第 35 卷 第 4 期
2003 年 7 月
力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA
Vol. 35, No. 4
July, 2003

近岸非平整海底上耗散动力系统的广义波作用量守恒方程[1)]

黄 虎

(上海大学上海市应用数学和力学研究所，上海 200072)

(中国科学院力学研究所 LNM 国家重点实验室，北京 100080)

摘要 为刻划近岸波 - 流 - 海底相互作用耗散动力系统的多种复杂作用机制，着眼于波浪对近岸大尺度变化环境流作用和考虑多变海底地形 (可典型地刻划为由慢变水深和快变水深构成) 的影响，由基于黏性流体 Navier-Stokes 方程的平均流方程，建立了近岸耗散动力系统的广义波作用量守恒方程，从中提出垂向速度波作用量和耗散波作用量这两种新概念，使得它们和经典的波作用量相互间达成了一种互补、协调而又主次分明的更为广泛的守恒形式. 从而把波作用量这一经典概念从理想的平均流守恒系统引申到实际的平均流耗散系统 (即广义守恒系统) 中去，为解释沿岸过程和应用于近海、海岸工程提供了一个理论基础.

关键词 耗散动力系统，波作用量守恒，平均流方程，非平整海底， Navier-Stokes 方程

引 言

当波浪从深海向近岸浅水区域传播时，复杂的环境流系 (例如，潮流、径流、沿岸流、波生流等)、多变的海底地形 (非平整海底) 与波浪一起形成波 - 流 - 海底相互作用的最为普遍的近岸现象，产生多重非线性效应 (例如，高次谐波， Bragg 散射)，在自然界中演化成为一种典型的耗散动力系统，涉及到众多的耗散动力因素，例如，破碎波，海底摩擦力和自由表面风作用应力等. 在理论上处理这种复杂的动力系统时，人们往往将其描述成非耗散的，由此派生出多种守恒定律，其中最为深刻和独特的当属波作用量守恒定律 [1~3]. 它比通常的能量、动量守恒定律更具有普遍性，因而使得波作用量 (wave action) 成为水波动力学最为重要和基本的概念之一 [4]. 实际上，波作用量守恒定律同样适用于刻画在一般移动介质中非耗散的波动系统.

迄今为止，在我们这个物质世界里所观察到的绝大部分经典过程都属于不可逆的耗散动力系统 [5]. 因此，在当前十分有必要重新审视、考察某些经典的守恒定律及其相关的概念 [6,7]，作出某种扩展，以将其纳入到实际的耗散动力系统中去. 为此，本文着眼于波作用量守恒，在黏性流体 Navier-Stokes 方程的理论框架下，建立了近岸波 - 流 - 海底相互作用耗散动力系统的广义波作用量守恒方程.

1 质量、动量和能量的时间平均流方程

潮汐、风暴潮和风浪是近岸冲淤演变的主要动力因素，而前两者在时空上的变化尺度远远大于第三者. 在研究风浪对这些大尺度变化环境流的作用时，目前常用的主要有两种方法：平均 Lagrange 函数方法 [8]；对流体运动方程沿垂向积分，并依风浪周期作时间平均 [9]. 第二种方法能容易地表述种种物理过程、概念及其意义，现在我们就按照此种方法，从黏性流动的 Navier- Stokes 控制方程出发，以得到各种平均流运动方程 [10].

设黏性流动的时间、空间坐标分别为 t 和 $(\boldsymbol{X}, z)$，其中 $\boldsymbol{X} \equiv (x, y) \equiv (x_1, x_2)$ 表示水平坐标，垂向坐标 z 竖直向上为正. $z=0$ 表示自由表面静水位， $z=-h(\boldsymbol{X})$ 则表示静止海底水深，可假定由慢变水深 $h_0(\boldsymbol{X})$ 和快变水深 $h_1(\boldsymbol{X})$ 构成 [11]，即：$h(\boldsymbol{X}) = h_0(\boldsymbol{X}) + h_1(\boldsymbol{X})$. 假定流体的自由表面位移 $\zeta(\boldsymbol{X}, t)$，水平速度分量 $u_i(\boldsymbol{X}, z, t)$ 和垂向速度分量 $w(\boldsymbol{X}, z, t)$ 各自由其平均流分量和波动分量构成，即

$$\zeta(\boldsymbol{X}, t) = \bar{\zeta}(\boldsymbol{X}, t) + \tilde{\zeta}(\boldsymbol{X}, t), \quad \langle \tilde{\zeta}(\boldsymbol{X}, t) \rangle = 0 \tag{1}$$

2001-11-09 收到第一稿， 2003-03-27 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10272072)、国家杰出青年科学基金资助项目 (49825161) 和中国科学院力学研究所 LNM 国家重点实验室开放课题基金资助项目.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left.\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{X},z,t) &= U_i(\boldsymbol{X},t)+\tilde{u}_i(\boldsymbol{X},z,t) \\ w(\boldsymbol{X},z,t) &= W(\boldsymbol{X},t)+\tilde{w}(\boldsymbol{X},z,t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

平均流速度 $U_i(i=1,2)$ 和 W 可定义为

$$\left.\begin{aligned} U_i(\boldsymbol{X},t) &= \frac{1}{h_0+\bar{\zeta}}\left\langle \int_{-h}^{\zeta} u_i(\boldsymbol{X},z,t)\mathrm{d}z \right\rangle \\ W(\boldsymbol{X},t) &= \frac{1}{h_0+\bar{\zeta}}\left\langle \int_{-h}^{\zeta} w(\boldsymbol{X},z,t)\mathrm{d}z \right\rangle \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 $\bar{a}$ 或 $\langle a\rangle$ 表示以风浪周期对量 a 作时间平均.

通过对均匀不可压缩、黏性流动的质量守恒方程和 Navier-Stokes 方程沿垂向积分，并作时间平均，可得下列各平均流方程:

(1) 平均质量方程 $(i=1,2)$

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}[(h_0+\bar{\zeta})U_i]=0 \tag{4}$$

(2) 平均水平、垂向动量方程 $(i,j=1,2)$

$$\begin{aligned} &\rho(h_0+\bar{\zeta})\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_J\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+g\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}= \\ &\quad\left[\langle p^b\rangle-\rho g(h_0+\bar{\zeta})\right]\frac{\partial h_0}{\partial x_i}+ \\ &\quad\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\int_{-h}^{\zeta}\sigma'_{ji}\mathrm{d}z\right\rangle+\langle\tau_i^s|\nabla R|\rangle-\langle\tau_i^b|\nabla B|\rangle \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} &\rho(h_0+\bar{\zeta})\left(\frac{\partial W}{\partial t}+U_j\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)+ \\ &\quad\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\int_{-h}^{\zeta}(\rho\tilde{u}_j\tilde{w}-\sigma'_{j3})\mathrm{d}z\right\rangle= \\ &\quad\langle p^b\rangle-\rho g(h_0+\bar{\zeta})+\langle\tau_3^s|\nabla R|\rangle-\langle\tau_3^b|\nabla B|\rangle \end{aligned} \tag{5b}$$

(3) 平均总能量方程 $(i,j=1,2;\ k,m=1,2,3)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial F_i}{\partial x_i} &= v_k^s\tau_k^s|\nabla R|-v_k^b\tau_k^b|\nabla B|- \\ &\quad\int_{-h}^{\zeta}\sigma'_{km}\frac{\partial v_k}{\partial x_m}\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{6}$$

其中各平均量为:

总能量密度

$$E=\tilde{E}+(h_0+\bar{\zeta})\left(\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{V}^2+\rho g\bar{\zeta}\right)-\frac{1}{2}\rho g(h_0+\bar{\zeta})^2$$

波动能量密度

$$\tilde{E}=\left\langle\int_{-h}^{\zeta}\frac{1}{2}\rho\tilde{v}^2\mathrm{d}z\right\rangle+\frac{1}{2}\rho g\langle\tilde{\zeta}^2\rangle$$

总能量通量

$$\begin{aligned} F_i &= \tilde{F}_i+U_i\tilde{E}+U_jS_{ij}+U_i(h_0+\bar{\zeta})\cdot \\ &\quad\left(\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{V}^2+\rho g\bar{\zeta}\right)-(h_0+\bar{\zeta})U_j\langle\sigma'_{ji}\rangle+ \\ &\quad W\left\langle\int_{-h}^{\zeta}\rho\tilde{u}_i\tilde{w}\mathrm{d}z\right\rangle \end{aligned}$$

波动能量通量

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i &= \left\langle\int_{-h}^{\zeta}\mathrm{d}z\left[\tilde{u}_i\left(\frac{1}{2}\rho\tilde{v}^2+p\right)-\tilde{v}_k\tilde{\sigma}'_{ki}\right]\right\rangle+ \\ &\quad\left\langle\int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}_i\rho g(z-\bar{\zeta})\mathrm{d}z\right\rangle \end{aligned}$$

辐射应力

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \left\langle\int_{-h}^{\zeta}(\rho\tilde{u}_i\tilde{u}_j+p\delta_{ij})\mathrm{d}z\right\rangle- \\ &\quad\frac{1}{2}\rho g(h_0+\bar{\zeta})^2\delta_{ij} \end{aligned}$$

另外，黏性应力张量 $\sigma'_{km}=\bar{\sigma}'_{km}+\tilde{\sigma}'_{km}$，黏性流动总速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\tilde{\boldsymbol{v}}\equiv(U_1,U_2,W)+(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{w})$, τ_k^s 和 τ_k^b 分别表示自由表面受到的风作用应力和流体对海底作用的剪切应力， $R(\boldsymbol{X},z,t)$ 和 $B(\boldsymbol{X},z)$ 则分别代表自由表面和海底，海底压力 $p^b\equiv p(\boldsymbol{X},-h,t)$, $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$.

将方程 (6) 连续减去下列方程: $\rho g\bar{\zeta}$ 乘以方程 (4), U_i 乘以方程 (5a), W 乘以方程 (5b). 如此便得到波动能量方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{E}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left\langle\int_{-h}^{\zeta}\mathrm{d}z\left[\tilde{u}_i\left(\frac{1}{2}\rho\tilde{v}^2+p+\rho g(z-\bar{\zeta})\right)\right]\right\rangle+\right. \\ &\quad\left.U_i\tilde{E}\right\}+\frac{\partial W}{\partial x_i}\left\langle\int_{-h}^{\zeta}\rho\tilde{u}_i\tilde{w}\mathrm{d}z\right\rangle+ \\ &\quad\left(W+U_i\frac{\partial h_0}{\partial x_i}\right)\left[\rho(h_0+\bar{\zeta})\left(\frac{\partial W}{\partial t}+U_j\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)+\right. \\ &\quad\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle\int_{-h}^{\zeta}\rho\tilde{u}_j\tilde{w}\mathrm{d}z\right\rangle\right]+S_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}+D=0 \end{aligned} \tag{7}$$

其中 D 表示由内摩擦、自由表面风应力和海底剪切应力引起的黏性流动系统总耗散效应. 在应用于破波带区域时，可在 D 中添加破碎波效应. D 的具体表达式如下

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$D = \left\langle \tilde{v}_k^b \tau_k^b \right\rangle \left|\nabla B\right| - \left\langle \tilde{v}_k^s \tau_k^s \right\rangle \left|\nabla R\right| + \left\langle \int_{-h}^{\zeta} \sigma'_{km} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \mathrm{d}z \right\rangle + U_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(h_0+\bar{\zeta})\left\langle \sigma'_{ji}\right\rangle\right] - U_i \frac{\partial h_0}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \int_{-h}^{\zeta} \sigma'_{j3} dz \right\rangle + \left(U_i \frac{\partial h_0}{\partial x_i} + W\right)\left[\left\langle \tau_3^b \left|\nabla B\right| \right\rangle - \left\langle \tau_3^s \left|\nabla R\right| \right\rangle\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left\langle \int_{-h}^{\zeta} \tilde{v}_k \tilde{\sigma}'_{ki} \mathrm{d}z \right\rangle + (h_0+\bar{\zeta}) U_j \left\langle \sigma'_{ji} \right\rangle\right] \tag{8}$$

2 广义波作用量守恒方程

在经典力学中，作用量即指绝热不变量 (adiabatic invariants)，它的背景是振动系统的缓慢调制理论，在众多的领域中都发现了实际应用. 在波动情形中，缓慢调制可以由非均匀介质 (例如变化的水深和环境流场) 产生，据此便可得到经典的波作用量守恒方程. 在“几何 - 光学近似”的假设条件框架下，可在波动能量方程 (7) 的左端加上和减去一项: $\dfrac{1}{\omega_r}\dfrac{\partial \omega_r}{\partial x_i}\tilde{E}(U_i+C_{gi})$，然后在两端除以 ω_r，则可得

$$\left\{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[A(U_i+C_{gi})\right]\right\} + \frac{1}{\omega_r}\left\{\frac{\partial W}{\partial x_i}\left\langle \int_{-h}^{\zeta} \rho \tilde{u}_i \tilde{w} \mathrm{d}z \right\rangle + \left(W + U_i \frac{\partial h_0}{\partial x_i}\right) \cdot \left[\rho(h_0+\bar{\zeta})\left(\frac{\partial W}{\partial t} + U_j \frac{\partial W}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle \int_{-h}^{\zeta} \rho \tilde{u}_j \tilde{w} \mathrm{d}z \right\rangle\right]\right\} + \frac{D}{\omega_r} + \left\{\frac{A}{\omega_r}\left[\frac{\partial \omega_r}{\partial t} + (U_i + C_{gi})\frac{\partial \omega_r}{\partial x_i}\right] + \frac{1}{\omega_r} S_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right\} = 0 \tag{9}$$

其中波作用量 $A = \dfrac{\tilde{E}}{\omega_r}$, C_g 为相对于平均流速度 U 的群速度. 在方程 (9) 左端的 4 项中，第 1 项构成经典波作用量守恒方程的基本形式，深刻表征了波作用量 —— 绝热不变量，在不同物理场景缓变介质中的绝热不变性，为该方程的核心部分. 第 2 项是由流动的垂向速度引起的，可称之为垂向速度波作用量. 在较为理想的环境条件下，人们通常将 $W(\boldsymbol{X},t)$ 处理为小量或不予考虑 [9]. 实际上，正是海底水深 $h(\boldsymbol{X})$ 变化的非平整性和平均自由表面位移 $\bar{\zeta}(\boldsymbol{X},t)$ 有赖于时 - 空的缓变性, 保证了 $W(\boldsymbol{X},t)$ 的存在性. 显见, 在需要刻划波、流三维场或沿垂向上的精细分布和结构时 (例如，泥沙疏运)，必须计及 $W(\boldsymbol{X},t)$ 的潜在作用，则与其密切关联的垂向速度波作用量将发挥出一种合成、透彻的辐射功能. 第 3 项可称为耗散波作用量，牵引出从黏性这一实际流体本色出发所带来的完整耗散机制，于严谨的理论和广泛的应用是大有裨益的. 最后，第 4 项为 0[1]. 由此可见，方程 (9) 左端的三项不同波作用量相互间达成了一种互补、协调而又主次分明的更为广泛的守恒形式. Bretherton 和 Garrett[1] 曾证明经典波作用量守恒方程适用于描述流体动力学中的一大类守恒系统. 因此，方程 (9) 是对它的一种重要推广，可将方程 (9) 称为近岸耗散动力系统的广义波作用量守恒方程，在刻画实际黏性流动的过程中将显示出重要作用.

关于波作用量守恒与耗散效应的联系, Christoffersen 和 Jonsson[6] 曾给出一个最为初步的说明.

3 结　论

为了探讨近岸波 - 流 - 海底相互作用的复杂多变机制，本文从基于黏性流动 Navier-Stokes 方程的关于风浪对大尺度变化环境流作用的多种平均流方程出发，推导出近岸耗散动力系统的广义波作用量守恒方程，据此提出了流体垂向速度波作用量和耗散波作用量这两种新概念，从而把理想的平均流守恒系统扩展到实际的平均流耗散系统 (即广义守恒系统) 中去，充分说明了波作用量这一概念的丰富内涵和应用价值. 如果想要说明某一特定耗散效应 (例如破波效应)，则在实际应用中可把它追加到耗散波作用量中去，仍然能保持方程 (9) 的广义守恒形式.

参　考　文　献

1 Bretherton FP, Garrett CJR. Wave trains in inhomogeneous moving media. *Proc R Soc Lond A*, 1968, 302: 529～554

2 王涛, 李家春. 波作用量守恒原理在波 - 流相互作用中的应用. 力学学报, 1996, 28(3): 282～290 (Wang Tao, Li Jiachun. Application of conservation law of wave action flux to wave-current interaction. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(3): 282～290 (in Chinese))

3 Bal G, Chou T. Capillary-gravity wave transport over spatially random drift. *Wave Motion*, 2002, 35(2): 107

4 Peregrine DH. Interaction of water waves and currents. *Advances of Applied Mechanics*, 1976, 16: 9～117

5 Prigogine I. The End of Certainty: Time, Chaos, and the New Laws of Nature. Paris: Editions Odile Jacob, 1996

6 Christoffersen JB, Jonsson IG. A note on wave action conservation in a dissipative current wave action. *Applied Ocean Research*, 1980, 2(4): 179～182

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

7 Riewe F. Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, 1996, 53(2): 1890~1899
8 Whitham GB. Linear and Nonlinear Waves. New York: J Wiley and Sons, 1974
9 Mei CC. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. Singapore: World Scientific, 1989
10 Dingemans MW. Water Wave Propagation over Uneven Bottoms. Singapore: World Scientific, 1997
11 黄虎, 周锡礽, 吕秀红. 缓坡方程的推广. 力学学报, 2001, 33(3): 319~325 (Huang Hu, Zhou Xireng, Lü Xiuhong. Extensions of the mild-slope equation. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(3): 319~325 (in Chinese))

A GENERALIZED WAVE ACTION CONSERVATIVE EQUATION FOR THE DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEM OVER UNEVEN BOTTOMS IN THE NEARSHORE REGION [1)]

Huang Hu
(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)
(*LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract To describe the various complex mechanisms of the dissipative dynamical system between waves, currents, and bottoms in the nearshore region, emphasizing on the wave motion on large-scale variation of ambient currents and considering the variety of topographic bottoms(described typically as consisting of a slowly varying water depth and a rapidly varying water depth), a generalized wave action equation for the dissipative dynamical system in the nearshore region is developed by using the mean-flow equations based on the Navier-Stokes equations of viscous fluid, thus raising two new concepts: the vertical velocity wave action and the dissipative wave action, which together with the classical wave action reach mutually a more widespread conservative form in complementation, coordination, and clearness on primary and secondary, extending the classical concept, wave action, from the ideal averaged flow conservative system into the real averaged flow dissipative system (that is, the generalized conservative system), and finally providing a widespread and profound, and advanced theoretical basis in explaining coastal process and being applied to offshore and coastal engineering.

Key words dissipative dynamical system, wave action conservation, averaged flow equation, uneven bottom, Navier-Stokes equation

Received 9 November 2001, revised 27 March 2003.
1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272072), the National Science Foundation for Distinguished Young Scholars of China (49825161) and the Open Foundation of the State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics (LNM), Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net