

折线裂纹和两相材料界面的相互作用*

陆建飞 蔡 兰

(江苏大学理学院, 镇江, 212013)

柳春图

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

摘 要 利用螺位错基本解建立了和界面相交的折线裂纹的 Cauchy 型积分方程. 根据奇异积分方程理论, 得出了确定折线裂纹和界面交点处的奇性应力指数的特征方程, 以及交点处各角形域内的奇性应力. 利用所得的交点处的奇性应力定义了折线裂纹和界面交点处的应力强度因子. 对所得积分方程进行数值求解, 可得裂纹端点以及裂纹和界面交点处的应力强度因子.

关键词 反平面, 折线裂纹, 积分方程, 界面

0 引言

裂纹和界面相交或接触问题, 由于其重要的理论和实际意义而得到不少学者的重视^[1-5]. Erdogan 等^[1-3]利用 Mellin 变换和 Cauchy 型奇异积分方程方法研究了平面和反平面条件下直线裂纹穿过两相材料界面的问题. Li 等^[4]研究了含有圆夹杂和裂纹的复合柱体的扭转问题. 最近, 陆建飞等^[5]利用复变函数方法和弱奇异积分方程方法研究了穿过圆形夹杂界面的曲线裂纹问题. 时至今日, 虽然有不少关于裂纹和界面相互作用问题的研究报道, 但不难看出, 以前对裂纹和界面相交问题的研究侧重于光滑裂纹, 而对于有限长折线裂纹和界面相交问题的研究尚未有文献报道.

本文利用复变函数和奇异积分方程方法研究折线裂纹和界面的相交问题. 首先, 利用两相材料中的螺位错基本解建立了和界面相交的折线裂纹的 Cauchy 型积分方程. 根据奇异积分方程理论^[6], 得出了确定折线裂纹和界面的交点处的奇性应力指数的特征方程, 以及交点处各角形域内的奇性应力. 利用所得的交点处的奇性应力定义了折线裂纹和界面交点处的应力强度因子. 对所得积分方程进行数值求解, 可得裂纹端点以及裂纹和界面交点处的应力强度因子.

1 基本解及控制方程

在反平面条件下位移和应力都可以用一个解析函数表示为^[7]

$$\begin{cases} \phi(z) = \mu w(x, y) + if(x, y) \\ \phi(z) = (z) = \sigma_x - i \sigma_y \\ f(x, y) = \int \frac{z}{z_0} ds \end{cases} \quad (1)$$

式中, μ 是材料的剪切弹性模量, σ_x 、 σ_y 是反平面状态的应力分量, $w(x, y)$ 为 z 向位移, $f(x, y)$ 为合力函数.

为了得到穿过界面的折线裂纹的控制方程, 必须建立图 1 所示的两相材料中的点螺位

* 中国博士后基金资助.

2001-08-09 收到第 1 稿, 2002-05-27 收到第 3 稿.

错基本解. 利用复函数方法^[8]可以得到图 1 所示作用在上半平面 t 处, 大小为 $2 H/\mu_1$ 的螺位错的解为

$$\begin{cases} 1(z) = \frac{iH}{t-z} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{iH}{\bar{t}-z}, & z \\ 2(z) = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{iH}{t-z}, & z \end{cases} \quad (2)$$

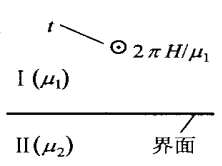


图 1 两相材料中的点螺位错

式中下标 1、2 分别表示上半平面和下半平面. 对于值为 $2 H/\mu_2$ 点螺位错作用在下半平面时, 类似地可以得到基本解为

$$\begin{cases} 1(z) = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{iH}{t-z}, & z \\ 2(z) = \frac{iH}{t-z} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{iH}{\bar{t}-z}, & z \end{cases} \quad (3)$$

式中 μ_1 、 μ_2 分别为上半平面和下半平面的剪切弹性模量.

假定在外力作用下, 裂纹表面自由, 则可以根据裂纹面上的“当地应力”和点螺位错基本解确定和界面相交问题的 Cauchy 型积分方程为

$$\begin{cases} \text{Im} \left[\frac{1}{i} \int_{L_1} \frac{f_1(t) dt}{t-z} + \frac{1}{i} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \int_{L_1} \frac{f_1(t) dt}{\bar{t}-z} - \frac{1}{i} \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \int_{L_2} \frac{f_2(t) dt}{t-z} e^{i(\dots)} \right] = \frac{1}{i} \text{Im} [(z) e^i], & z \in L_1 \\ \text{Im} \left[\frac{1}{i} \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \int_{L_1} \frac{f_1(t) dt}{t-z} e^{i(\dots)} - \frac{1}{i} \int_{L_2} \frac{f_2(t) dt}{t-z} - \frac{1}{i} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \int_{L_2} \frac{f_2(t) dt}{\bar{t}-z} \right] = \frac{1}{i} \text{Im} [(z) e^{i(+)}], & z \in L_2 \end{cases} \quad (4)$$

式中 α 、 β 分别为裂纹 L_1 、 L_2 对 x 轴的倾角(如图 2), 且 $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, L_1 、 L_2 的正向分别为从 o 到 A 和从 o 到 C .

$f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 分别为沿裂纹 L_1 、 L_2 未知的螺位错密度函数, $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 在 L_1 、 L_2 上满足 Holder 条件(端点除外), 式(4)中的奇异积分应理解为 Cauchy 主值意义下的积分. (z) 为裂纹不存在时无穷远处的应力所确定的复位函数. 式(4)即为穿过界面的折线裂纹的控制方程, 由于当 t 、 z 同时趋近界面时, 式(4)中 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 都存在奇异性, 所以式(4)所示的积分方程为广义 Cauchy 型奇异积分方程.

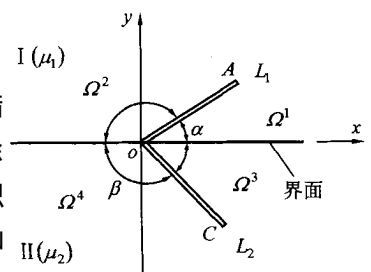


图 2 折线裂纹和界面相交问题

为了保证沿裂纹的位移单值条件, 则螺位错密度函数 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 必须满足方程

$$\int_{L_1} f_1(t) dt e^{-i} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_{L_2} f_2(t) dt e^{-i(+)} = 0 \quad (5)$$

上式为求解积分方程(4)的补充方程.

2 交点处奇异性应力指数的分析

为了求解所得的 Cauchy 型积分方程, 必须确定螺位错密度函数 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 在积分端点

的性态. 设螺位错密度函数 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 在 L_1 、 L_2 上满足条件

$$f_1(t) = \frac{f_1^*(t)}{t} e^i, \quad f_2(t) = \frac{f_2^*(t)}{t} e^{i(+)} \quad (6)$$

式中 α 为角点处奇性应力的奇异性指数, 且 $0 < \alpha < 1$, 当 $t \in L_1$ 时, $t = e^i$, 当 $t \in L_2$ 时, $t = e^{i(+)}$, 此外, $f_1^*(t)$ 、 $f_2^*(t)$ 在原点 o 的邻域内满足 Hölder 条件. 根据 Cauchy 型积分的端点性质得到式(4)所示积分方程的主部为^[6]

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\cos(\alpha) - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cos(\alpha - 2\beta + 2\gamma) \right] \frac{f_1^*(0)}{t} - \\ & \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cos[\alpha - (\beta - \gamma)(1 - \alpha)] \frac{f_2^*(0)}{t} = q_1^*(\alpha) \\ & - \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cos[\alpha - (\beta - \gamma)(1 - \alpha)] \frac{f_1^*(0)}{t} + \\ & \left[\cos(\alpha) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cos(\alpha - 2\beta + 2\gamma) \right] \frac{f_2^*(0)}{t} = q_2^*(\alpha) \end{aligned} \right. \quad (7)$$

式中 $q_1^*(\alpha)$ 、 $q_2^*(\alpha)$ 在交点处 o 有界. 对上式乘以因子 t 并且作 $t \rightarrow 0$ 的极限运算, 并利用 f_1^* 、 $f_2^*(0)$ 的齐次方程组系数行列式的性质, 得到确定交点处奇性应力指数的特征方程为

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\sin[\alpha - (\beta - \gamma)(1 - \alpha) + \beta] + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sin[\alpha + (\beta - \gamma)(1 - \alpha) + \beta] \right] \times \\ & \left\{ \sin[\alpha - (\beta - \gamma)(1 - \alpha) - \beta] + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sin[\alpha + (\beta - \gamma)(1 - \alpha) - \beta] \right\} = 0 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

式(8)即为确定交点处奇性应力指数的特征方程, 通过该方程可以根据几何参数和材料参数确定交点处的奇性应力指数. 此外, 根据式(7)得到 $f_1^*(0)$ 、 $f_2^*(0)$ 在点 o 所必须满足的联结条件为

$$\frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cos[\alpha - (\beta - \gamma)(1 - \alpha)] f_2^*(0) = \left[\cos(\alpha) - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cos(\alpha - 2\beta + 2\gamma) \right] f_1^*(0) \quad (9)$$

式(9)为求解积分方程(4)所必需的补充方程.

3 交点处奇性应力的分析及应力强度因子的定义

为了定义折线裂纹和界面的交点处的应力强度因子, 必须对折线裂纹和界面交点处角形域内的奇性应力进行分析, 此外, 角形域内的奇性应力的分布情况对界面的强度设计也具有重要意义. 根据式(1)可得极坐标下的复位函数和极坐标下应力组合的关系为

$$\sigma^*(z) = z - i z = (z_x - i z_y) e^i = (z) e^i \quad (10)$$

因此, 只要得到各角形域内的复位函数的表达式, 即可根据上式得到角形域内的奇性应力.

显然, 由裂纹 L_1 、 L_2 所确定的上半平面和下半平面的复位函数分别为

$$\left\{ \begin{aligned} (z) &= i \int_{L_1} \frac{f_1(t) dt}{t - z} e^{-i} + i \int_{L_2} \frac{f_2(t) dt}{t - z} e^{2i} + i \int_{L_2} \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{f_2(t) dt}{t - z} e^{-i(+)} \\ (z) &= i \int_{L_1} \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{f_1(t) dt}{t - z} e^{-i} + i \int_{L_2} \frac{f_2(t) dt}{t - z} e^{-i(+)} + i \int_{L_2} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{f_2(t) dt}{t - z} e^{2i(+)} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

式中的 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 在 L_1 、 L_2 上满足式(6)所示的条件, 则根据 Cauchy 型积分的端点性质和

式(11)以及式(7)得到角形域 ¹ 的奇性应力为

$$\begin{aligned}
 1^* (\rho, \theta) = & \frac{f_1^*(0) \sec[(\alpha - \beta)(1 - \nu)]}{\sin(\alpha)} e^{i(\alpha - \beta - \theta)} \times \\
 & \left\{ \sin[(\alpha - \beta)(1 - \nu) + \theta] + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sin[(\alpha + \beta)(1 - \nu) + \theta] \right\}, \quad 0 < \theta < \alpha - \beta \quad (12)
 \end{aligned}$$

² 域内的奇性应力为

$$\begin{aligned}
 2^* (\rho, \theta) = & \frac{f_1^*(0) \sec[(\alpha - \beta)(1 - \nu)]}{\sin(\alpha)} e^{i(\alpha - \beta - \theta)} \times \\
 & \left\{ \sin[(\alpha - \beta)(1 - \nu) - \theta] + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sin[(\alpha + \beta)(1 - \nu) + \theta] \right\}, \quad \alpha - \beta < \theta < \alpha \quad (13)
 \end{aligned}$$

³ 域内的奇性应力为

$$\begin{aligned}
 3^* (\rho, \theta) = & \frac{f_2^*(0) \sec[(\alpha - \beta)(1 - \nu)]}{\sin(\alpha)} e^{i(\alpha + \beta - \theta)} \times \\
 & \left\{ \sin[(\alpha - \beta)(1 - \nu) + \theta] + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sin[(\alpha + \beta)(1 - \nu) + \theta] \right\}, \quad \alpha + \beta < \theta < 2\alpha + \beta \quad (14)
 \end{aligned}$$

⁴ 域内的奇性应力为

$$\begin{aligned}
 4^* (\rho, \theta) = & \frac{f_2^*(0) \sec[(\alpha - \beta)(1 - \nu)]}{\sin(\alpha)} e^{i(\alpha + \beta - \theta)} \times \\
 & \left\{ \sin[(\alpha - \beta)(1 - \nu) - \theta] + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sin[(\alpha + \beta)(1 - \nu) + \theta] \right\}, \quad \alpha + \beta < \theta < 2\alpha + \beta \quad (15)
 \end{aligned}$$

从上述的奇性应力表达式可以看出,角形域 ¹、³ 和角形域 ²、⁴ 的奇性应力分别包含因子 $\sin[(\alpha - \beta)(1 - \nu) + \theta] + \sin[(\alpha + \beta)(1 - \nu) + \theta]$ 和 $\sin[(\alpha - \beta)(1 - \nu) - \theta] + \sin[(\alpha + \beta)(1 - \nu) + \theta]$, 式中 $\nu = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$. 显然, 上述两个因子的乘积便构成确定奇性指数的特征方程(9). 此外, 从特征方程(9)的结构并结合式(8)可以看出, 对于给定的几何和材料参数, 两个因子中有一个必须为零, 而另一个则不为零. 因此, 在反平面加载条件下对于给定的几何和材料参数, 只在折线裂纹的一侧存在奇性应力, 而另一侧则不存在奇性应力, 这一点与光滑裂纹和界面相交的情形类似^[5]. 例如, 对于 $\mu_1 > \mu_2$, $\alpha < \beta$, 且 $\alpha > \beta$ 的情形, 由于 $\sin[(\alpha - \beta)(1 - \nu) + \theta]$ 和 $\sin[(\alpha + \beta)(1 - \nu) + \theta]$ 均大于零, 因此, 在角形域 ¹、³ 内存在奇性应力而在 ²、⁴ 内奇性应力则为零.

有了各角形域的奇性应力以后, 可以利用奇性应力来定义交点处的应力强度因子. 在本文中, 利用两相材料界面上的剪应力定义交点处的应力强度因子, 即

$$K_3 = (2)^{-1/2} \tau(\rho, \theta) |_{\rho=0} \quad (16)$$

如果在角形域 ¹、³ 内存在奇性应力, 由于 ¹、³ 界面上的奇性应力相等, 因此利用式(12)和(16)得到交点处应力强度因子的表达式为

$$\begin{aligned}
 K_3 = & - \frac{(2)^{-1/2} f_1^*(0) \sec[(\alpha - \beta)(1 - \nu)]}{\sin(\alpha)} \sin(\alpha - \beta) \times \\
 & \left\{ \sin[(\alpha - \beta)(1 - \nu) + \theta] + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sin[(\alpha + \beta)(1 - \nu) + \theta] \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

如果在角形域 ²、⁴ 内存在奇性应力, 类似地可得其应力强度因子的表达式. 均匀介质中

的裂纹端点的应力强度因子按照通常的方法定义.

4 数值方法及算例

式(4)所示的积分方程是广义 Cauchy 型的积分方程,其未知函数在积分端点的奇异性指数可以通过式(8)计算得到.上述积分方程加上定解条件(5)、(9)即可进行数值求解.对广义 Cauchy 型的奇异积分方程,用 Gauss-Jacobi 型求积公式进行数值离散^[9],在计算中每根裂纹上均取 30 插值点进行计算.对上述积分方程进行数值求解后,可得螺位错密度函数的离散值,利用所得螺位错密度函数的离散值进行外插,即可得裂纹和界面交点处的应力强度因子以及裂纹端点的应力强度因子.

为了验证本文方法的正确性,把折线裂纹退化为光滑的直线裂纹和界面的相交问题,并且与文[3]中的表 6 进行了比较,比较结果如表 1 所示.从表 1 可以看出本文结果和文[3]的结果完全符合.

表 1 本文结果和文[3]结果的比较

b_2/b_1	0.5	1.0	2.0	20.0	0.5	1.0	2.0	20.0
	($\alpha_1 = 3/4$)	($\alpha_1 = 3/4$)	($\alpha_1 = 3/4$)	($\alpha_1 = 3/4$)	($\alpha_1 = 3/8$)	($\alpha_1 = 3/8$)	($\alpha_1 = 3/8$)	($\alpha_1 = 3/8$)
$K_{\theta 1}$	0.790	1.05	1.65	12.7	0.831	1.19	1.99	16.3
$K_{\theta 1}^*$	0.790	1.05	1.65	12.7	0.831	1.19	1.99	16.3
$K_{\theta 2}$	0.766	1.06	1.48	4.50	0.871	1.21	1.68	5.01
$K_{\theta 2}^*$	0.765	1.06	1.48	4.49	0.871	1.21	1.68	5.01
$K_{\theta 0}$	0.024 0	0.053 3	0.099 3	0.728	0.068 5	0.112	0.180	1.05
$K_{\theta 0}^*$	0.024 2	0.053 3	0.098 7	0.727	0.069 2	0.113	0.181	1.07

注: $K_{\theta 1}$, $K_{\theta 2}$, $K_{\theta 0}$ 为本文的结果; $K_{\theta 1}^*$, $K_{\theta 2}^*$, $K_{\theta 0}^*$ 为文献[3]的结果.

算例 计算图 2 所示的折线裂纹和界面相交问题.取 $\alpha = 3/4$,而 θ 则从 10° 到 170° 变化, μ_1/μ_2 分别取 20.0 和 0.05.假定裂纹 L_1 和 L_2 的长度分别为 $2a$ 和 $2b$,取 $a/b = 1.0$.给定上半平面无穷远处的应力为 $c = \sigma_{xx} - i \sigma_{xy} = S$,显然,对于下半平面 $c = \sigma_{xx} - i \sigma_{xy} = S(\mu_2/\mu_1)$.裂纹端点 A 、 C 及交点处 O 的应力强度因子可以表示为

$$K_{3A,C} = S \sqrt{a} K_{3A,C}^*, \quad K_{3O} = S(a) K_{3O}^* \tag{18}$$

计算所得的 K_{3A}^* 、 K_{3O}^* 、 K_{3C}^* 的值如表 2 所示.

表 2 本文算例的数值结果

	10°	30°	50°	70°	90°	110°	130°	150°	170°
($\mu_1/\mu_2 = 20.0$)	0.341 9	0.339 3	0.332 1	0.327 3	0.321 6	0.314 2	0.302 9	0.280 0	0.190 0
K_{3A}^*	0.414 8	0.830 5	1.142 7	1.340 3	1.406 0	1.333 1	1.127 9	0.806 6	0.375 1
K_{3O}^*	0.026 9	0.005 2	0.015 3	0.033 1	0.047 3	0.057 5	0.062 9	0.062 2	0.048 9
K_{3C}^*	0.038 4	0.044 7	0.048 8	0.050 9	0.051 3	0.050 0	0.047 2	0.042 9	0.036 7
($\mu_1/\mu_2 = 0.05$)	0.465 2	0.397 1	0.309 0	0.190 9	0.027 9	0.148 9	0.273 4	0.365 0	0.435 2
K_{3A}^*	0.589 5	0.853 2	1.090 4	1.249 1	1.302 4	1.236 9	1.065 1	0.812 9	0.525 9
K_{3O}^*	0.291 3	0.067 9	0.257 9	0.815 7	1.919 4	0.240 4	0.643 4	0.773 1	0.884 9
K_{3C}^*	18.161 0	18.323 0	18.423 0	18.465 0	18.453 0	18.304 0	18.100 0	17.863 0	17.600 0

参 考 文 献

- 1 Erdogan F, Biricikoglu V. Two bonded half plates with a crack going through the interface. *Int J Engng Sci*, 1973, 11:745 ~ 766
- 2 Erdogan F, Cook T S. Antiplane shear crack terminating at and going through a bimaterial interface. *International Journal of Fracture*, 1974, 10(2):227 ~ 240
- 3 Bassani J L, Erdogan F. Stress intensity factors in bonded half planes containing inclined cracks and subjected to antiplane shear loading. *Int J of Fracture*, 1979, 15(2):145 ~ 158
- 4 Li YL, Hu S Y, Tang R J. Torsion of composite cylinder containing crack terminating at bimaterial interface. *Int J Frac*, 1993, 63:11 ~ 20
- 5 Lu Jianfei, Wang Jianhua, Shen Weiping. Antiplane circular inclusion with a curved crack crossing the boundary. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2000, 13(3):271 ~ 276
- 6 Muskhelishvili N I. *Singular Integral Equations*. Netherlands: Noordhoff, Groningen, 1953
- 7 Sih G C. Stress distribution near internal crack tip for longitudinal shear problem. *J Appl Mech*, 1965, 32:51 ~ 58
- 8 穆斯海里什维立著, 赵惠元译. 数学弹性力学的几个基本问题. 北京: 科学出版社, 1965
- 9 Erdogan F. Mixed boundary value problem in mechanics. *Mechanics Today*, V4, Nemat-Nasser S. ed., Oxford: Pergamon Press, 1978

THE INTERACTION BETWEEN A BROKEN CRACK AND THE INTERFACE OF A BI-MATERIAL UNDER ANTIPLANE LOADING

Lu Jianfei Cai Lan

(*School of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013*)

Liu Chuntu

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080*)

Abstract The point screw dislocation solutions of bimaterial are used to establish the Cauchy type integral equations of a broken crack crossing the bimaterial interface. The singular stress order at the intersection between the broken crack and the interface is obtained by using the singular integral equations theory, and the singular stresses of angular regions near the intersection are obtained similarly. By using the obtained singular stress near the intersection, the stress intensity factors at the intersection are defined. Through numerical solution of the integral equations, the stress intensity factors at the intersection and at the tips of the broken crack are obtained.

Key words antiplane, broken crack, integral equation, interface