

应用半权函数法计算界面裂纹的应力强度因子*

马开平 柳春图

(中国科学院力学研究所 北京 100080)

摘要:应用半权函数法求解双材料界面裂纹的应力强度因子,得到以半权函数对参考位移与应力加权积分的形式表示的应力强度因子。针对特征值为复数的双材料界面裂纹裂尖应力和位移场,设置与之对应特征值为 λ 的位移函数,即半权函数。半权函数的应力函数满足平衡方程,应力应变关系,界面的连续条件以及在裂纹面上面力为0;半权函数与裂纹体的几何尺寸无关,对边界条件没有要求。由功的互等定理得到应力强度因子 K 和 K' 的积分形式表达式。本文计算了多种情况下界面裂纹应力强度因子的算例,与文献结果符合得很好。由于裂尖应力的振荡奇异性已经在积分中避免,只需考虑绕裂尖远场的任意路径上位移和应力,即使采用该路径上较粗糙的参考解也可以得到较精确的结果。

关键词:双材料;界面裂纹;应力强度因子;半权函数法;平面问题

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

1 引 言

在界面裂纹问题的研究中,Williams^[1]首先通过特征函数展开的方法分析了裂纹尖端附近的应力场并发现了振荡奇异性的存在,Rice和Sih^[2]采用应力强度因子的概念表述了界面裂纹的应力场,至此,求解具体结构载荷下的应力强度因子就成为了界面裂纹问题的关键。在求解界面裂纹应力强度因子的方法中,常采用的有边界元法,边界积分方程解法,围线积分法,权函数法以及边界配置法等。

权函数法是在70年代(Bueckner^[3],Rice^[4])提出的具有断裂力学特征的计算应力强度因子的方法,它给出了解耦裂纹几何和载荷配置两类影响的途径。只要对确定的裂纹体求解到了对应的权函数,就可以对任何载荷使用简单的积分完成应力强度因子的计算。对于界面裂纹情况,Gao^[5,6]将权函数法应用到了双材料界面问题并由裂纹引起的界面错移讨论了裂尖的振荡特性,Banks-Sills^[7]将该方法作

了针对具体问题的计算分析,申连喜,余寿文^[8]给出了界面裂纹尖端附近或无限大体半无限界面裂纹问题的权函数的显式表达式。然而,由于权函数是与裂纹体的几何尺寸相关的,在应用权函数法的过程中,必须针对具体的几何构形,求解相应的权函数,其难度大致相当于求解一个裂纹问题。在几何构形相当复杂的情况下,求解一个权函数,其数学上的难度是很大的。同时对于有限大体,由于满足边界条件的困难,很难求得一个理想的权函数。

柳春图和张端中在1991年提出了半权函数^[9],使用与权函数类似的形式,用积分表达出应力强度因子,而且半权函数与裂纹体的几何尺寸无关,对边界条件没有要求。该方法在计算单材料型的平面问题中得到了很好的应用。本文将半权函数法加以推广,并应用该方法计算界面裂纹的应力强度因子。首先由Williams展开得到裂尖的应力和位移场,针对其复特征值 λ ,设置与之对应特征值为 λ 的位移函数,即半权函数。半权函数的应力函数满足平衡方程,应力应变关系,界面的连续条件以及在裂纹

* 基金项目:国家自然科学基金资助,基金编号:19872066 来稿日期:2002-11-14 修回日期:2003-02-25

第一作者简介:马开平,男,1974年生,汉族,四川宜宾,博士研究生,1998年9月进入中科院力学所攻读博士学位。

面上面力为 0;半权函数与裂纹体的几何尺寸无关,对边界条件没有要求。从功的互等定理出发,结合从裂纹下缘到上缘绕裂尖任意路径的位移与应力的远场参考解,得到界面裂纹的应力强度因子 K 和 K 积分形式的表达式。由于裂尖的奇异性对积分路径上的远场参考解影响较小,并且在积分中避开了裂尖的奇异性,因此即使采用较粗糙的模型或方法所得到的积分路径上远场参考解的近似值,也可以得到精度较高的 K , K 。权函数法针对不同结构需要不同的权函数,而半权函数法对于界面裂纹的任意情况都可以采用统一的半权函数,因而可以扩大求解范围并减小计算难度。

2 半权函数的提出

2.1 裂尖位移与应力场

对于含两种材料的裂纹问题,两种材料区域的应力函数设为如下形式

$$U_i = \text{Re}\{r^{+1} F_i(\theta, \phi)\}, (i = 1, 2) \quad (1)$$

其中的 F_i 为

$$F_i = A_i \sin(\theta + 1) + B_i \cos(\theta + 1) + C_i \sin(\theta - 1) + D_i \cos(\theta - 1) \quad (2)$$

式中 A_i, B_i, C_i, D_i 为复待定系数, 将由特征方程确定,相应的位移场和应力场由

$$\begin{aligned} u_{irr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \theta^2}, \\ u_i &= \frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2}, \\ u_{ir} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_{ir} &= \text{Re}\left\{ \frac{r^2}{8 G_i} [-4 (k_i + 1) F_i + (k_i + 1) (F_i + (k_i + 1)^2 F_i)] \right\}, \\ u_i &= \text{Re}\left\{ \frac{r}{8 G_i (k_i - 1)} [-4 (k_i - 1) F_i - (k_i + 1) (F_i'' + (k_i + 1)^2 F_i)] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

求得,为

$$\begin{aligned} u_{ir} &= \text{Re}\{ -r [(k_i + 1) (A_i \sin(\theta + 1) + B_i \cos(\theta + 1)) + (k_i - 3) (C_i \sin(\theta - 1) + D_i \cos(\theta - 1))] / (2 G_i) \}, \\ u_i &= \text{Re}\{ -r [(k_i + 1) (A_i \cos(\theta + 1) - B_i \sin(\theta + 1)) + (k_i + 1) (C_i \cos(\theta - 1) - D_i \sin(\theta - 1))] / (2 G_i) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{irr} &= \text{Re}\{ -r^{-1} [(k_i + 1) (A_i \sin(\theta + 1) + B_i \cos(\theta + 1)) + (k_i - 3) (C_i \sin(\theta - 1) + D_i \cos(\theta - 1))] \}, \\ u_i &= \text{Re}\{ (k_i + 1) r^{-1} [A_i \sin(\theta + 1) + B_i \cos(\theta + 1) + C_i \sin(\theta - 1) + D_i \cos(\theta - 1)] \}, \\ u_{ir} &= \text{Re}\{ -r^{-1} [(k_i + 1) (A_i \cos(\theta + 1) - B_i \sin(\theta + 1)) + (k_i - 1) (C_i \cos(\theta - 1) - D_i \sin(\theta - 1))] \} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $k_i = \begin{cases} 3 - 4 \nu_i & \text{plane strain} \\ (3 - \nu_i) / (1 + \nu_i) & \text{plane stress} \end{cases}$
 G_i 为剪切模量

裂纹面条件

$$\begin{aligned} u_{1r} / r = u_{2r} / r = 0, \\ u_{1\theta} / r = u_{2\theta} / r = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

两种材料交界线上的连续条件

$$\begin{aligned} u_{1r} / r = u_{2r} / r = 0, u_{1\theta} / r = u_{2\theta} / r = 0 \\ u_{1\theta} / r = u_{2\theta} / r = 0, u_{1r} / r = u_{2r} / r = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

将式(5)代入条件式(6)、(7),并定义复应力强度因子为

$$\bar{K} = K - iK = \lim_{r \rightarrow 0} (u_{ir} / r) = 0 r^{1-k_i} \quad (8)$$

得到各待定系数的表达式

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-iA(R+1)}{1+k_1}, B_1 = \frac{A(R-1)}{1+k_1}, \\ C_1 &= iA, D_1 = A, \\ A_2 &= \frac{-iA(1+R)}{1+k_2}, B_2 = \frac{A(1-R)}{1+k_2}, \\ C_2 &= iAR, D_2 = AR \end{aligned}$$

其中 $R = \frac{k_1 + 1}{1 + k_2}$ 为双材料界面裂纹的材料常数, $\nu = G_1 / G_2$ 为剪切模量比,

$$k_i = \frac{1}{2} + i \frac{\ln R}{2} \text{ 为特征值, } A = \frac{\bar{K}}{(1+R)}$$

考察裂纹前沿附近的应力为

$$-i u_{ir} / r = 0 = \bar{K} r^{-1} \quad (9)$$

裂纹面间相对位移

$$u_{1\theta} + i u_{2\theta} = (u_r + i u_{\theta}) / r = \frac{-iA \sin(\theta)}{Q} r \quad (10)$$

式中 $Q = \frac{G_1}{(1+k_1)}$

由于 \bar{K} 为复数,因此当 $r \rightarrow 0$ 时公式(9),(10)体现了裂尖的应力场的振荡奇异性与裂纹面的相互嵌入现象。当 $G_1 = G_2, \nu_1 = \nu_2$ 时,应力与位移场可以退化为单材料的表达式。

再看界面的连续问题,在文献[2]中针对无限大板界面裂纹的情况提出在界面上引入应变分量 ϵ_x 连续的条件,由于该条件本身并不是自然满足的,因此由应力应变关系对应力分量作了一些规定以使 ϵ_x 连续,在文献[12~13]和[14]的计算中沿用了这些应力的规定。在本文中,在裂尖附近,界面上的 ϵ_x 是自然严格满足的,在远离裂尖的界面上的连续问题可以在近似计算中考虑,例如有限元法在界面处的连接可以满足连续条件,这样就避免了不必要的规定,可以使计算的范围扩大。

2.2 半权函数的获得

由半权函数定义,需设置特征值为 λ 的位移函数,其应力函数满足平衡方程,应力应变关系,裂纹面上面力为0,对于界面裂纹还需要满足界面的位移和应力连续条件。现给出本问题的半权函数有如下表示

$$u_{ir}^{(s)} = \text{Re}\{r^{-\lambda} [(1-\lambda)(A_i^{(s)} \sin(\lambda-1) - B_i^{(s)} \cos(\lambda-1)) + (\lambda+k_i)(C_i^{(s)} \sin(\lambda+1) - D_i^{(s)} \cos(\lambda+1))] / (2G_i)\}$$

$$u_i^{(s)} = \text{Re}\{r^{-\lambda} [(1-\lambda)(A_i^{(s)} \cos(\lambda-1) + B_i^{(s)} \sin(\lambda-1)) + (\lambda-k_i)(C_i^{(s)} \cos(\lambda+1) + D_i^{(s)} \sin(\lambda+1))] / (2G_i)\} \quad (11)$$

半权函数的系数为

$$A_{1,1}^{(s)} = -iM \frac{\lambda-R}{\lambda-1}, \quad B_{1,1}^{(s)} = M \frac{\lambda+R}{\lambda-1},$$

$$C_{1,1}^{(s)} = iM, \quad D_{1,1}^{(s)} = -M,$$

$$A_{2,1}^{(s)} = iM \frac{1-\lambda-R}{\lambda-1}, \quad B_{2,1}^{(s)} = M \frac{1+\lambda-R}{\lambda-1},$$

$$C_{2,1}^{(s)} = iMR, \quad D_{2,1}^{(s)} = -MR \quad (12)$$

其中 M 为任意复数,可以看出半权函数的系数不是唯一的。 M 的选取在后文所提到的积分计算过程和关于 K 和 K 的二元一次方程组的求解中起作用,而不会影响到应力强度因子计算结果。

适当选取 M 以确定半权函数的系数可以不经 K 和 K 的二元一次方程组的求解,直接得到应力强度因子的积分形式。以下系数的表达式中,上标 (s) 表示半权函数,下标第一个数字表示材料号,第二个数字表示半权函数组号。

第一组半权函数的系数为(M 取为 Q)

$$A_{1,1}^{(s)} = -\frac{iQ(\lambda-R)}{\lambda-1}, \quad B_{1,1}^{(s)} = \frac{Q(\lambda+R)}{\lambda-1},$$

$$C_{1,1}^{(s)} = iQ, \quad D_{1,1}^{(s)} = -Q,$$

$$A_{2,1}^{(s)} = -\frac{iQ(\lambda-1)}{\lambda-1}, \quad B_{2,1}^{(s)} = \frac{Q(\lambda+1)}{\lambda-1},$$

$$C_{2,1}^{(s)} = iQR, \quad D_{2,1}^{(s)} = -QR \quad (13)$$

第二组半权函数的系数为(M 取为 iQ)

$$A_{1,2}^{(s)} = \frac{Q(\lambda-R)}{\lambda-1}, \quad B_{1,2}^{(s)} = \frac{iQ(\lambda+R)}{\lambda-1},$$

$$C_{1,2}^{(s)} = -Q, \quad D_{1,2}^{(s)} = -iQ,$$

$$A_{2,2}^{(s)} = \frac{Q(\lambda-1)}{\lambda-1}, \quad B_{2,2}^{(s)} = \frac{iQ(\lambda+1)}{\lambda-1},$$

$$C_{2,2}^{(s)} = -QR, \quad D_{2,2}^{(s)} = -iQR \quad (14)$$

3 用半权函数表示应力强度因子 K_I, K_{II}

考虑一个受任意载荷的含界面裂纹的平面结构,取出该结构中的任意一个包含部分裂纹面的区域 Ω ,在区域的边界中,除去两个裂纹面 C_s 以外的边界为 Γ ,即该区域的边界为 $\partial V = C_s + \Gamma$,沿裂纹尖端为中心挖取一个半径为 R 的小圆,其边界以 C_R 表示,设被挖掉裂纹尖端以后的区域为 $\bar{\Omega}$,裂纹面为 \bar{C}_s ,则有:

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow 0} \bar{\Omega} = \Omega \\ \lim_{R \rightarrow 0} \bar{C}_s = C_s \end{cases} \quad (15)$$

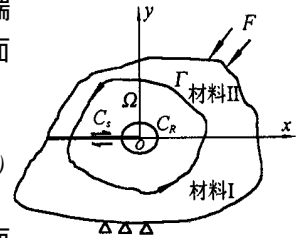


图1 双材料界面裂纹与积分路径

对于分别为两组位移,面力和体力的表达式此处 (u_i, p_i, f_i) 和 $(u_i^{(s)}, p_i^{(s)}, f_i^{(s)})$,利用功的互等定理,我们可以得到

$$\int_{\bar{C}_s} f_i^{(s)} u_i d\bar{x} + \int_{\bar{C}_s + C_R} p_i^{(s)} u_i ds = \int_{\bar{C}_s} f_i u_i d\bar{x} + \int_{\bar{C}_s + C_R} p_i u_i ds \quad (16)$$

变换上式并略去体积力我们得到

$$\int_{C_R} (p_i^{(s)} u_i - p_i u_i^{(s)}) ds + \int_{\bar{C}_s} (p_i^{(s)} u_i - p_i u_i^{(s)}) ds = \int_{\bar{C}_s} (p_i u_i^{(s)} - p_i^{(s)} u_i) ds \quad (17)$$

假设 (u_i, p_i) 为前面所述的真实位移和面力的近似值,在裂纹面上必然有 $p_i = 0$; $(u_i^{(s)}, p_i^{(s)})$ 为半权函数所得到的位移和面力,在裂纹面同样有 $p_i^{(s)} = 0$ 。略去 C_s 上的积分,(16)式变为

$$\int_{C_R} (p_i^{(s)} u_i - p_i u_i^{(s)}) ds = \int_{C_R} (p_i u_i^{(s)} - p_i^{(s)} u_i) ds \quad (18)$$

转换到极坐标下,有

$$C_R \int_0^R (r_{rr}^{(s)} u_r + r^{(s)} u - r_{rr} u_r^{(s)} - r u^{(s)}) ds$$

$$= \int_0^R (r_{rr}^{(s)} u_r + r^{(s)} u - r_{rr} u_r^{(s)} - r u^{(s)}) ds \quad (19)$$

将(5),(11)式代入(18)中,注意到不同材料的分段积分,当 R 趋近于 0 分别对于第一,二组半权函数有

$$\begin{cases} K = \int_0^R (r_{rr,1}^{(s)} u_r + r^{(s)} u - r_{rr} u_{r,1}^{(s)} - r u^{(s)}) ds \\ K = \int_0^R (r_{rr,2}^{(s)} u_r + r^{(s)} u - r_{rr} u_{r,2}^{(s)} - r u^{(s)}) ds \end{cases} \quad (20)$$

注意半权函数的第二个下标为半权函数组号。

至此,我们得到了用积分形式表示的双材料界面裂纹的应力强度因子。与权函数相比,半权函数与边界条件无关,与之相应放松了限制条件,使得半权函数更容易得到。同时可以用一个半权函数求取不同几何构形的裂纹体的应力强度因子,本文设置的两组半权函数可以求解一般情况下的任意载荷与结构形式的界面裂纹应力强度因子。为了求取应力强度因子,还必须获得所求的加载状态下的物体的应力和位移。由于半权函数中已经包含了裂尖附近的奇异性,因此即使放松对裂纹尖端奇异性数值分析的精确度要求,也可以由任意独立的积分回路上的位移与应力近似值得到应力强度因子较精确的结果。还应当指出的是,裂纹尖端的奇异性与界面的特殊性质仅仅是结构的一个局部现象,同时随着 r 的增大以及偏离界面位置,这些特性的作用迅速减小,因此采用绕裂尖回路积分的方式所得到的应力强度因子是可以满足计算精度的。

4 算 例

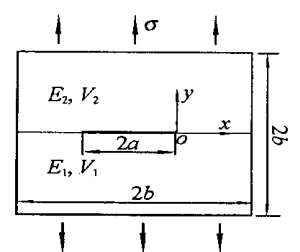
在以下的算例中,本文采用有限元软件 ANSYS 计算积分路径上的近似值,有限单元采用二维平面应变的 8 节点单元(ANSYS 中的 plane82 单元),积分路径选取为从裂纹下缘绕裂尖至裂纹上缘的一段弧形,该段弧形半径大于裂尖最大单元的尺寸。此处选取弧形路径是为了计算方便,针对不同情况例如不同的结构载荷或不同的近似值计算方法,可以选取任意的积分路径。用该路径上点的位移和应力计算值经坐标转换后代入(20)式计算出 K 和 K 。

在有限元网格的划分和积分路径选取方面,一

般说来,有限元网格越密计算精确程度越高,但是在积分路径较为合理的情况下,这种精度增高的趋势并不明显,也就是说通过较为稀疏的网格划分与合理的路径选取相结合可以减少有限元计算的工作量。根据裂尖的应力应变场的特性以及计算经验,在保证结构其他部分计算精度的前提下,只要积分路径至裂尖的最小尺寸(此处都为圆弧半径)大于在该处的一个网格尺寸,并且积分路径不过于靠近结构的边界,计算结果都是可以接受的。在本文的计算中,出于构模和计算简便的考虑,一般都选取 ANSYS 中的自动划分网格,并选取圆弧积分路径都能在径向上至少包含一个网格。

4.1 无限大板中心界面裂纹

对于无限大板的情况,本文在有限元构模中,令板的尺寸为裂纹尺寸的 20 倍,以近似为无限大,如图 2 所示, $a = 1\text{m}$, $b = 20\text{m}$, $\sigma = 1\text{kN/m}^2$, $E_1 = 1\text{kN/m}^2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$,



计算平面应力状态的情况并且由问题的对称性作了简化。对应于文献[2,8],考虑不同的弹性模量比 E_2/E_1 ,列出结果于表 1,括号外为 $F = K \sqrt{2} / \sqrt{a}$,括号内为 $F = K \sqrt{2} / \sqrt{a}$ 。由计算结果可以看出,对于 K 最大误差不超过 1%, K 最大误差为 3%,显示出了较好的精度。

表 1 无限大双材料板中心界面裂纹应力强度因子

E_2/E_1	本文	文献[10]	解析解[2]
1	1.000	1.009	1.000
3	0.995(-0.0746)	0.999(-0.0822)	0.988(-0.0724)
10	0.973(-0.1178)	0.981(-0.1289)	0.968(-0.1171)
100	0.949(-0.1362)	0.968(-0.1401)	0.953(-0.1391)
1000	0.945(-0.1380)	0.957(-0.1535)	0.952(-0.1415)

4.2 裂尖应力振荡性特例与复合应力强度因子的讨论

一旦无量纲的界面材料参数 R 和 ν 确定下来,则构成界面裂纹体的两种材料的关系也就是唯一的,由 R 的定义可知其取值范围为 $(1/3, 3)$,极值分别对应 $\nu = 0$, $\nu = 0$ 和 $\nu = 0$, $\nu = 0$ 。在此范围中的一般情况下,由(9),(10)

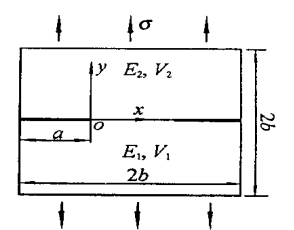


图 3 双材料含双边界面裂纹板

式可以看出裂尖应力的振荡性以及裂纹面的嵌入现象,当 $R = 1$ 的时候,特征值 $= 1/2$,位移场和应力场为

$$\begin{aligned}
 u_{ir} &= \frac{r^{1/2}}{4 G_i} [- K (\cos \frac{3}{2} + (1 - 2 k_i) \cos \frac{1}{2}) + \\
 &\quad K (3 \sin \frac{3}{2} + (1 - 2 k_i) \sin \frac{1}{2})], \\
 u_i &= \frac{r^{1/2}}{4 G_i} [K (\sin \frac{3}{2} - (1 + 2 k_i) \sin \frac{1}{2}) + \\
 &\quad K (3 \cos \frac{3}{2} - (1 + 2 k_i) \cos \frac{1}{2})], \\
 i_{rr} &= \frac{r^{-1/2}}{4} [K (- \cos \frac{3}{2} + 5 \cos \frac{1}{2}) + \\
 &\quad K (3 \sin \frac{3}{2} - 5 \sin \frac{1}{2})], \\
 i &= \frac{r^{-1/2}}{4} [K (\cos \frac{3}{2} + 3 \cos \frac{1}{2}) - \\
 &\quad 3 K (\sin \frac{3}{2} + \sin \frac{1}{2})], \\
 i_r &= \frac{r^{-1/2}}{4} [K (\sin \frac{3}{2} + \sin \frac{1}{2}) + \\
 &\quad K (3 \cos \frac{3}{2} + \cos \frac{1}{2})], \tag{21}
 \end{aligned}$$

与单材料情况平面复合型断裂问题相比较区别在于位移场表达式中的材料常数不同,而应力场是相同的。

裂纹尖端前沿附近的应力为

$$- i_r /_{=0} = \overline{K} r^{-1/2} \tag{22}$$

裂纹面间相对位移

$$r + i = \frac{-i \overline{K} r^{1/2}}{Q} \tag{23}$$

这时由材料界面间力学失配引起的裂尖应力的振荡性以及裂纹面的嵌入现象消失,可以认为此时的应力强度因子 K , K 同单材料情况下一样表示了 I 型(张开型,对称型)断裂和 II 型(滑移型,反对称型)断裂,这与王自强^[15]所述的界面断裂的重要特征是一致的,而与 Rice 和 Sih^[2]的阐述有区别。本文认为即使 R 不等于 1,应力强度因子的类型以及力学意义仍然与单材料情况一致,表示为纯 I 型和纯 II 型应力强度因子,以下用算例进行说明。针对图 2 和图 3 所示的中心裂纹板和双边裂纹板,令 $E_1 = 1300\text{pa}$, $\nu_1 = 0.3$, 取值从 0.5 到 10,板端部受 1pa 的均匀拉力,裂纹长度 $a = 1\text{m}$,板宽 $b = 2\text{m}$ 。分别选取 $R = 0.5, 0.9, 1, 1.1$ 计算应力强度因子随

的变化,绘制 $F = \sqrt{F^2 + F^2}$ 和 F / F 的曲线图(图 4,图 5)。

从图 4 和图 5 中可以看出,对于单向拉伸情况

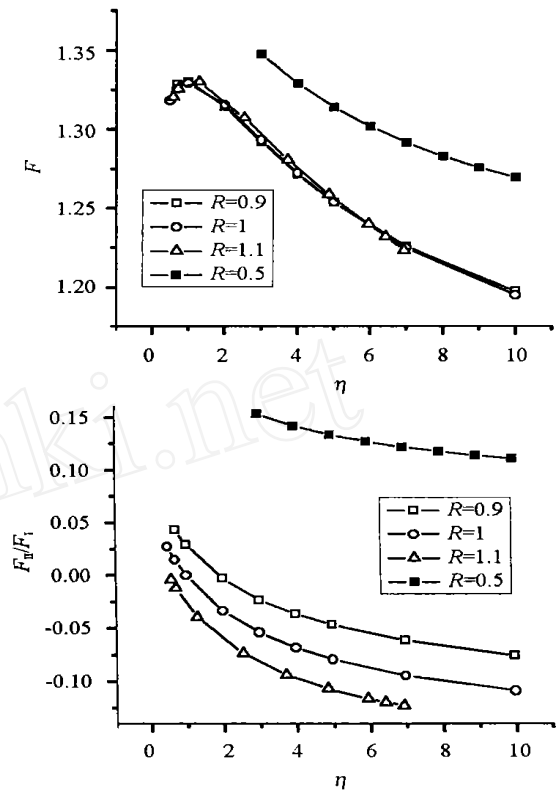


图 4 双材料矩形板中心界面裂纹应力强度因子

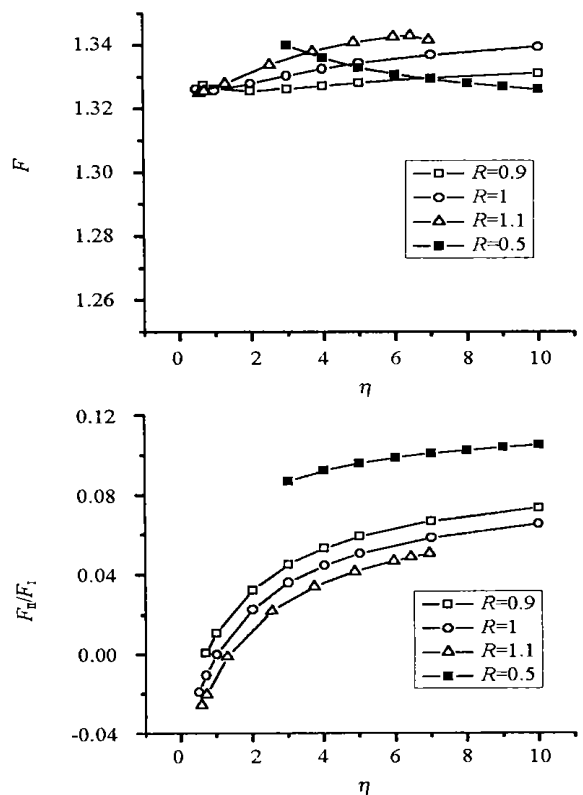


图 5 双材料矩形板双边界面裂纹应力强度因子

下不同的 R 对应的 F 和 F / F 随 η 的变化趋势是一致的,相互间对应的数值没有突变的情况,可以推断其力学意义是一致的,即 K 与 K 在 $R = 1$ 时

仍表示了拉伸和剪切的应力强度因子;界面材料常数 R 和 ν 对 F 的影响不大,而对 F_1 / F_2 影响较大,同样 R 的情况下, ν 越偏离 1,即 $\ln \nu$ 的绝对值越大,滑移型应力强度因子的影响越大但 F_1 / F_2 趋于稳定值。

4.3 有限元网格划分与计算精度

为了验证半权函数法计算精度的可靠性,本文分别对图 2 和图 3 的结构采用不同粗细的网格划分进行计算,选取 $R = 0.5$, $\nu = 10$, 具体计算中对应的材料参数为 $E_1 = 1300\text{pa}$, $\nu_1 = 0.3$, $E_2 = 118.5\text{pa}$, $\nu_2 = 0.185$ 。较为粗糙的网格节点数为 75,单元数为 18,自由度数为 137(图 6 左图);而在 4.2 中计算用到的网格划分较为细密,节点数为 1112,单元数 343,自由度数为 2181(图 6 右图)。两者的计算结果比较如下

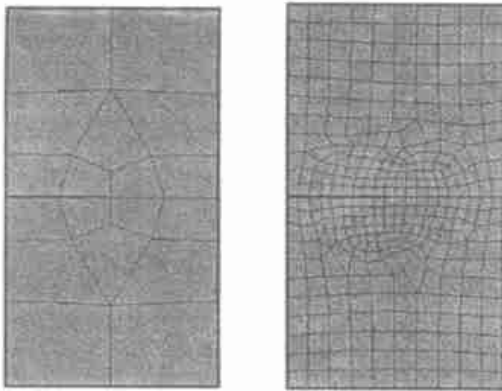


图 6 有限元计算网格

表 2 网格划分的精度比较

结构形式	计算值	粗糙网格	细密网格	偏差
中心	F	1.2389	1.2692	2.4%
裂纹	F_1 / F_2	0.1029	0.1112	7.5%
双边	F	1.2953	1.3261	2.3%
裂纹	F_1 / F_2	0.1144	0.1051	8.9%

半权函数法计算的精度取决于积分路径上参考解的精确程度,然而从本算例可以看出,即使采用非常粗糙的有限元模型所得到的参考解,也能得到精度较高的应力强度因子解,这无疑可以简化模型减少计算量。

5 结 论

本文对一般界面裂纹平面问题进行了分析,得到裂尖应力位移场的表达式,该表达式在应变分量 ϵ_x 上的连续性是自然满足的,减少了限制条件;得

到对应于不同材料满足半权函数基本条件的两组函数,并以该两组半权函数推导出应力强度因子 K_I , K_{II} 相互独立的表达式;采用本文的方法计算了多种情况的应力强度因子,在可供比较的结果上都与文献符合得很好;从应力强度因子的推导过程可以看出,对于任意位置裂纹以及任意多个裂纹,都具有统一的半权函数,能得出满意的结果;由于裂尖的应力振荡奇异性已经在方法中得到充分的考虑并加以排除,因此在用诸如有限元等数值方法计算远场解时可以集中于结构本身的构模,而对于裂尖部分的模型只需考虑坐标系的转换,以及网格与积分路径的尺寸即可;从算例结果中,看出尽管有裂尖应力的振荡奇异性存在,此处定义的 K_I 和 K_{II} 仍然可以对应拉伸和剪切的裂纹情况;本文采用的方法计算简单,实用性较好。

参 考 文 献

- Williams M. L. The Stresses around a fault or crack in dissimilar media[J], Bull Seism Soc Am. 1959, 49(2): 199 ~ 204
- Rice J. R., Sih G. C., plane problems of cracks in dissimilar media [J], J Appl Mech, Trans ASME. Series E, 1965, 32: 418 ~ 423
- Bueckner H. F. Mechanics of Fracture 1[M], G. C. Sih (ed.). 1973. Chapter 5
- Rice J. R., Some remarks on elastic crack - tip stress fields[J], Int J Solids Structure, 1972, vol. 8, pp. 751 ~ 758
- Gao H. Weight function analysis of interface crack: mismatch versus oscillation[J], J Appl Mech, 1991, 58: 931 ~ 938
- Gao H. Weight function method for interface crack in anisotropic bi-materials[J], Int J Fracture, 1992, 55(2): 139 ~ 158
- Banks-Sills L. Weight functions for interface cracks[J], Int J Fracture, 1993, 60(1): 89 ~ 95
- 申连喜,余寿文. 界面裂纹问题中的权函数方法[J], 固体力学学报, 1995, 16(2): 171 ~ 174
- Liu C T, Zhang D Z. Semi - weight function method in fracture mechanics[J], Int J Fracture. 1991, 48: R3 ~ R8
- 龙驭球. 新型有限元引论[M], 清华大学出版社, 1992
- 张明,姚振汉,杜庆华,楼志文. 双材料界面裂纹应力强度因子的边界元分析[J], 应用力学学报, 1999, 16(1): 21 ~ 26
- Chen-chin Hong, Morris Stern. The computation of stress intensity factors in dissimilar materials[J], J Elasticity. 1978, 8(1): 21 ~ 34
- 杨晓翔,匡震邦. 求解界面裂纹应力强度因子的围线积分法[J], 上海力学, 1996, 17(1): 10 ~ 21
- 黎在良,王元汉,李廷芥. 断裂力学中的边界数值方法[M], 地震出版社, 1996
- 王自强. 界面断裂力学简介与展望[J], 力学与实践, 1991, 13(4): 1 ~ 8

Analysis on the Fluid-solid Coupled Flow in Low Permeability Fractured Reservoir

Liu Jianjun^{1,2} Pei Guihong¹

(Department of Civil Engineering of Wuhan Polytechnic University Wuhan 430023)¹

(Institute of Rock and Soil Mechanics of the Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071)²

Abstract : During the development of low permeability reservoir, interaction between fluid flow and rock deformation is obvious. The paper develops an equivalent continuum model adapted to low permeability fracture reservoir, combining fluid mechanics in porous medium and elastic-plastic theory. A fluid-solid coupling mathematical model is given. The model not only reflects the porosity change of matrix, but also the permeability change due to fracture's open and close. Via the simulation results, porosity and permeability changes and its effect on oil development are studied.

Keywords: *Low permeability reservoir, fluid-solid interaction, porosity, permeability, numerical simulation.*

Free Vibration of Doubly Periodic Ring Stiffened Infinite Cylindrical Circular Shell in Water

Chen Junming^{1,2} Huang Yuying²

(Wuhan University of Technology)¹ (Huazhong University of Science & Technology)²

Abstract : This paper is concerned with the free vibration of a submerged stiffened thin cylindrical circular elastic shell with doubly periodically spaced rings in the context of the coupling effect between medium and structure. The equations of motion for the free vibration of the coupling system are derived by the use of Kennard's thin shell theory and Helmholtz equation and the coupling conditions on the surface of the shell as well as Dirac-function. The differential equations are solved by means of Fourier integral transformation. Moreover, introducing two operator functions and further using the periodicity of the functions, the dispersion equation of the system is built. Using a method of searching along the real wavenumber axis, the free propagation waves in the structure can be obtained. The effects of fluid medium and ring parameters on the frequency parameters are investigated.

Keywords: *Stiffened cylindrical shell, Coupling effect, Free vibration, Operator function, Free propagation wave.*

Semi-weight Function Method on Computation of Stress Intensity Factors in Dissimilar Materials

Ma Kaiping Liu Chuntu

(Institute of Mechanics, Chinese Academic Sciences, Beijing, 100080, China)

Abstract : Semi-weight function method is used and developed in this paper to solve the problem of two bonded

dissimilar materials containing a crack along the bond. Expressions of stress and displacement fields are obtained. Strain component ϵ_x is naturally continuous throughout the entire plate. Two sets of analytical expression of semi-weight functions, which satisfy conditions of continuity across interface, equilibrium equation, stress and strain relationship, $u_i \sim r^{-1/2}$ near the crack tip and the traction free on the crack surface, are obtained. Integral expression of fracture parameters, K_I and K_{II} , are obtained from reciprocal work theorem with semi-weight functions and approximate displacement and stress values on any integral path around crack tip. The calculation results of applications show that among high precision calculation methods, compared with the weight function method, this method provides applicable analytical expressions of semi-weight functions and in less restrict conditions. Compared with finite element method, it needs fewer amounts of calculation and simple and convenient FEA model.

Keywords: *dissimilar materials, interface crack, stress intensity factors, semi-weight function method, plane fracture problems.*

The Explicit Method for Calculating Surges in Throttled Surge Tank and Simple Tank Following Load Rejection

Zhang Zhichang Liu Songjian Liu Yafei

(Xi'an University of Technology Shaanxi Xi'an 710048)

Abstract: In recent years, the methods for calculating surges in surge tanks mainly consist of chart method and numerical simulation method. The explicit method for calculating surges in the surge tanks concerning the resistance item has not been seen. The explicit method for calculating surges in throttled surge tank and simple tank following load rejection has been derived by use of Thaler Series Expansion from the basic formulation of surge tank. Not only the procession of the fluctuation of the water level in the surge tank, but also the first and the second surges in the surge tank can be calculated.

Keywords: *Simple surge, throttled surge, tank, explicit computation, procession of the fluctuation of the water level.*

Improvement of the Accuracy of Computation for the Discrete Time Transfer Matrix Method of Multibody System

Li Chunming Rui Xiaoting

(Nanjing University of Science & Technology Nanjing 210014)

Abstract: The movement of multi-rigid-body system interconnected by smooth hinge moving in space and plane are deeply studied with the discrete time transfer matrix method of multibody system. The methods for improving the accuracy and stability of computation for this method are presented and the corresponding transfer matrix of multi-endpoint rigid body is derived. The central idea is to design the iteration for angle coordinates, which can be expressed accurately. Other methods are, such as 1. increasing the high-order terms of the Taylor series in the geometric equations; 2. choosing properly the linear method of velocity and acceleration and 3. deciding