A_0\delta i}{\zeta^2}, \quad \overline{\Phi(\zeta)} = \frac{2A_0\delta i}{\bar{\zeta}} \\ \Phi(\bar{\zeta}) &= -\frac{2A_0\delta i}{\bar{\zeta}}, \quad \overline{\Phi'(\zeta)} = \frac{-2A_0\delta i}{\zeta^2} \\ \overline{\Psi(\zeta)} &= \overline{\Phi(\zeta)} = \frac{2A_0\delta i}{\bar{\zeta}} \\ \Psi(\zeta) &= \Phi(\zeta) = -\frac{2A_0\delta i}{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3 单边裂纹平面上温度应力表达式及各应力分量的分离

单边裂纹平面上的应力表达式可由应力坐标转换公式^[4]得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= \sigma_\eta + \sigma_\xi \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= (\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) \frac{\overline{w'(\zeta)}}{w'(\zeta)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于单边裂纹平面与 ζ 平面的映射关系为 $Z = w(\zeta) = -i\sqrt{\zeta^2 - a^2}$, 所以

$$\frac{\overline{w'(\zeta)}}{w'(\zeta)} = \frac{\bar{\zeta}Z}{\zeta\bar{Z}}$$

其中 Z 平面为单边裂纹平面.

将此式与式 (2) 一起代入式 (9) 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 2 \times [\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 \times [\bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)] \frac{\bar{\zeta}Z}{\zeta\bar{Z}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

综合式 (7), 式 (8), 式 (10) 整理得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 4A_0\delta \left[-\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \right] \times i \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 4A_0\delta \left[\frac{\bar{\zeta}}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \right] \frac{\bar{\zeta}Z}{\zeta\bar{Z}} \times i \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

4 极坐标表示的温度应力分量的表达式

由于从 ζ 平面映射到 z 平面的映射关系是 $\zeta = -\sqrt{a^2 - z^2}$, 将 z 坐标系的坐标原点沿 x 轴向右平移长度为 a 的距离, 并以 z_1 作为新坐标 (如图 2 所示) 则复平面上的一点 $z(x, y)$ 变为 $z = z_1 + a$, 这时的映射关系为^[5]

$$\zeta = -\sqrt{(2a + z_1)(-z_1)} \quad (12)$$

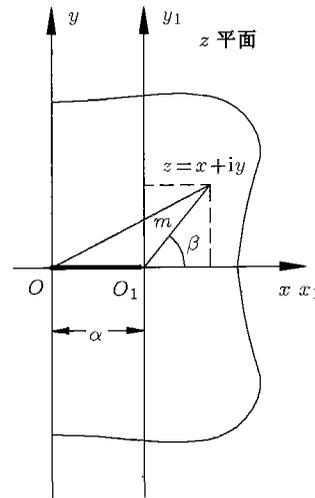


图 2 坐标变换图

在极坐标下, 令 $2a + z_1 = r_2 e^{i\theta_2}$, $-z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z = r e^{i\theta}$, $z_1 = m e^{i\beta}$ 可以得到关系式

$$\zeta = -\sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)i} \quad (13)$$

以上表达式中 m 是极径, β 为极角

$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{4a^2 + m^2 + 4am \cos \beta} \\ r &= \sqrt{m^2 + a^2 + 2am \cos \beta} \\ r_1 &= m \end{aligned}$$

再令 $\alpha = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$, 可将式 (11) 各参量用极坐标表示成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= \frac{8A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} \sin \alpha \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= \\ &\frac{4A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} [\cos(2\theta - 3\alpha) - \cos(2\theta - 5\alpha)] \times i - \\ &\frac{4A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} [\sin(2\theta - 3\alpha) - \sin(2\theta - 5\alpha)] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

将式 (14) 各应力分量分离得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{8A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} \sin \alpha \cos^2(2\alpha - \theta) \\ \sigma_y &= \frac{8A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} \sin \alpha \sin^2(2\alpha - \theta) \\ \tau_{xy} &= \frac{4A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} \sin \alpha \sin(4\alpha - 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

5 温度产生的应力场与外载荷产生的应力场的线性叠加

单向拉伸载荷作用下板内 I 型穿透裂纹尖端附近的应力场为^[6]

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi m}} \cos \frac{\beta}{2} \left(1 - \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3\beta}{2}\right) - \sigma \\ \sigma'_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi m}} \cos \frac{\beta}{2} \left(1 + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3\beta}{2}\right) \\ \tau'_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi m}} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3\beta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中的 K_I 是由文献 [7] 得到的半无限大板长度为 a 的边缘裂纹, 承受垂直裂纹方向大小为 σ 的拉伸应力的应力强度因子. 其表达式为

$$K_I = 1.1215\sigma\sqrt{\pi a}$$

将式 (15) 与式 (16) 相叠加, 得到总的应力场的各分

量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma'_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi m}} \cos \frac{\beta}{2} \left(1 - \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3\beta}{2}\right) - \\ &\sigma + \frac{8A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} \sin \alpha \cos^2(2\alpha - \theta) \\ \sigma_y + \sigma'_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi m}} \cos \frac{\beta}{2} \left(1 + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3\beta}{2}\right) + \\ &\frac{8A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} \sin \alpha \sin^2(2\alpha - \theta) \\ \tau_{xy} + \tau'_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi m}} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3\beta}{2} + \\ &\frac{4A_0\delta}{\sqrt{r_1r_2}} \sin \alpha \sin(4\alpha - 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中

$$\theta_1 = \begin{cases} -\beta, & -m \cos \beta \geq 0 \\ \pi + \beta, & -m \cos \beta < 0, -m \sin \beta \geq 0 \\ -\pi + \beta, & -m \cos \beta < 0, -m \sin \beta < 0 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \sin^{-1}(B/r_2), & 2a + m \cos \beta \geq 0 \\ \pi - \sin^{-1}(B/r_2), & 2a + m \cos \beta < 0 \\ m \sin \beta \geq 0 \\ -\pi - \sin^{-1}(B/r_2), & 2a + m \cos \beta < 0 \\ m \sin \beta < 0 \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} \sin^{-1}(B/r), & a + m \cos \beta \geq 0 \\ \pi - \sin^{-1}(B/r), & a + m \cos \beta < 0 \\ m \sin \beta \geq 0 \\ -\pi - \sin^{-1}(B/r), & a + m \cos \beta < 0 \\ m \sin \beta < 0 \end{cases}$$

$$B = m \sin \beta$$

6 算例分析

计算含有长度为 $a = 10\text{mm}$ 的单边裂纹 T7 钢板, 已知钢板的厚度为 $2h = 0.5\text{mm}$, 热传导系数为 $\lambda = 39.4\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, 电导率为 $\sigma_t = 5.8 \times 10^6(\Omega\cdot\text{m})^{-1}$, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}\text{Pa}$, 泊松比 $\nu = 0.35$, 线胀系数 $\alpha_0 = 11.2 \times 10^{-6}(\text{m}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C}))$, 外载荷 $\sigma = 160\text{MPa}$ 板内沿着 y 轴通入随时间变化的电流密度的标量值为 $J_0 = 1.29 \times 10^8\text{A}/\text{m}^2$ 的电流, 取 $\delta = 0.0014\text{m}$. 通过这些条件来描绘试件通入瞬间电流时裂尖附近的应力状态. 在极坐标上取一

点 $(0.003, \pi/3)$ 可以算出这一点的应力值

$$\sigma'_y = 338.54 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -89.63 \text{ MPa}$$

叠加后的总的应力为

$$\sigma_y + \sigma'_y = 248.91 \text{ MPa}$$

可以看出, 由于温度应力的作用, 外载荷对裂纹的影响有了明显的减小. 图 3, 图 4, 图 5 分别表示

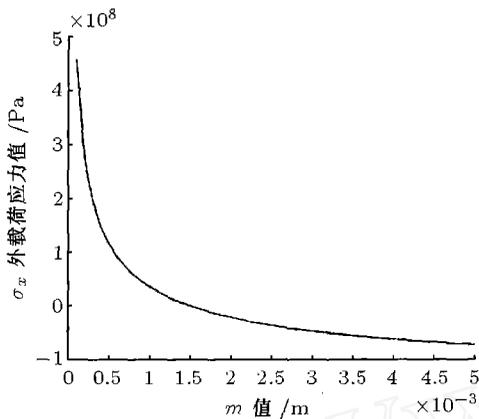


图 3 x 方向外载荷应力分布 ($\beta = \pi/3$)

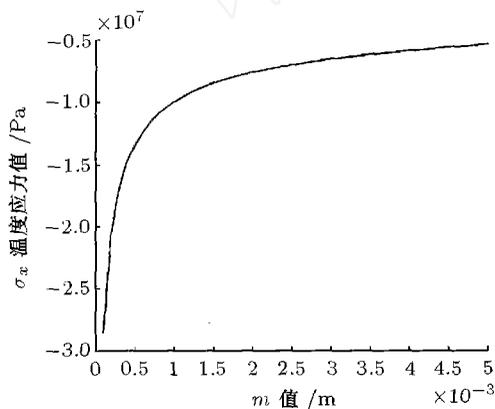


图 4 x 方向温度应力分布 ($\beta = \pi/3$)

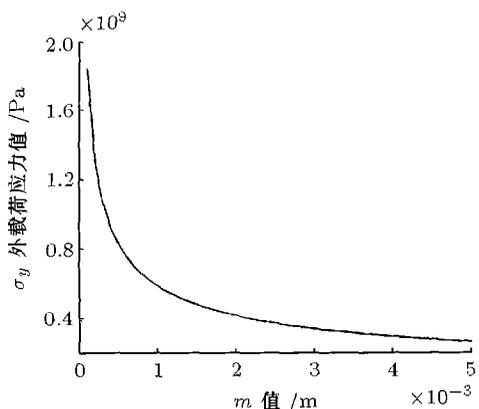


图 5 y 方向外载荷应力分布 ($\beta = \pi/3$)

了 x 方向裂尖附近外载荷分布, x 方向裂尖附近温度应力分布, y 方向裂尖附近外载荷分布, 可以看出外载荷在裂尖附近的应力值是正值且向着远离裂尖的方向逐渐减小, 图 6 是 y 方向裂尖附近温度应力分布, 可以看出温度产生的应力场在裂尖附近的应力值是负值, 离裂尖越远应力值越小. 通过算例分析得出, 通入瞬间电流的单边裂纹金属薄板其温度产生的应力场能够减小外载荷对裂纹的影响.

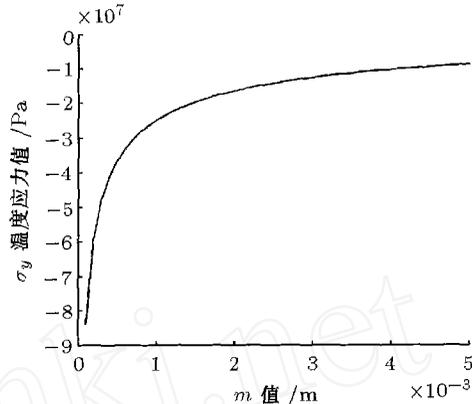


图 6 y 方向温度应力分布 ($\beta = \pi/3$)

7 结 论

运用坐标变换的方法, 以极坐标的形式表示出温度产生的应力场, 将温度产生的应力场表达式进行分离, 并与外载荷作用产生的应力场线性叠加. 通过算例分析, 在理论上证明了温度产生的应力场能够抵制外载荷对裂纹的影响, 达到止裂效果.

参 考 文 献

- 胥红敏, 白象忠, 付宇明等. 单边裂纹通电瞬间裂尖处应力场的复变函数解. 力学季刊. 2002, 23(3): 362~368(Xu Hongmin, Bai Xiangzhong, Fu Yuming, et al. The solution of a stress field around the side-crack tip using functions of complex variable undergone a transient current. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2002, 23(3): 362~368(in Chinese))
- 张行. 高等弹性理论. 北京航空航天大学出版社, 1994. 186~198 (Zhang Hang. *Theory of Advanced Elasticity*. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1994. 186~198 (in Chinese))
- Пруссов ИА. Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во БГУ, 1972. 92~102 (Prusov IA. Some Problems about Heat Elasticity. Minsk: White Russian National University Press, 1972. 92~102 (in Russian))
- 徐芝纶. 弹性力学. 北京: 高等教育出版社, 1994. 115~120 (Xun Zhilun. *Elasticity Mechanics*. Beijing: Higher Education Press, 1994. 115~120 (in Chinese))
- 范天佑. 断裂理论基础. 北京: 科学出版社, 2003. 29~33 (Fan Tianyou. *Foundation of Fracture Theory*. Beijing: Science

- Press, 2003. 29~33 (in Chinese))
- 6 丁遂栋. 断裂力学. 北京: 机械工业出版社, 1997. 40~47 (Ding Suidong. Fracture Mechanics. Beijing: Chinese Machine Press, 1997. 40~47(in Chinese))
- 7 中国航空研究院编著. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社, 1993. 200 (Chinese Aviation Research Institute. Handbook of Stress Intensity Gene. Beijing: Science Press, 1993. 200 (in Chinese))

THE STRESS FIELD IN A CURRENT-CARRYING PLATE WITH A SIDE-CRACK UNDER THE ACTION OF MECHANICAL LOADING

LIU Siyuan BAI Xiangzhong LIU Junjie AO Tao

(The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical (LNM), Beijing 100080, China;
Institute of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract By means of coordinate transformation, the part of stresses in the expression of stress field caused by temperature at the moment of application of transient current on the plate with a side-crack was separated and expressed in polar coordinate. The stress field near the penetrate crack tip of type I was obtained. Through adding the stress field caused by temperature to the stress caused by tension loaded in the distance, the stress field in the current-carrying plate with a side-crack under the action of mechanical loading could be obtained in polar coordinate. An example is provided.

Key words coordinate transformation, current-carrying plate, stress field, a side-crack, mechanical loading

~~~~~

(上接第 18 页)

## THE EQUIVALENT SHEAR MODULUS OF THE HONEYCOMB CORE

WANG Pingping\* CHEN Changya† LUO Wenbo\* KONG Xianren\* ZOU Jingxiang\*

\*(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

†(Shanghai Institute of Satellite Technology, Shanghai 200240)

**Abstract** The light-duty honeycomb sandwich structures with high specific-strength and specific-stiffness are applied widely in the satellite projects. The shear modulus is especially difficult to obtain accurately. This paper focuses on the shear modulus analysis method using the finite element method based on the thin plate theory. The results were found to agree better with experiments than other methods.

**Key words** honeycomb core, single honeycomb cell, equivalent modulus