

# 轴对称压力容器弹塑性与强度分析\*

吴振强<sup>1,2</sup>, 张灿邦<sup>1,3</sup>, 张曙红<sup>1</sup>

(1. 昆明理工大学工程力学系, 昆明, 650093;

2. 中国科学院力学研究所, 北京, 100080; 3. 红河学院理学院, 蒙自, 661100)

**摘要:** 本文应用第一、第三强度理论对轴对称压力容器圆筒和半球部分进行弹塑性力学分析, 得到各自弹性和塑性极限应力, 将其与压力容器规范中径分析结果作对比分析. 此外, 本文还分析了径比对压力容器结构设计和强度的影响.

**关键词:** 轴对称; 压力容器; 弹塑性; 应力分析; 强度

**中图分类号:** TB125 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-9128(2004)02-0004-04

## 0 引言

压力容器是石油化工、电力、机械、航空航天等工业部门的重要设备之一. 为保证压力容器在使用过程中安全可靠, 必须对其进行严格的应力分析和极限承载力计算, 而壁厚的确定则是其中的关键. 我国压力容器规范中的壁厚计算公式采用的是中径公式, 其中没有过多涉及壁厚的影响. 对于超高压容器, 即径比  $k$  很大的容器, 区别是明显的. 本文应用常用的第一、第三强度理论对轴对称压力容器进行应力分析, 确定极限承载压力, 并与中径公式相对比, 且重点讨论径比  $k$  的影响, 对现实中工程实际是有重要参考价值的, 特别是对于已知压力, 设计压力容器壁厚的问题.

压力容器的种类和形状繁多, 为了简化运算, 本文所采用的压力容器是圆柱筒的两端与两球相贯的容器 (且无开孔). 如图(1)所示: 径比  $k = b/a$ , 只受内压  $p$  作用, 圆柱筒采用柱坐标  $(z, r, \theta)$ , 两端的半球容器采用的

是球坐标  $(r, \theta, \varphi)$ .

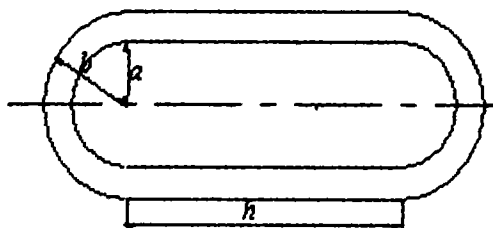


图1 轴对称压力容器简图

## 1 圆筒部分的弹塑性分析

### 1.1 中径公式

中径公式是以沿壁厚的平均弹性应力按第三强度理论导出的, 因而所得到的厚壁容器和薄壁容器的计算公式相类似, 其屈服条件可以表示为:

$$\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r = \sigma_s \quad (1)$$

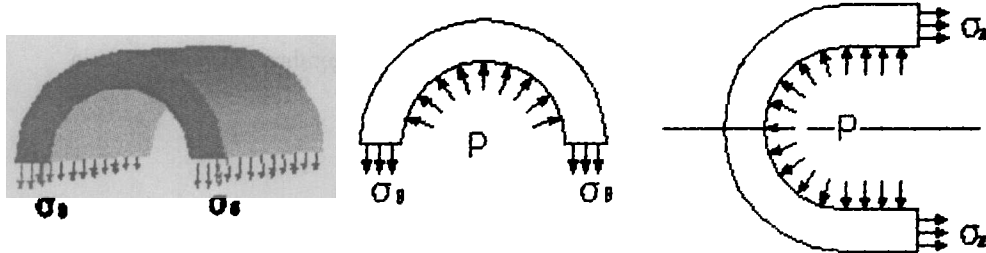


图2 圆筒部分的轴向和圆周向应力示意图

收稿日期: 2003-07-24

第一作者: 吴振强(1979-), 男, 昆明理工大学硕士毕业, 中科院在读博士, 研究方向: 计算力学、ANSYS 应用.

其中环向应力  $\bar{\sigma}_\theta$  以沿壁厚的积分平均值计算应力的:

$$\bar{\sigma}_\theta = \int_a^b \sigma_\theta dr / (b - a) = pa/t(\text{拉}) \quad (2)$$

径向平均应力  $\bar{\sigma}_r$  是按内外壁的应力算术平均值计算:

$$\bar{\sigma}_r = (-p + 0)/2 = -p/2 \quad (3)$$

$$\text{轴向应力 } \bar{\sigma}_z = pa/(2t)(\text{拉})$$

把(1)(2)式的  $\bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_r$  代入屈服条件方程(1)式得:

$$\frac{p(2a+t)}{2t} = \frac{p}{2} \left( \frac{b+a}{b-a} \right) = \frac{p}{2} \left( \frac{k+1}{k-1} \right) = \sigma_s \quad (4)$$

$$\text{解得 } k = \frac{2\sigma_s + P}{2\sigma_s - p} = \frac{b}{a} = 1 + t/a,$$

$$\text{即 } t = \frac{pD_i}{2\sigma_s} (D_i = 2a) \quad (5)$$

若考虑安全系数与焊缝系数计算结果即为压力容器规范中的壁厚计算公式. 应用中径公式中计算所得到的弹性极大承载力为:

$$p_m = 2 \frac{k-1}{k+1} \sigma_s \text{ 或 } p_m/\sigma_s = 2 \frac{k-1}{k+1} \quad (6)$$

## 1.2 用第三强度理论进行弹塑性分析

### 1.2.1 弹性条件下的应力分析

第三强度理论即满足 Tresca 屈服条件(最大剪应力理论), 两端有两个半球相贯的圆筒相当于两端有封头的圆筒, 则  $\sigma_z = \text{const.}$

$$\text{由 } \Sigma F_z = 0, \text{ 得 } \sigma_z = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p(\text{拉}) \quad (7)$$

因其为常数, 所以轴向位移为定值.

对圆柱筒采用应力解法, 取应力  $\sigma_\theta, \sigma_r$  为基本未知数(不考虑体积力), 用柱坐标表示平衡方程, 结合协调方程、结合力边界条件  $\sigma_r|_{r=a} = -P, \sigma_r|_{r=b} = 0$  求解出径向和周向应力分别为:

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} \right], \sigma_\theta = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (8)$$

### 1.2.2 屈服分析

随着内压  $p$  的增加, 当应力分量的组合值满足  $\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_s$  时, 满足此条件的圆筒部分由弹性变形状态进入塑性变形状态, 在  $r = a$  处  $(\sigma_r - \sigma_\theta)$  有最大值, 筒体由内壁开始屈服, 若此时  $(\sigma_r - \sigma_\theta)_{r=a} = \sigma_s$ , 可得弹性极限压力:

$$p_e = \frac{\sigma_s}{2} \left[ 1 - \frac{a^2}{b^2} \right] = \frac{\sigma_s}{2} \left[ 1 - \frac{1}{k^2} \right] \quad (9)$$

在  $p < p_e$  时, 圆筒处于弹性状态, 当  $p > p_e$  时, 圆筒则处在弹塑性状态, 此时弹塑性的分界半径为  $r_p$ , 且满足  $a \leq r_p \leq b$ .

在塑性区, 圆筒的应力满足平衡方程和第三强度理论屈服条件:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_s \quad (10)$$

联立应力边界条件  $\sigma_r|_{r=a} = -P$ , 可得到塑性区的应力分量为:

$$\sigma_r = \sigma_s \ln \frac{r}{a} - p, \sigma_\theta = \sigma_s \left[ 1 + \ln \frac{r}{a} \right] - p \quad (11)$$

在弹性区, 可以看作内半径为  $r_p$ , 外半径为  $b$ , 承受内压为  $q$  的厚壁圆筒, 可得:

$$\sigma_r = -\frac{r_p^2 q}{b^2 - r_p^2} \left[ \frac{b^2}{r^2} - 1 \right], \sigma_\theta = \frac{r_p^2 q}{b^2 - r_p^2} \left[ \frac{b^2}{r^2} + 1 \right] \quad (12)$$

从弹性区看,  $r = r_p$  时, 刚达到屈服时,

$$q = \frac{\sigma_s}{2} \left[ 1 - \frac{r_p^2}{b^2} \right] \quad (13)$$

在塑性区, 当  $r = r_p$  时,  $\sigma_r|_{r=r_p} = -q$  可得  $q = p - \sigma_s \ln \frac{r_p}{a}$ . 由  $r = r_p$  处的径向应力  $q$  相等的条件, 可得到  $p$  和  $r_p$  之间的关系式为:

$$p = \sigma_s \ln \frac{r_p}{a} + \frac{\sigma_s}{2} \left[ 1 - \frac{r_p^2}{b^2} \right] \quad (14)$$

随着内压  $p$  的继续增加, 当  $r_p = b$  时, 则筒体进入全塑性状态, 此时的  $p$  称为塑性极限压力, 用  $p_l$  表示, 把

$$r_p = b \text{ 带入上式得: } p_l = \sigma_s \ln \frac{b}{a} = \sigma_s \ln k \quad (15)$$

压力达到  $p_l$  时的应力分量为:

$$\sigma_r = \sigma_s \ln \frac{r}{b}, \sigma_\theta = \left[ 1 + \ln \frac{r}{b} \right] \sigma_s \quad (16)$$

## 1.3 使用第一强度理论(即最大拉应力理论)进行分析

受力平衡方程, 经过变形可得到环向应力与径向应力有以下关系:

在塑性区, 对于理想弹塑性材料, 按第一强度理论, 材料屈服时满足  $\sigma_{\max} = \sigma_s$ , 在未达到屈服之前, 圆筒各应力满足  $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$  (压). 若  $\sigma_\theta|_{r=a} = \sigma_s$ , 此时  $p_e$  为弹性极限压力:

$$p_e = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \sigma_s \quad (17)$$

当  $p > p_e$  时, 圆筒处于弹塑性状态, 在塑性区屈服条件为:  $\sigma_\theta = \sigma_s$  (18)

联立平衡方程式 \ 边界条件  $\sigma_r|_{r=a} = -P$ ,

$$\text{得 } \sigma_r = \sigma_s - \frac{a}{r}(p + \sigma_s)$$

利用弹塑区交界处径向应力相等的条件,可得到  $p$  和  $r_p$  之间的关系式为:

$$p = \left[ \frac{2r_p b^2}{a(b^2 + r_p^2)} - 1 \right] \sigma_s \quad (19)$$

当  $r_p = b$  时,进入全塑性状态,有第一强度理论得到的塑性极限承载力为:

$$p_i = \left( \frac{a}{b} - 1 \right) \sigma_s = (k - 1) \sigma_s \quad (20)$$

## 2 压力容器端部半球部分的弹塑性分析

### 2.1 采用中径公式可得到

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_\varphi = \frac{pa}{2t}, \bar{\sigma}_r = \frac{(-p+0)}{2} = \frac{-p}{2}$$

代入中径公式的屈服方程(1)式:  $\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r = \sigma_s$ ,

$$\text{得 } k = \frac{2\sigma_s}{2\sigma_s - p}, p_m = \frac{2\sigma_s(k-1)}{k} \quad (21)$$

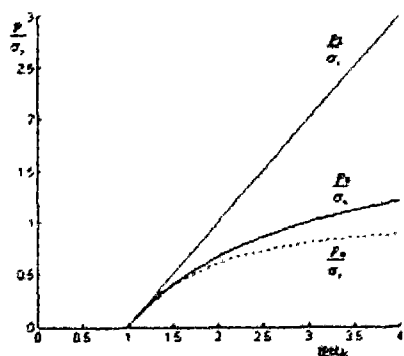


图3 圆筒部分第一强度极限应力图

从上面的两个曲线图中,可以看出,压力容器规范所采用的中径公式部分考虑了塑性因素的影响,因而提高了材料的利用率。

(1) 对于第一强度理论曲线图3,中径公式的结论与弹性极限相吻合,从图中近似看出,约在  $k < 1.5$  的情况下,基本是重合的,这也和第一强度理论所强调的材料破坏原则是一致的。

(2) 对于第三强度理论曲线图4可以看出,中径公式得出的极限应力是和第三强度理论的塑性极限想吻合的,约在  $k < 1.8$  的情况下,基本是重合的。

(3) 在工程实际中,更注重的是弹性极限力的确定。从上面的两幅图中,可以看出,即  $k < 1.2$  的情况下,无论用哪种强度理论,极限应力差距都是很小的,这就说

## 2.2 第三强度理论

压力容器端部的半球部分可以看作球对称问题来考虑,不计径向力,联立平衡方程为几何方程、本构方程结合边界条件,可得半圆球的应力分量:

$$\sigma_r = \frac{a^3(r^3 - b^3)}{r^3(b^3 - a^3)} p, \sigma_\theta = \frac{a^3}{2r^3} \left[ \frac{2r^3 + b^3}{b^3 - a^3} \right] p \quad (22)$$

在厚壁圆球中,利用 Tresca 屈服条件,可求得圆球的弹性极限承载压力  $p_e$  和塑性极限承载压力分别为:

$$p_e = \frac{2}{3} \sigma_s \left[ 1 - \frac{a^3}{b^3} \right]$$

$$p_i = 2\sigma_s \ln \frac{b}{a} = 2\sigma_s k \quad (23)$$

## 3 极限应力曲线的比较

### 3.1 画出圆筒部分第一强度,第三强度的极限压力随 $k$ 变化的曲线图

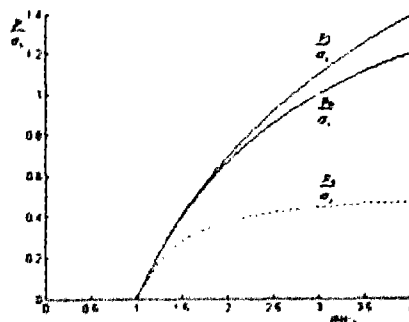


图4 圆筒部分第三强度极限应力图

明了,对于薄壁压力容器,弹性极限承载压力是最重要的,且材料的塑性影响是很小的。

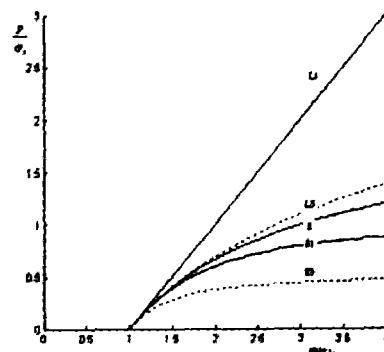


图5 圆筒部分第一、第三强度理论对比图

上面的图5,是第一、第三强度理论的极限应力对比图,其中实线是第一强度理论的,虚线是第三强度理论

的.  $L1$  和  $L3$  代表塑性极限应力,  $M$  代表中径公式的极限应力,  $E1$  和  $E2$  代表弹性极限应力. 此处, 主要考虑厚壁圆筒 ( $k > 1.2$ ), 从图中的曲线可以有如下两方面结论:

(1)  $k$  的大小对厚壁压力容器的承载压力影响是很大的, 设计不应该只是简单的使用经验公式, 我们必须根据实际或实验的要求, 切实考虑所设计的压力容器,

### 3.3 画出第三强度的极限压力随 $k$ 变化的曲线图

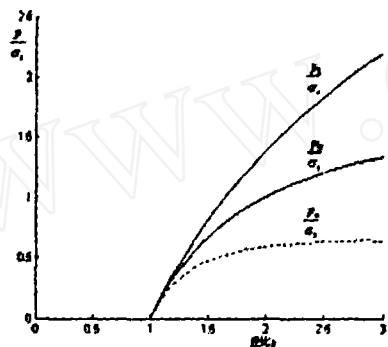


图6 圆球部分第三强度理论极限应力图

从图6中, 可以看出, 径比  $k$  对圆球部分的极限应力的影响是显著的, 只是中径公式更趋于平均.

在图7中, 实线是圆球部分的, 虚线是圆筒部分的, 在第三强度理论中, 圆筒极限承载力比圆球小得多, 这说明, 在实际工程设计中, 更应该注重筒体的设计.

## 4 结论

本文是应用经典的弹塑性和强度理论, 对轴对称压力容器做了严密的弹塑性力学分析. 在现实中, 实际情况要比这复杂得多, 例如, 有开孔的. 其他特别形状的, 本文的计算结果对它们也是同样适用的. 同时, 本文也是结合钢淬实际实验中, 压力容器厚度的设计而做的前提研究. 应用第一, 第三强度理论处理实际问题, 对压力容器规范中的中径公式进行对比分析, 其结论对于压力容器设计是具有重要意义的.

对于不同径比的  $k$ , 运用相应的公式, 才能使设计安全可靠、经济合理.

(2) 应用强度理论不同, 导致设计结果不同, 说明材料的选取同样重要. 例如油罐, 蓄水罐等所用的材料是不同的, 第一强度理论更多的使用于脆性材料, 而第三强度理论则是金属材料.

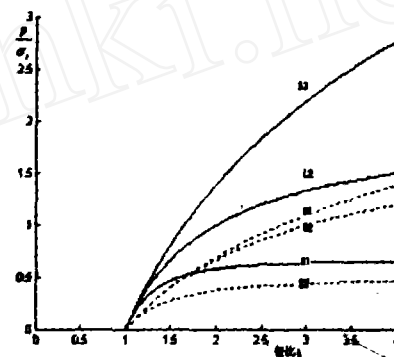


图7 圆球与圆筒部分第三强度理论极限应力对比图

### 参考文献:

- [1] 桑如芭. 压力容器强度设计技术分析(三)[J]. 石油化工技术, 2000, 17(1): 47~54.
- [2] 徐秉业. 应用弹塑性力学[M]. 清华大学出版社, 1995.
- [3] 刘鸿文. 材料力学[M]. 人民教育出版社, 1980.
- [4] 龚曙光, 谢桂兰. 压力容器分析设计中的应力分类方法[J]. 化工设备技术, 2000, (3): 27~31.
- [5] 朱瑞林. 单层厚壁圆筒弹塑性与强度分析[J]. 湘潭大学自然科学学报, 1999, (9): 80~83.
- [6] 苏庆田, 姚文斌. 球-柱相贯压力容器的应力分析[C]. 98昆明理工大学研究生学术交流会论文集. 24~27.
- [7] 苏晓生. MATLAB5.3 实例教程[M]. 中国电力出版社, 2000.

[责任编辑 蔡 群]

## Elastic - plastic and Strength Analysis of Axial Symmetric Pressure Vessels

WU Zhen - qiang<sup>1,2</sup>, ZHANG Can - bang<sup>1,3</sup>, ZHANG Shu - hong<sup>1</sup>

(1. Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China;

2. Mechanics Institute, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China;

3. School of Science, Honghe University, Mengzi 661100, China)

**Abstract:** Applying the first and the third strength theories, the author studied the elastic - plastic stresses of pressure vessels, gained limit stresses, and compared results with other theoretical results. The ratio of radius was important in the structure design and strength design of pressure vessels.

**Key words:** Axial Symmetric; pressure vessel; elasticity and plasticity; stress analysis; strength