关于边坡稳定分析的通用条分法的探讨(理论分析部分)*

丁 桦 张均锋 郑哲敏

(中国科学院力学研究所 北京 100080)

摘要 针对二维和三维边坡，通过对极限平衡分析结果所依赖的各种因素的分析，探讨了确定安全系数的必要和充分条件。建立了针对不同假设条件的安全系数的解析表达式。这些结果可以使得对极限平衡方法结果的上、下限的估计成为可能。

关键词 岩石力学，边坡稳定性分析，极限平衡，上、下限

分类号 P 642.22 **文献标识码** A **文章编号** 1000-6915(2004)21-3684-05

DISCUSSIONS ON THE GENERALIZED SLICING METHOD FOR STABILITY ANALYSIS OF SLOPES

Ding Hua，Zhang Junfeng，Zheng Zhemin

(*Institute of Mechanics*，*The Chinese Academy of Sciences*， *Beijing* 100080 *China*)

Abstract Limit equilibrium slicing methods have been widely used for assessing the stability of natural and man-made slopes. Many methods have been developed so far. They involve various assumptions with respect to the inter-slice forces which lead to different results. In order to get rid of these inconsistencies，attempts is made to incorporate the commonly used slicing methods into a generalized frame work. However，what is the most reasonable result is still unknown. Therefore，a generalized frame work is proposed to find a reasonable bound of solutions of slicing methods for both the two-dimensional and three-dimensional cases. By analyzing the influences of various conditions on the results of stability analysis，the existence and uniqueness of the safety factor are discussed. Analytic formulas of the safety coefficient under different conditions are established. In addition，variation formulas of the safety coefficient are obtained for determining a proper bound of the safety factor.

Key words rock mechanics，stability analysis of slope，limit equilibrium，upper and lower bound

1 引 言

滑坡是一种常见的重大自然灾害。滑坡和泥石流每年都要给人民的生命财产带来巨大的损失。同时，滑坡也会对许多工程建设造成严重影响。边坡问题是个古老而普通的问题，在水利、水电、铁道、公路、建筑各工程领域中，滑坡事故是最常见的、重大的自然灾害。及时预报、合理分析、妥善处理滑坡灾害还存在着很多问题与困难。今后，随着西部开发中大型工程建设的日益增多，高边坡问题也将愈加突出。目前，边坡稳定性计算中使用的方法主要是极限平衡方法和有限元方法，在理论和实践上各有各的优势和劣势。作者对极限平衡方法进行了讨论，提出了对这一方法的思考，所涉及的是极限平衡方法中的垂直条分法。

2003年12月8日收到初稿，2004年1月10日收到修改稿。

* 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2002CB412706)资助课题。

作者 丁 桦 简介：男，43岁，博士，1982年毕业于大连工学院工程力学系，现任研究员，主要从事应用固体力学方面的研究工作。

垂直条分法是边坡稳定性分析中最常用的方法之一，具有重要的地位[1~6]。目前，较为完备的方法是Morgenstern和Price提出的方法以及陈祖煜在此基础上发展的通用条分法[7]。早期的一些方法，如Bishop法、Spencer法等，可以看作是它在一定假设条件下的简化。陈祖煜对目前三维极限平衡方法的现状作了评述，指出三维分析的重要性以及各类方法的特点和局限性。在众多的条分法中，其核心问题就是如何对条间力进行假设，从而使问题封闭可解。目前，已有一些研究者在试图建立一个统一的框架来包容这些方法[8~10]。

由于垂直条分法仅考虑了力(和力矩)的平衡关系，不涉及材料的变形，因而，要得到封闭的解答必须对滑体的受力特征进行一定的假设。首先，从力和力矩平衡条件出发，以一种新的方式给出一般情况下安全系数所应满足的关系(这种表示关系对于三维情况有着类似于二维情况的简捷的表达方式)。然后，借助这种关系，可以探讨边坡稳定性分析中的上、下限的估计方法。

2 二维问题

2.1 基本关系

与传统的做法相同，假设在边坡滑裂面上剪应力处处等于折减后的材料强度，且材料的强度遵从Coulomb-Mohr准则：

$$\left.\begin{aligned}&\tau=\lambda\tau_0\\&\tau_0=c+\sigma_{\mathrm{n}}\tan\varphi\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中：c，σ_{n}，φ，τ 分别为边坡滑裂面上的粘聚力、法向应力、内摩擦角和剪应力；λ 为强度折减系数，它是通常采用的安全系数的倒数。关于滑裂面上的材料强度的分布总是假设为已知的，这不存在什么问题。但是，滑裂面上的强度折减系数处处相等是一个很强的假设：当 $\lambda=1$ 时，可以认为边坡失稳启动时滑裂面上处处达到强度极限，在物理上这对整体滑动是可以的；但 $\lambda=1$ 时，不能保证滑裂面上的应力分布是真实的应力分布，此时，应该是一个人为设置的边界，不过，此时对于偏离 $\lambda=1$ 的定性的判断应该是正确的，而定量的描述存在某种模糊性。

在前面的假设成立的前提下，一旦滑裂面和滑裂面上的法向应力已知，就可以通过滑裂面上的作用力与外力的整体平衡求得强度折减系数。在这些假设都成立的情况下，只有一个未知变量 λ，因而，只需要一个方向上的整体平衡方程。对于滑裂面的确定，一般是通过求解最大折减系数(最小安全系数)或是通过确定坡体薄弱面的位置来完成的。而滑裂面上的法向应力的确定则有许多不同的方法，这些方法或是在一定的假设下直接求出法向应力，或是在一定的假设下给出某种等价关系。除了有的学者直接假设法向应力的分布形式外，几乎所有其他假设所涉及的都是滑坡体内部垂直面上作用力的假设，它们或是这些作用力的大小，或是这些作用力的方向，或是这些作用力的作用点。这些假设从某种程度上讲替代了材料的本构关系，使得人们可以通过局部的平衡关系得到所需要的解答。作者将探讨这些假设和一些因素(滑坡体内部垂直面上的作用力的大小、方向、作用点)间的关系。

对于宽度为 dx 的无限薄的一个垂直条块，滑裂面上的力在水平方向(x 方向)和铅垂方向(y 方向)上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned}&F_x\mathrm{d}x=(\tau\cos\alpha-\sigma_{\mathrm{n}}\sin\alpha)\frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}\\&F_y\mathrm{d}x=(\tau\sin\alpha-\sigma_{\mathrm{n}}\cos\alpha)\frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中：α 为滑裂面切线方向与水平方向的夹角。

设 $\frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}x}$ 为坡体所受各种体积力(地震力、重力等)的合力沿 x 和 y 方向上的分布函数，$\frac{\mathrm{d}q_x}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}q_y}{\mathrm{d}x}$ 为坡体表面所受外力沿 x 和 y 方向上的分布函数，X为坡体内铅垂面上的剪切力(二维情况下只有 y 方向上的)的合力(坡体内铅垂面上的合力在铅垂方向上的投影)，E 为坡体内铅垂面上的合力在水平方向上的投影，则通过 x 和 y 方向上的力的平衡关系可以得到

$$\left.\begin{aligned}&F_x=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}q_x}{\mathrm{d}x}\\&F_y=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}q_y}{\mathrm{d}x}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

首先，通过水平方向上的整体平衡关系，即式(3)中 x 方向上的局部平衡关系在坡体所占区间[a，b]上的积分，可以得到存在统一的强度折减系数 λ 的必要条件：

$$\lambda\int_a^b(c+\sigma_{\rm n}\tan\varphi){\rm d}x=\int_a^b\sigma_{\rm n}\tan\alpha{\rm d}x+G_x(b)+E(b)-E(a) \tag{4}$$

而

$$G_x(x)=\int_a^x\left(\frac{{\rm d}W_x}{{\rm d}x}+\frac{{\rm d}q_x}{{\rm d}x}\right){\rm d}x \tag{5}$$

式中：$G_x(x)$ 为由坡体起始点 a 和 x 处铅垂面所切割的一部分坡体上水平外力的合力；$G_x(b)$ 为所有外载在水平方向上的合力；$E(a)$，$E(b)$ 为水平推力 E 在坡体边界上的值，一般情况下为0。

式(4)是一种存在统一的强度折减系数 λ 的必要条件。其中 $G_x(b)$，$E(a)$，$E(b)$，$c(x)$，$\varphi(x)$ 和 $\alpha(x)$ 都可以由已知条件得到。一旦得到 $\sigma_{\rm n}$ 的分布 $\sigma_{\rm n}(x)$ (满足一定的合理性条件)，式(4)就成为存在统一的强度折减系数 λ 的充分条件，并且可以求得

$$\lambda=\frac{\int_a^b\sigma_{\rm n}\tan\alpha{\rm d}x+G_x(b)+E(b)-E(a)}{\int_a^b(c+\sigma_{\rm n}\tan\varphi){\rm d}x} \tag{6}$$

利用式(2)中的定义，由式(3)中 y 方向上的平衡方程可以得到

$$\sigma_{\rm n}(\lambda，x)=\sigma_{\rm n}^0(\lambda，x)+\Delta\sigma_{\rm n}(\lambda，x，{\rm d}X/{\rm d}x) \tag{7}$$

而

$$\sigma_{\rm n}^0(\lambda，x)=\frac{\dfrac{{\rm d}G_y}{{\rm d}x}-\lambda c\tan\alpha}{1+\lambda\tan\alpha\tan\varphi} \tag{8}$$

$$\Delta\sigma_{\rm n}(\lambda，x，{\rm d}X/{\rm d}x)=\frac{{\rm d}X/{\rm d}x}{1+\lambda\tan\varphi\tan\alpha} \tag{9}$$

$$\frac{{\rm d}G_y}{{\rm d}x}=\frac{{\rm d}W_y}{{\rm d}x}+\frac{{\rm d}q_y}{{\rm d}x} \tag{10}$$

若令

$$\varLambda\left(\lambda，\frac{{\rm d}X}{{\rm d}x}\right)=\frac{\int_a^b\sigma_{\rm n}(\lambda，x，\dfrac{{\rm d}X}{{\rm d}x})\tan\alpha{\rm d}x+G_x(b)+E(b)-E(a)}{\int_a^b\left(c+\sigma_{\rm n}(\lambda，x，\dfrac{{\rm d}X}{{\rm d}x})\tan\quad\right){\rm d}x} \tag{11}$$

它是一个依赖于参数 λ 的关于坡体内垂直面上的剪力分布函数 X 的泛函，则式(6)变为

$$\lambda=\varLambda(\lambda，{\rm d}X/{\rm d}x) \tag{12}$$

同样，可以通过坡体内垂直面上水平力的平衡条件得到法向应力与水平力的关系，再利用垂直方向的整体平衡和边界条件得到类似于式(12)的依赖于参数 λ 的关于 E 的泛函方程：

$$\lambda=\varGamma(\lambda，{\rm d}E/{\rm d}x) \tag{13}$$

利用相对于无限薄垂直条块底边中点的力矩平衡关系可以得到水平力的作用点高度 h 与 X 和 ${\rm d}E/{\rm d}x$ 的关系，进而可以得到依赖于参数 λ 的关于 h 的泛函方程：

$$\lambda=\varGamma(\lambda，h，{\rm d}h/{\rm d}x) \tag{14}$$

原则上，当给定与无限薄垂直条块间作用力的大小、方向、作用点中任意一项相关的条件都能得到类似于式(12)的关系。如果这些关系满足一定的合理性条件并存在唯一的关于折减系数 λ 的解，那么，就应该是存在统一的强度折减系数 λ 的充分条件。

2.2 特殊情况

当假设无限薄垂直条块间剪力为0，即条间作用力为水平方向时，可以得到

$$\lambda=\varLambda(\lambda，0) \tag{15}$$

式(15)就是简化Janbu法的通过滑裂面积分表示的关于折减系数的非线性方程。

当假设无限薄垂直条块间作用力的作用点在条块的1/3处时，就可以得到Janbu法的关于折减系数的非线性方程：

$$\lambda=\varGamma(\lambda，(y-z)/3，{\rm d}[(y-z)/3]/{\rm d}x) \tag{16}$$

式中：y，z 分别为坡体下表面和上表面的位置坐标。

2.3 关于折减系数的变分关系

当求得在一定假设下的强度折减系数 λ 的解后，通过变分关系可以得到一定范围内假设的误差对强度折减系数 λ 的影响。通过对式(4)取变分，可以得到

$$\delta\lambda=\frac{1}{\int_a^b\tau_0{\rm d}x}\int_a^b(\tan\alpha-\lambda\tan\varphi)\delta\sigma_{\rm n}{\rm d}x \tag{17}$$

相对于简化Janbu法，有

$$\delta\sigma_{\rm n}\approx\varDelta\sigma_{\rm n}=\frac{{\rm d}X/{\rm d}x}{1+\lambda\tan\varphi\tan\alpha} \tag{18}$$

这样就有

$$\lambda=\varLambda^0(\lambda)=\frac{\int_a^b\sigma_{\rm n}^0(\lambda，x)\tan\alpha{\rm d}x+G_x(b)+E(b)-E(a)}{\int_a^b(c+\sigma_{\rm n}^0(\lambda，x)\tan\alpha){\rm d}x} \tag{19}$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{\int_a^b \tau_0 \mathrm{d}x} \int_a^b \tan(\alpha - \varphi') \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \tag{20}$$

式中：$\tan\varphi' = \lambda\tan\varphi$。

如果事先对 $\mathrm{d}X/\mathrm{d}x$ 有所估计，就可以通过式(20)对 λ 的变化范围的上、下限作估计了。

3　三维情况

设 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_x$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_y$ 分别为坡体垂向无限小条带的相对于坐标增量 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 的2条边，则

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{S}_x &= (\mathrm{d}x，0，\sin\alpha_x \mathrm{d}x) = \mathrm{d}x(1，0，\sin\alpha_x) \\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}_y &= (0，\mathrm{d}y，\sin\alpha_y \mathrm{d}y) = \mathrm{d}y(0，1，\sin\alpha_y) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中：α_x 和 α_y 分别为滑裂面切线方向与水平 x 方向和水平 y 方向的夹角。

这样，坡体垂向无限小条带底部滑裂面的法向为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{A} \tag{22}$$

其中，

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i}(-\sin\alpha_x) + \boldsymbol{j}(-\sin\alpha_y) + \boldsymbol{k} \tag{23}$$

$$A = |\boldsymbol{N}| = \sqrt{(\sin^2\alpha_x + \sin^2\alpha_y + 1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{24}$$

式中：$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为 x，y，z 轴方向上的单位向量；A为坡体垂向无限小的条带底部滑裂面的面积。

设 $\boldsymbol{t}$ 为坡体垂向无限小条带底部滑裂面处坡体的滑动方向，则由与 $\boldsymbol{n}$ 垂直的条件和归一化条件可得

$$\left.\begin{aligned} t_x \sin\alpha_x + t_y \sin\alpha_y - t_z &= 0 \\ \sqrt{t_x^2 + t_y^2 + t_z^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

滑裂面上的法向和切向应力分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= -\sigma_{\mathrm{n}} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{T} &= -\tau\,\boldsymbol{t} = -\lambda(c + \sigma_{\mathrm{n}}\tan\varphi)\boldsymbol{t} = -\lambda\tau_0 \boldsymbol{t} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

这样，滑裂面上作用力在 x，y，z 方向上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} F_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= (-\lambda\tau_0 t_x - \sigma_{\mathrm{n}} n_x) A_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ F_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= (-\lambda\tau_0 t_y - \sigma_{\mathrm{n}} n_y) A_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ F_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= (-\lambda\tau_0 t_z - \sigma_{\mathrm{n}} n_z) A_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

则 x，y，z 方向上的平衡条件可以表示为

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} + H_x \\ F_y &= \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}y} + H_y \\ F_z &= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} + H_z \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

式中：E_x，E_y 分别为坡体垂向无限小条带 x，y 方向的面上的合力的水平分量；X，Y 分别为坡体垂向无限小条带 x，y 方向的面上的剪力；H_x，H_y，H_z 分别为外载在 x，y，z 方向上的分量在 x，y 平面上的分布函数。

引入坡体垂向无限小条带上的水平力在坡体边界为0的假设，可以得到

$$\left.\begin{aligned} \iint_S (\lambda t_x \tau_0 + \sigma_{\mathrm{n}} n_x) A_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= W_x \\ \iint_S (\lambda t_y \tau_0 + \sigma_{\mathrm{n}} n_y) A_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= W_y \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

式中：S 为滑裂面在 x，y 平面上的的投影；W_x，W_y 分别为外载合力在 x，y 方向的投影。

在整体滑动的前提下，可以假设坡体滑动方向在 x，y 平面内是一致的，即

$$\frac{t_x}{t_y} = \zeta = \mathrm{const} \tag{30}$$

当然，根据滑坡的可能形式也可以对滑动方向做不同的假设，如假设存在一主滑方向和主滑轴，沿主滑轴两边滑动方向可以满足一定的分布规律等。这样，一旦得到 σ_{n} 的分布 $\sigma_{\mathrm{n}}(x，y)$ (满足一定的合理性条件)，就可以通过式(25)，(29)，(30)求得强度折减系数 λ 和滑动方向参数 ζ。

利用式(28)中 z 方向的平衡条件可以得到

$$\begin{aligned} &\sigma_{\mathrm{n}}(\lambda，\zeta，\mathrm{d}X/\mathrm{d}x，\mathrm{d}Y/\mathrm{d}y，x，y) = \\ &\quad \sigma_{\mathrm{n}}^0(\lambda，\zeta，x，y) + \Delta\sigma_{\mathrm{n}}(\lambda，\zeta，\mathrm{d}X/\mathrm{d}x， \\ &\quad \mathrm{d}Y/\mathrm{d}y，x，y) \end{aligned} \tag{31}$$

其中，

$$\sigma_{\mathrm{n}}^0(\lambda，\zeta，x，y) = $$

$$-\frac{H_z + \lambda A_0 c(t_x \sin\alpha_x + t_y \sin\alpha_y)}{n_z + \lambda A_0 \tan\varphi(t_x \sin\alpha_x + t_y \sin\alpha_y)} \tag{32}$$

$$\Delta\sigma_{\mathrm{n}}(\lambda，\zeta，\mathrm{d}X/\mathrm{d}x，\mathrm{d}Y/\mathrm{d}y，x，y) = $$

$$-\frac{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x+\mathrm{d}Y/\mathrm{d}y}{n_z+\lambda A_0\tan\varphi(t_x\sin\alpha_x+t_y\sin\alpha_y)} \tag{33}$$

$$t_x=\Phi_x(\zeta,\ x,\ y)=\frac{\zeta}{\Psi(\zeta,\ x,\ y)} \tag{34}$$

$$t_y=\Phi_y(\zeta,\ x,\ y)=\frac{1}{\Psi(\zeta,\ x,\ y)} \tag{35}$$

$$\Psi(\zeta,\ x,\ y)=\sqrt{1+\zeta^2+(\zeta\sin\alpha_x+\sin\alpha_y)^2} \tag{36}$$

利用式(31)～(36)在式(29)中消去t_x，t_y，σ_{n}，可以得到2个带有参数λ，ζ的关于函数$\mathrm{d}X/\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}y$的泛函方程，形式上可记为

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_x(\lambda,\ \zeta,\ \mathrm{d}X/\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}Y/\mathrm{d}y)=0\\ \Sigma_y(\lambda,\ \zeta,\ \mathrm{d}X/\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}Y/\mathrm{d}y)=0\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

与二维情况一样，要使强度折减系数λ的必要条件式(37)成为充分条件，需要引入一定的假设来确定σ_{n}或$\mathrm{d}X/\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}y$，或其他相关的量。如简化Janbu法，有

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_x(\lambda,\ \zeta,\ 0,\ 0)=0\\ \Sigma_y(\lambda,\ \zeta,\ 0,\ 0)=0\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

同样，类似于二维情况，也可以给出关于折减系数的变分关系。

4 总 结

给出了不同参数影响下强度折减系数所需满足的解析表达式，特别是三维情况下的结果。通过强度折减系数的变分表达式，人们可以在一定的假设条件下对强度折减系数的变化范围进行估计，增强在一些不确定因素影响下对强度折减系数的判断。相关的计算实例将拟另文给出。

参 考 文 献

1 Ching R K H，Fredlund D G. Some difficulties associated with the limit equilibrium method of slices[J]. Can. Geotech. J.，1983，20(4)：661～672

2 Duncan J M. State of art：limit equilibrium and finite element analysis of slopes[J]. J. Geotech. Engng.，ASCE，1996，122(7)：577～596

3 Michalowski R L. Slope stability analysis：a kinematical approcach[J]. Geotechnique，1995，45(2)：283～293

4 Morgenstern N R，Price V. The analysis of the stability of general slip surface[J]. Geotechnique，1965，15(1)：79～93

5 Sarma S K. Stability analysis of embankments and slopes[J]. Geotechnique，1973，23(3)：423～433

6 Yu H S，Salgado R，Sloan S W，et al. Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability[J]. J. Geotech. and Geoenviron. Engng.，ASCE，1998，124(1)：1～11

7 陈祖煜. 土质边坡稳定分析[M]. 北京：中国水利电力出版社，2003

8 Espinoza R D，Bourdeau P L P C，Muhunthan B. Unified formulation for analysis of slopes with general slip surface[J]. J. Geotech. Engng.，ASCE，1994，120(7)：1 185～1 204

9 Fredlund D G，Krahn J. Comparison of slope stability methods of analysis[J]. Can. Geotech. J.，1977，14(3)：429～439

10 Zhu D Y，Lee C F，Jiang H D. Generalised framework of limit equilibrium methods for slope stability analysis[J]. Geotechnique，2003，53(1)：1～19