

SPH 方法在模拟线弹性波传播中的运用

丁 桦^{*1}, 龙丽平², 伍彦峰¹

(1. 中国科学院 力学研究所 工程科学部, 北京 100080; 2 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

摘 要: 通过对固体中波动问题的模拟建立了一种光滑粒子法的新形式, 一种运用 SPH 的核函数的类似有限体积分法的计算方法。通过对统计体积的修正以及对边界粒子的核函数修正, 较好地解决了 SPH 方法中长期以来制约其被广泛应用的主要问题之一边界条件的表述。在此基础上成功地在光滑粒子法中实现了透射边界条件的模拟。同时利用反卷积修正使得较大粒子间距下的计算结果的精度大大提高。这种方法不但保持了 SPH 的简单性, 而且很容易实现应力边界条件。

关键词: SPH; 弹性波传播; 透射边界条件; 反卷积; 守恒滤波
中图分类号: O 340 **文献标识码:** A

1 引 言

光滑粒子流体动力学方法(简称 SPH)产生于对流体运动的模拟, 是一种没有背景网格的拉格朗日粒子法。它是求解连续体动力问题的一种“真正的”无网格方法。SPH 方法在 1977 年首次被提出^[1,2], 当时主要是解决天体物理和宇宙的问题。直到 1991 年, SPH 方法才得到进一步发展, 用以处理固体的动态响应问题^[3], 在此之后这一方法在很多新的领域中受到重视和关注。

针对 SPH 方法的稳定性、计算精度以及固体表面的边界条件的处理, 近年来, 人们做了很多工作来进行改进^[4-9], 这些改进方法普遍存在的问题就是大大增加了计算花费, 特别是引入变分法以后。

本文通过对线弹性波动方程的初- 边值问题的模拟, 发展了一种新形式的 SPH 方法。这种新形式我们称之为极弱形式的核估计。我们利用加权残数法, 通过两次分部积分来建立线弹性动力方程的极弱形式的核估计, 通过边界积分项来实现应力边界条件和透射边界条件。这一方法避免了双重核估计, 大大提高了计算效率(相对于弱形式的方法)。此外利用与边界特征有关的体积修正和对应于边界粒子的核函数的修正, 使得边界积分和边界质量的估计的精度有很好的提升, 实现了较精确的边界

条件的处理, 成功地在 SPH 方法中引入了透射边界条件。同时利用反卷积修正将核估计平均化的解进行锐化, 使得较大粒子间距下的计算结果的精度大大提高。

2 SPH 方法的概述

在 SPH 方法中, 通过运用给出某点域值的“核估计”的插值函数, 把偏微分形式的连续体的动力方程转化为积分的形式。因计算中只涉及各离散点信息, 因此积分必须通过在邻域内粒子上的求和得到。它不需要背景网格的原因就是它利用核函数为每一个离散点赋予一统计意义下的体积, 而核估计是通过 Monte Carlo 积分来完成的。而分部积分则可以把对物理量的空间导数转化为对核函数的求导。

核重构是 SPH 方法的基础和核心, 任意一个函数 $f(x)$ 都可以利用一个核函数近似表示为

$$f_h(x) = \int f(y)W(x-y, h)dy \quad (1)$$

很明显, 当 $W(x, h)$ 逼近 Dirac delta 函数 $\delta(x)$ 时, 这个重构函数 $f_h(x)$ 将收敛于真实值 $f(x)$ 。一般来说, $W(x, h)$ 具有紧支集的性质, 而且, 如果选择合适的核函数, k 次多项式可通过上面的积分来精确重构。对于一维的情况, 如果满足下面条件:

$$\int W(x)dx = 1, \int x^j W(x)dx = 0, 0 < j < k \quad (2)$$

这种近似就可重构等于或低于 k 次的多项式, 即对 k 次的多项式 $f(x)$, $f_h(x)$ 将与 $f(x)$ 完全一致。

收稿日期: 2003-07-24; 修改稿收到日期: 2004-02-14。
基金项目: 国家 973(2002CB412706); 中国科学院知识创新项目滑坡工程中的关键力学问题资助项目。
作者简介: 丁 桦* (1960-), 男, 研究员, 博士生导师。

离散化以后利用 Monte Carlo 积分, 式(1) 中对 $f(x)$ 的核估计为

$$f^h(x) = \frac{1}{M_b} \sum_{a \in M_b} f(x^a) W(x - x^a, h) V_b \quad (3)$$

其中 V_b 为与粒子 x^b 和核函数 $W(x, h)$ 相关的统计体积, 由下式定义:

$$V_b = \frac{1}{\sum_{a \in M_b} W(x^b - x^a, h)} \quad (4)$$

其中 M_b 为对应于粒子 x^b 的核函数 $W(x^b - x^a, h)$ 的紧支域内的一系列点 x^a 的粒子号。 $f(x)$ 的导数可以简单地通过对式(3) 进行微分得到。通常一旦经过式(3) 的空间离散, 时间上用差分法离散即可求解动态问题。

3 弹性动态系统的极弱形式核估计

本节我们将给出线弹性各向同性动力系统的极弱形式的核估计。考虑如下线弹性波系统(重复的下标表示求和):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} - \sigma_{ij,j}(x, t) = f_i(x, t) \quad t > 0, x \in \Omega \quad (5)$$

弹性本构关系:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (6)$$

其中

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7)$$

方程初始条件和边界条件如下:

$$u_i(x, 0) = u_i^0, \dot{u}_i(x, 0) = \dot{u}_i^1, x \in \Omega \quad (8)$$

$$u_i(x, t) = g_i(x, t), x \in \partial \Omega$$

$$\sigma_{ij}(x, t) n_j = T_i(x, t), x \in \partial \Omega \quad (9)$$

其中 $\partial \Omega$ 和 $\partial \Omega$ 都是整个域边界的一部分, 且 $\partial \Omega \cap \partial \Omega = \Phi$ (空集), $\partial \Omega \cup \partial \Omega = \bar{\Omega}$ (域 Ω 的所有边界)。 ρ, λ 和 μ 分别为介质密度和拉梅系数, 这里假定在整个域 Ω 内为常数。

方程的极弱形式的核估计是通过加权残值法来建立的, 即用 SPH 的核函数乘以方程(5), 然后进行两次分部积分。方程(5) 两边同乘以 x 点为中心点的核函数 $W(x - y, h)$, 并在整个域内积分得

$$\rho \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} W(x - y, h) dy - \sigma_{ij,j}(y, t) W(x - y, h) dy = f_i(y, t) W(x - y, h) dy \quad (10)$$

利用分部积分, 方程(10) 等号左边的第二部分可

以写成:

$$\sigma_{ij,j}(y, t) W(x - y, h) dy = \sigma_{ij}(y, t) W_{,j}(x - y, h) dy + \int_Y \sigma_{ijn} W(x - y, h) dS_y \quad (11)$$

其中 Y 为核函数 $W(x - y, h)$ 的影响域与域 Ω 的边界相交的部分。注意上式中核函数 W 的导数, 在式(11) 中 $W_{,j}$ 按下式给定:

$$W_{,j}(x - y, h) = \frac{\partial}{\partial x_j} W(x - y, h) = - \frac{\partial}{\partial y_j} W(x - y, h) \quad (12)$$

式(10) 和式(11) 合在一起为式(5) 的弱形式的核估计。再次进行分部积分, 式(11) 右边的第一部分可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(y, t) W_{,j}(x - y, h) dy = & (2\mu \epsilon_{ij}(y, t) + \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk}(y, t)) \\ & W_{,j}(x - y, h) dy = \\ & (\mu \delta_{kk} W_{,jj}(x - y, h) + \mu W_{,ki}(x - y, h) + \\ & \lambda W_{,ik}(x - y, h) u_k(y, t) dy + \\ & \int_Y (\mu \delta_{kin} W_{,j}(x - y, h) + \mu n W_{,k}(x - y, h) + \\ & \lambda n W_{,i}(x - y, h)) u_k(y, t) dS_y \quad (13) \end{aligned}$$

这样, 方程(10) 可写为如下形式:

$$\rho u_{i,h}(x, t) - f_i(x, t) - T_{i,h}^Y(x, t) = K_{ik}(x - y, h) u_k(y, t) dy + \int_Y \Gamma_{ik}(x - y, h) u_k(y, t) dS_y \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{ik} = & \mu \delta_{kk} W_{,jj}(x - y, h) + \\ & \mu W_{,ki}(x - y, h) + \lambda W_{,ik}(x - y, h) \\ \Gamma_{ik} = & \mu \delta_{kin} W_{,j}(x - y, h) + \\ & \mu n W_{,k}(x - y, h) + \lambda n W_{,i}(x - y, h) \quad (15) \end{aligned}$$

且

$$T_{i,h}^Y(x, t) = \int_Y W(x - y, h) T_i(y, t) dS_y \quad (16)$$

式(14) 为方程(5) 的极弱形式的核估计。相比弱形式的核估计, 极弱形式的核估计的优点是每一项仅有一重积分, 而弱形式的核估计有两重积分, 因为弱形式中的位移 u 的导数必须再用核函数导数的

积分来近似。这个优势使得计算的速度有了很大的提高。

4 极弱形式核估计的离散化

设 $M_N = \{x^n; n = 1, \dots, N\}$ 为离散在整个域内包括域的边界上的一组粒子。为简化起见, 假定核函数中的参数 h 为常数, 以下的公式中将省略 h 。对于每个离散点 x^a , 记

$$u_i^a(t) = u_i^h(x^a, t), f_i^a(t) = f_i^h(x^a, t) \quad (17, 18)$$

式(14)中左边第三项可作如下近似:

$$T_i^a \frac{W_{ab}}{M_a^y} T_i^y(x^a, t) \quad (19)$$

其中 $M_a^y = \{b; b \in M_a \text{ and } x^b \in \Omega\}$ 表示属于 a 点影响域内的边界上的点, $W_{ab} = W(x^a - x^b)$, A_b 为表面点 x^b 点的统计面积, 定义为

$$A_a = \frac{1}{S_a W_{ab}} \quad (20)$$

系数 S_a 满足 $\int_{\Omega} S_a W(x^a - y) dS_y = 1$ 。式(14)的右边项近似为

$$K_{ik}^{ab} V_b^k u_k(y, t) \quad (21)$$

$$\Gamma_{ik}^{ab} A_b^k \Gamma_{ik}(x^a - y) u_k(y, t) dS_y \quad (22)$$

这里只对重复的坐标下标 i, j, k 进行求和运算, 对重复的离散粒子标号 a, b 不进行求和。

最后, 对于时间的离散我们采用中心差分法:

$$\rho \frac{u_i^a(t + \Delta t) - 2u_i^a(t) + u_i^a(t - \Delta t)}{\Delta t^2} - f_i^a(t) - T_i^a(t) \frac{W_{ab}}{M_a^y} = K_{ik}^{ab} V_b^k u_k^b(t) + \Gamma_{ik}^{ab} A_b^k u_k^b(t) \quad (23)$$

5 边界点的体积与核函数修正

由于用来计算处于边界的或接近边界的粒子的统计面积和体积的核函数有误差, 为了得到更好的结果, 所以必须改进这种方法。本文用添加虚粒子法并根据边界粒子各自的特征来修正它们的统计体积和面积。

任一个边界粒子, 边界特征可以通过预先分析得到的比例系数 FV_a 来表示:

$$FV_a = \frac{W_a \text{ 的影响域和域 } \Omega \text{ 相交的体积}}{W_a \text{ 的影响域的体积}} \quad (24)$$

当域内点 x^a 远离边界时, 容易看出 $FV_a = 1$ 。修正的统计体积为

$$V_a = \frac{FV_a}{M_a^y} \quad (25)$$

同样, 我们可以对点表面点 x^a 引入一个面积的边界特征因子 FA_a , 其表达式为

$$FA_a = \frac{W_a \text{ 的影响域和域的表面 } \Omega \text{ 相交的面积}}{W \text{ 在平面上的影响域的面积}} \quad (26)$$

修正统计面积为

$$A_a = \frac{FA_a}{S_a W_{ab}} \quad (27)$$

如果 h 相对于离散点之间的距离来说并不是很大, 则上述修正仅对边界点有必要。于是对于边界点 x^a 的核函数的修正为

$$W(x^a - x^b) = \alpha(x_a) W(x^a - x^b) \quad (28)$$

其中

$$\alpha(x_a) = \frac{1}{W(x^a - x^b) \cdot V_b} \quad (29)$$

6 边界条件

Randles 和 Libersky^[4] 指出: SPH 方法中边界条件的处理是一个难点, 也常常被人们忽略。早期的 SPH 方法在流体动力学方面的运用中没有边界条件, 或者边界条件非常简单, 如非嵌入边界等。由于 SPH 不满足严格意义下的插值, 因此边界和边界区从没被很好的定义过。

处理 SPH 边界条件有两个问题: 一个是边界的描述; 另一个是边界上核函数的求和的误差。在本文当中, 边界是通过边界粒子来描述, 而且每个边界粒子有一个几何因子, 可以通过式(22)来给出体积缩小率。边界核函数求和的误差可以通过上面所述的修正统计体积和修正核函数来解决。

对于位移边界条件可以由式(17)给出:

$$u_i^a(t + \Delta t) = g_i^h(x^a, t + \Delta t)$$

对所有 $t > 0$, 时间步 $\Delta t > 0$ (30)

求解时用上式来代替离散方程(21)中的包含所有位移边界条件的粒子的位移项。

在模拟地震波的传播, 或其他大范围的问题中, 经常需要用到透射边界条件来模拟半无限体或者无限体。

透射边界条件或者无反射边界条件是用一系

列边界粒子来定义。在相关的应用当中, Cohen 和 Jennings^[10] 对 Lysmer 和 Kuhlemeyer 的方法表示了肯定。在这种方法中, 粘性正应力和剪应力由下式给出:

$$\sigma_{\text{normal}} = -\rho c_p V_{\text{normal}}, \sigma_{\text{shear}} = -\rho c_s V_{\text{tang}} \quad (31a, b)$$

其中 ρ , c_p 和 c_s 分别为材料密度, 介质中的纵波波速, 横波波速, 应力的大小分别正比于法线方向的速度 V_{normal} 和切线方向的速度 V_{tang} 。局部坐标系中的应力向量由下式给出:

$$T_{bc} = -\rho C V_{bc} \quad (31)$$

其中

$$T_{bc} = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{normal}} \\ \sigma_{\text{shear1}} \\ \sigma_{\text{shear2}} \end{pmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_p & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & c_s \end{bmatrix}, V_{bc} = \begin{pmatrix} V_{\text{normal}} \\ V_{\text{tang1}} \\ V_{\text{tang2}} \end{pmatrix} \quad (31c)$$

令 R_a 为由边界点 x^a 的局部坐标系到全局的笛卡尔坐标系的转换矩阵, 则对于在透射边界上的粒子, 原来的离散方程(21) 可以写为

$$\rho \frac{U_{bc}^a(t + \Delta t) - 2U_{bc}^a(t) + U_{bc}^a(t - \Delta t)}{\Delta t^2} - R_a^T f_i^a(t) + \rho C V_{bc}^a(t) \frac{W_{ab}^a}{b M_a} = R_a^T K_{ik}^{ab} V_{b M_a}^b(t) + R_a^T \Gamma_{ik}^{ab} \frac{U_{b M_a}^b(t)}{b M_a} \quad (32)$$

然后转换为全局坐标系下的位移:

$$U^a(t + \Delta t) = R_a U_{bc}^a(t + \Delta t) \quad (32a)$$

其中

$$V_{bc}^a(t) = \frac{U_{bc}^a(t + \Delta t) - R_a^T U^a(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (32b)$$

和

$$U^a(t) = \begin{pmatrix} u_1^a(t) \\ u_2^a(t) \\ u_3^a(t) \end{pmatrix} \quad (32c)$$

7 稳定性和解的锐化

为了消除张拉不稳定性 and 沙漏模式, 可以采用 Balsala 的滤波修正^[4]

$$U^a = U^a + \alpha \left[\frac{U^h W_{ab} V_b}{W_{ab} V_a} - U^a \right] \quad (33)$$

通常, 由于使用 SPH 核估值积分来近似场函数, 所得到的结果比动力方程(5) 的解要“小”一些。因此当粒子间的距离较大时, 数值解与真实解

之间存在着较明显的误差。为了提高数值解的精度, 我们利用反褶积理论对所得到的解进行修正。

由于

$$u_i^h(x, t) = \int u_i(y, t) W(x - y, h) dy \\ u_i(x^b, t) W(x - x^b, h) V_b \quad (34)$$

可得

$$u_i(x^a, t) = \frac{u_i^h(x^a, t) - \int u_i(x^b, t) W(x^a - x^b, h) V_b}{W(0, h) V_x} \\ u_i^h(x^a, t) - \frac{\int u_i(x^b, t) W_{ab} V_b}{W(0, h) V_x} \quad (35)$$

经过上式的修正可以使结果更接近真实解。

8 数值实验

为了检测本文提出的这种极弱形式核估计的 SPH 方法的正确性, 我们模拟了具有精确解析解的在半无限体的自由表面上施加动态载荷引起的弹性波的传播问题。为了模拟半无限体, 我们取一个有限的六面体, 除了一个面(模拟半无限体的自由表面 $x_3 = 0$) 外, 其他五个面上都施加无反射边界条件。在自由表面的一小区域面积上施加一个垂直于表面的随时间呈三角形变化的脉冲载荷, 面上其余部分都为自由应力边界条件, 即应力值为零。所加荷载按如下式子给定:

$$T_z(x, t) = f(t) X(x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad (36)$$

式中

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ X(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & |x_1 - 1| < l \text{ 且 } |x_2 - 1| < l \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (37)$$

其中 l 为正常数, 为界定面上荷载区域的大小。

在模拟三维半无限体中弹性波的传播问题中, 本文使用三次样条的核函数:

$$W(v, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - v^2 + \frac{1}{2} v^3 \right) & 0 < v < 1 \\ \frac{1}{4} (2 - v)^3 & 1 < v < 2 \\ 0 & v > 2 \end{cases} \quad (38)$$

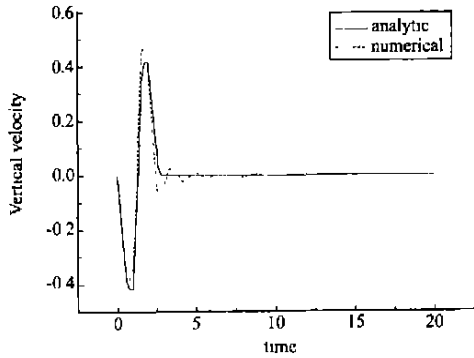


图 1 加载中心点的垂直方向速度

Fig 1 Vertical velocity at the load center

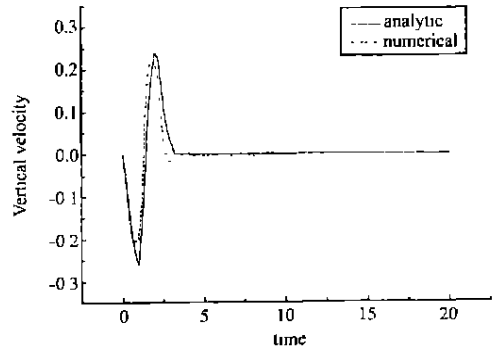


图 2 加载区域外某点的垂直方向速度

Fig 2 Vertical velocity at a point out of the load area

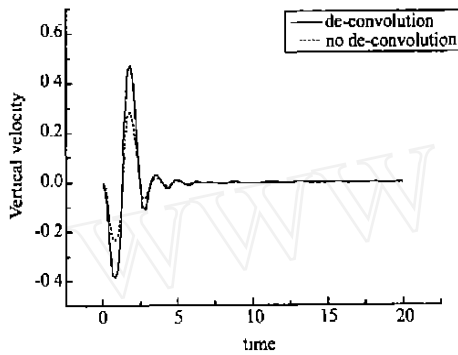


图 3 反卷积修正和未进行反卷积修正的计算结果的比较(加载中心点的垂直方向速度)

Fig 3 Compare the results with de-convolution and without de-convolution (vertical velocity of the load center)

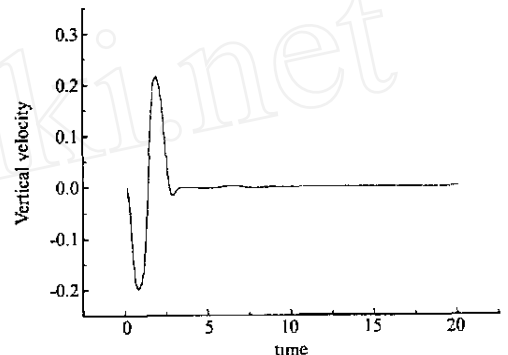


图 4 $\alpha = 0.5$ 时加载区中心点垂直方向的速度

Fig 4 Vertical velocity at the load center at $\alpha = 0.5$

其中

$$v = \frac{r}{h} = \frac{|\dot{x}_b - \dot{x}_a|}{h} \quad (39)$$

由计算可得

$$S_a = \frac{10h}{7} \text{ for all } a \quad (40)$$

模型的弹性常数(拉梅系数)取为 $\lambda = \mu = 1$, 密度 $\rho = 1$ 。图 1 和图 2 显示了数值解与解析解之间的对比关系(取 $l = 0.5$)。模型尺寸为 $7 \times 7 \times 7$, 粒子间距为 0.5, 共有 $15 \times 15 \times 15 = 3375$ 个实粒子, 荷载按式(34)和式(35)所示加在自由表面的中心, $l = 0.5$ 。模型边界外部加上两层间距为 0.5 的虚粒子, 核函数影响域 h 的值取为 0.5, 计算中式(31)的滤波修正系数 $\alpha = 0.1$, 并按式(33)对速度进行修正, 从图中可以看出, 在粒子间距较大时(半个横波波长)数值模拟的结果与解析解也能吻合得较好。

图 3 给出了进行了反卷积修正的计算结果和未进行反卷积修正的计算结果的比较, 可以看出反卷积修正大大地改善了结果的精度。

随着滤波修正系数 α 的取值增大, 速度曲线会更加光滑, 但振动的幅值会随之减小。图 4 显示的是 $\alpha = 0.5$ 时加载区域中心点的速度图。这种情况会随着粒子密度的增加而有所改善。应该指出当粒子的密度增加时, 解的修正对计算结果的影响也会随之变小。

9 结论与展望

这种极弱形式的 SPH 方法是我们用诸多 SPH 方法来模拟线弹性波的传播中综合效果最好的一种方法, 结果表明这种方法及其模拟的无反射边界能够正确地发挥作用。使用反卷积对结果进行修正的思想使得粒子间的距离可以相对较大。这种方法相比传统的 SPH 方法精度高, 且有同样快速的计算速度, 而相比基于变分法的 SPH 方法速度要快得多。

本文针对 SPH 方法中的几个热点问题进行了一些新的尝试, 通过验证得到了较好的结果。虽然这些只是一些初步的工作, 但从方法和思路或许能对 SPH 方法的发展起到一定的作用。文中给出的方法, 除极弱形式的核估计外, 均可直接应用于非线性问题。对于极弱形式的核估计, 若将非线性

的影响记入前一刻,即采用逐步更新的算法,也是可以用于求解非线性动力问题的,这是我们以后工作中需要尝试的内容。

参考文献(References):

- [1] LUCY L B. A numerical approach to the testing of fusion process[J]. *The Astronomical Journal*, 1997, **82**, 1013-1024
- [2] GNGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars [J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1997, **181**: 375-389.
- [3] LBERSKY L D, PETSCHKE A G. Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials[A]. Proceedings, The Next Free Lagrange Conf[C]. Springer-Verlag, N Y, 1991, **395**: 248-257.
- [4] RANDES P W, LBERSKY L D. Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**: 375-408
- [5] CHEN J K, BERAUN J E, JHC J. Completeness of corrective smoothed particle method for linear elastodynamics[J]. *Computational Mechanics*, 1999, **24**: 273-285
- [6] CHEN J K, BERAUN J E. A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **19**: 225-239
- [7] BONET J, KULASEGARAM S. Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **47**: 1189-1214
- [8] BONET J, KULASEGARAM S. Remarks on tension instability of Eulerian and Lagrangian corrected smooth particle hydrodynamics (CSPH) methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **52**: 1203-1220
- [9] LIU M B, LIU G R, ZONG Z, et al. Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology [J]. *Computer & Fluids*, 2003, **32**: 305-322
- [10] COHEN M, JENNINGS P C. Silent boundary methods for transient analysis[A]. *Computational Methods for Transient Analysis* [M]. North-Holland, New York, 1983

Application of smoothed particle hydrodynamics method to the simulations of elastic wave propagation in solid

DING Hua¹, LONG Liping², WU Yan-feng¹

(1. Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China;

2 Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A new version of SPH method is developed to solve the initial-boundary value problems for elastic wave propagation. In this algorithm, a very weak kernel estimate is used. In particular, the stress boundary conditions (especially the transmitting boundary condition) are invoked through residual terms in the integration by parts. The very weak kernel estimate avoids the double kernel estimate in the conventional residual method of SPH. The estimates of boundary particles are done by modified kernel function defined according to the local feature of a boundary. The final solution is sharpened by deconvolution in order to obtain reasonable results with relatively large particle distance. The conservative smoothing approach is used to stabilize the numerical procedure.

Key words: smoothed particle hydrodynamics; elastic wave propagation; transmitting boundary condition; deconvolution; conservative filtering