

一种岩石概率型本构及其应用

白金泽 丁 桦 梁乃刚

(中国科学院力学研究所工程科学部, 北京 100080)

摘要 在岩石材料非均匀特性的基础上, 建立了弹塑性概率材料本构. 认为材料单元的切线模量与破坏强度都是服从二参数 Weibull 分布的随机量, 通过用户材料子程序将该本构导入到 LS-DYNA3D 中, 推导了程序流程, 分析了导入过程中的关键技术. 算例验证表明, 应用该本构模拟得出的现象与实验观测完全一致, 这是确定性本构无法实现的.

关键词 非均匀性, 概率型本构, 数值模拟

1 概述

岩石是构成地壳表层岩石圈的主体, 是大自然地质作用的产物. 在岩石的形成与形成之后漫长的地质年代中, 遭受了不同的地质作用, 在岩石中形成了大量的微裂纹、微孔洞、裂隙与节理等缺陷, 使得岩石呈现明显的非线性、不连续性、不均匀性等复杂特性^[1].

高峰等^[2]对岩石内部的孔隙分布进行的分形研究表明, 单位体积的岩石内部, 细观的微裂纹数量服从 Weibull 分布. 这一结果为岩石的概率本构提供了依据与基础. 东北大学岩石破裂与失稳研究中心开发了二维有限元数值计算软件“岩石破裂过程分析系统 RFPA^{2D}”^[3], 该软件以 Weibull 分布来反映缺陷与晶粒的统计特性, 能够进行单元的应力分析与破坏分析, 并对破坏单元根据拉、剪状态分别进行刚度退化处理. 文献^[4]利用该软件计算了二维压缩岩石试样在单轴加载下的裂纹萌生与扩展过程, 与树脂材料实验结果对比一致性较好. 冯增朝等^[5]、杨友卿等^[6]也从不同的角度研究了岩石强度的概率特征.

目前, 不同的研究者提出的岩石本构不下数十种, 一个危险的趋势是本构模型越来越复杂, 参数越来越多, 应用较为不便. 本文力求通过比较简单的模型, 得到一种在一定精度条件下既符合力学原理与实验观测宏观力学现象, 又能够方便地应用于工程实际的材料本构模型.

2 岩石的概率型本构

岩体材料由于细观结构的非均匀性和对应参数的非确定性, 可以认为是一种非均匀随机性的材料,

其材料参数与破坏强度等都是 在一定范围内随机变化的量, 这些随机变化量的分布遵循一定的规律. 通过对大量文献资料的总结和对前人实验结果的分析, 可以认为这些参数基本上服从 Weibull 分布. 若将有限元分析中的单元尺寸选为岩体材料的非均匀特征尺度, 可以通过如下假设对岩体材料的破坏行为进行模拟:

(1) 每个岩石有限元单元只有两种状态: 无损与破坏. 在初始状态中, 所有的单元都是无损的, 当单元拉伸应变达到破坏应变时, 单元破坏, 破坏后的单元没有任何承载能力; 单元压缩失效后, 需要进行刚度与强度退化处理, 因此本文暂不考虑该种失效模式.

(2) 如图 1 所示, 无损岩石有限单元材料为各向同性强化双线性弹塑性材料, 弹性模量为 E , 切线模量 E_T 服从二参数 Weibull 分布, 其概率密度函数为

$$f(E_T) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{E_T}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-(E_T/\beta)^\alpha} \quad (1)$$

式中 E_T 为岩石切线模量, 是随机量; α 称作非均

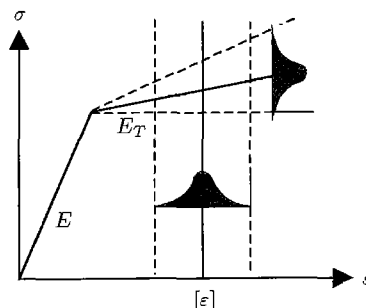


图 1 岩石概率型本构模型

2004-10-18 收到第 1 稿, 2005-03-20 收到修改稿.

匀参数, α 越大表示随机选取的模量参数波动范围越小; β 称作尺寸参数, 为所有随机量的平均值。

(3) 单元的破坏强度也服从二参数 Weibull 分布, 其概率密度函数为

$$f([\varepsilon]) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{[\varepsilon]}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-([\varepsilon]/\beta)^\alpha} \quad (2)$$

式中 $[\varepsilon]$ 为岩石破坏应变; 认为岩石单元的切线模量与破坏强度之间具有相同的分布系数, 因此非均匀参数 α 的取值与式 (1) 相同。

(4) 认为单元是彼此独立的个体, 不考虑单元之间的破坏强度联系。

根据上述假设, 建立了岩体材料概率型本构模型和数值模拟策略, 并将该模型导入到非线性数值计算软件 LS-DYNA3D 中, 编写了相应的用户材料子程序。

无损岩石材料为各向同性强化双线性弹塑性材料, 屈服条件为

$$\phi = \frac{3}{2}(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij}) - \sigma_y^2 = 0 \quad (3)$$

式中偏应力 $S_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \cdot \sigma_{kk}$; α_{ij} 为移动张量 (屈服面的中心); 当前屈服极限 $\sigma_y = \sigma_0 + E_p \varepsilon_{eff}^p$; 塑性硬化模量 $E_p = EE_T / (E - E_T)$; 有效塑性应变 $\varepsilon_{eff}^p = \int_0^t (\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \cdot 2/3)^{1/2} dt$; 塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e$ (总应变率 - 弹性应变率)。

3 用户材料子程序

LS-DYNA3D 是由 LSTC (livermore software technology corporation) 公司开发的通用结构分析有限元软件。该软件以显式 Lagrange 算法为基础, 可以求解各类低速与高速碰撞、爆炸和金属成型等非线性问题 [7]。LS-DYNA3D 支持用户材料子程序定义新的材料本构。

将用户自定义材料子程序加入到 LS-DYNA3D 中不是一件容易的事情, 要求编写人员必须精通力学又要精通计算机编程, 同时还必须了解软件本身的构造及其算法。但是应用用户自定义材料可以大大扩展该软件的使用范围, 解决理论研究与实际中遇到的问题。

3.1 程序流程

概率型岩石爆破本构用户材料子程序的具体程序流程为:

(1) 按照弹性变形的应力应变关系求 $t = t_{n+1}$ 时刻的应力试探值 σ^*

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^n + C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (4)$$

(2) 检查屈服条件: $\phi = \sigma_i^{*2} - \sigma_y^{n2} = 0$ 。如果 $\phi \leq 0$ 表示仍处于弹性变形区, 此时 $S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^*$, 试探应力等于真实应力, 转到式 (4) 求 σ_{ij}^{n+1} ;

(3) 如果 $\phi > 0$, 则表示材料已经处于塑性区, 此时修正有限塑性应变

$$\varepsilon_{eff}^{p, n+1} = \varepsilon_{eff}^{p, n} + \Delta \varepsilon_{eff}^p = \varepsilon_{eff}^{p, n} + \frac{\sigma_i - \sigma_y^n}{3G + E_p} \quad (5)$$

缩小偏应力, 使之按比例返回到新的屈服面上。上式 E_p 的计算使用了随机抽样获得的 E_T 值。

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^* - \frac{3G \Delta \varepsilon_{eff}^p}{\sigma_i} S_{ij}^* \quad (6)$$

(4) 计算 $t = t_{n+1}$ 时刻的应力 σ_{ij}^{n+1}

$$\sigma_{ij}^{n+1} = S_{ij}^{n+1} + (p^{n+1} + q) \delta_{ij} \quad (7)$$

式中, $p^{n+1} = -k \ln \left(\frac{V^{n+1}}{V_0} \right)$, k 为体积模量、 V^{n+1} 和 V_0 分别为 t_{n+1} 时刻与初始时刻的单元体积。 q 为人工体积黏性阻尼。

(5) 失效判断

在每个单元上随机抽样, 得到满足 Weibull 分布的塑性应变值 $[\varepsilon]$ 。如果当前时刻的单元有效塑性应变 $\varepsilon_{eff}^{p, n+1} > [\varepsilon]$, 则单元失效, 失效单元从有限元模型中删除。全部单元计算结束后, 进入下一时刻迭代。

3.2 随机抽样

在计算机语言中, 利用数学公式可以产生服从 Weibull 分布的伪随机数。首先在 $[0,1]$ 区间抽取均匀分布的伪随机数列 ξ , 然后再从这个伪随机数总体中抽取一个简单的子样, 使这个简单子样满足 Weibull 分布函数, 并且各个伪随机数相互独立。实际上只要 $[0,1]$ 区间上均匀分布的随机数具有好的独立性, 则抽得的简单子样也一定具有和它同样好的独立性。

由二参数 Weibull 分布的概率密度函数得其概率分布函数为

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right] \quad (8)$$

求解上式, 考虑在 $[0,1]$ 区间内分布的随机变量 R 与 $1 - R$ 服从同一分布 [8], 得到 Weibull 的抽样公式为

$$x = \beta (-\ln \xi)^{1/\alpha} \quad (9)$$

3.3 子程序的输入与输出变量

在 LS-DYNA3D 中，用户材料子程序定义方式为：Subroutine umat41 (cm, eps, sig, hisv, dt, capa, etype, time, temp, i, ix, x, k, j)，由此可以看出，LS-DYNA3D 为用户子程序共提供 14 个变量数组，表 1 列出了各数组的解释。

表 1 用户子程序数组及其含义说明

数组	说明
cm	用户指定的材料参数数组，如弹性模量、泊松比等。
eps	当前时步的应变增量，除以当前的时间步长 dt1 可以得到应变率。
sig	根据应变增量由用户材料子程序计算得到的应力。
hisv	用户自定义的历史变量，可以用来存储计算中间值。如单元的塑性应变、随机强度等。历史变量可以设定为大于或等于 0 且小于 100 的数。
dt1	当前时步的时间步长。
capa	壳单元的横向剪应力系数。
etype	单元类型。在 LS-DYNA3D 中，主要有 3 种单元类型：BRICK, BEAM 与 SHELL。
time	当前计算时间。
i	单元的内部编号数组。根据该数组可以在子程序中获得对应的外部单元编号、节点编号与节点坐标、单元属性等信息。
ixs	节点的内部编号数组。
x	节点的内部编号与节点坐标之间的对应数组。
k	ixs 数组的长度。
j	与单元内部编号相关的一个数组

3.4 计算输入文件 (*.K) 关键字定义

在 LS-DYNA3D 的计算输入文件中，关键字 *MAT_USER_DEFINED_MATERIAL_MODELS 用来定义用户材料参数。材料编号 41-50 是用户自定义材料模型，分别对应用户材料子程序 umat41-umat45。表 2 中列出了该关键字主要的控制参数。

表 2 计算输入文件控制参数及其含义说明

参数名称	说明
MID	材料在计算输入文件中的编号
RO	材料密度
MT	用户材料编号，范围：41~50
LMC	材料参数数组 (cm 数组) 长度
NHV	历史变量数组 (hisv 数组) 长度
IORTHO	材料是否为正交各向异性
IBULK	体积模量在材料参数数组中的位置
IG	剪切模量在材料参数数组中的位置
IVC	向量化标志
IFAIL	失效标志
ITHERM	是否计算单元温度
P1~Pn	材料参数具体数值

3.5 有限单元的破坏

LS-DYNA3D 提供了关键字 *MAT_ADD_EROSION 实现指定单元的失效。在材料子程序运行结束

后，系统根据该关键字定义的破坏准则来判断单元是否失效，失效单元将从计算模型中删除。当一个节点所有关联的单元全部失效后，该节点在有限元计算模型中被删除。

在本文中，破坏判据为等效塑性应变，但是用户自定义材料子程序中仅仅返回单元应力数组，因此本文的做法是：当等效塑性应变大于强度随机抽样时，将该单元的应力指定为一个大于 N ；同时在 *MAT_ADD_EROSION 中，定义失效方式为等效应力失效，指定失效应力为一个大于 M (结构中不可能达到的大数，这样就保证了其它单元不会发生意外失效)，使 $N > M$ ，单元即失效。

在用户材料子程序中，输出破坏单元的编号，对比 LS-DYNA3D 输出文件中的破坏单元的编号，二者完全吻合。同时，通过算例验证得知将单元应力人为加大对其它单元的计算无影响。这说明采用该方法是完全可行的。

4 算例

为了验证本文编写的用户材料子程序的可行性，采用图 2 所示有限元模型计算含 45° 裂纹板的破坏过程。裂纹板结构尺寸为 $20\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ ，裂纹位于板中心，长度为 2 mm 。板两端受拉伸载荷，采用等应变速率来模拟加载过程，计算中分 1000 步加载，每步应变增量为 0.00002。裂纹板的材料为本文编写的概率型各向同性强化双线性弹塑性材料，表 3 显示了材料参数。

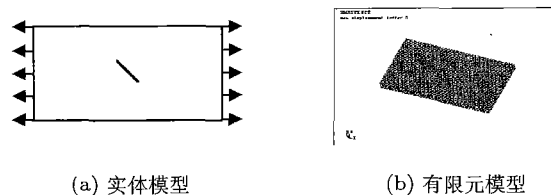


图 2 受单向拉伸载荷的 45° 裂纹板

表 3 裂纹板材料参数

$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	ν	E/MPa	E_T/MPa
2640	0.27	4.0×10^4	1.1×10^3
σ_b/MPa	α	β	
200	5	0.008	

图 3 显示了裂纹扩展过程中等效应力云图，图 4 为最终拉伸破坏后裂纹的扩展路径。可以看出，随着变形的增加，裂纹首先沿 45° 方向扩展，经过一段距离后，再沿外载荷垂直方向扩展并最终到达边界，试件整体破坏。这种破坏方式与大量实验观察

到的现象完全相同。同时,裂纹扩展路径在整体方向上非常清晰,但是在局部路径上相对曲折,显示出裂纹前端随机扩展的特点,这也与实验现象基本一致。

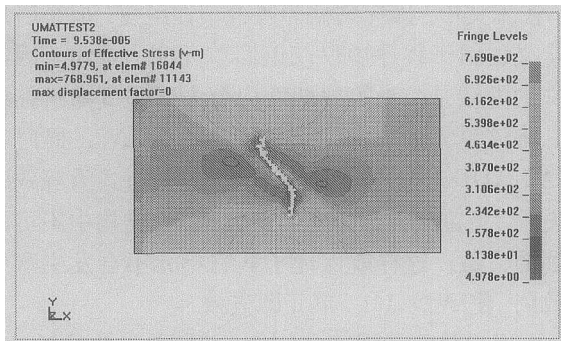


图3 裂纹板在裂纹扩展过程中应力云图

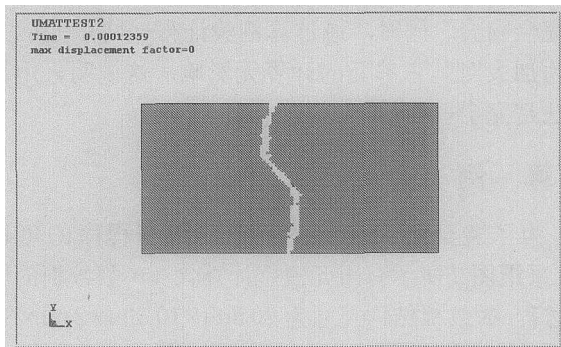


图4 拉伸破坏裂纹扩展路径

5 结论

本文基于岩石的非均匀特性建立了岩石概率型本构模型,通过用户材料子程序将模型导入到 LS-DYNA3D 中。算例表明该模型简单实用,且能够解释已有的实验现象。在应用于具体工程时,需要通过材料力学性能实验确定模型中的概率分布参数值。

A STATISTICAL CONSTITUTIVE RELATION FOR ROCK MASS AND ITS APPLICATION

BAI Jinze DING Hua LIANG Naigang

(Division of Engineering, Institute of Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract Considering the heterogeneous property of rock mass, a statistical constitutive model is developed and is implemented in LS-DYNA by using the user defined material subroutine. In the constitutive model of the rock mass, a two parameter Weibull's distribution is used to simulate the statistical properties of the tangential modulus and the strength of the rock mass. The rationality of the model is demonstrated by a numerical test.

Key words heterogeneous, statistical constitutive model, numerical test

参考文献

- 1 蔡美峰. 岩石力学与工程. 北京: 科学出版社, 2002 (Cai Meifeng. Rock Mechanics and Engineering. Beijing: Science Press, 2002 (in Chinese))
- 2 高峰, 谢和平. 脆性材料的分形统计强度理论. 固体力学学报, 1996, 17(3): 239~245 (Gao Feng, Xie Heping. Statistically fractal strength theory for brittle materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1996, 17(3): 239~245 (in Chinese))
- 3 唐春安, 赵文. 岩石破裂全过程分析软件系统 RFPA2D. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(5): 507~508 (Tang Chun'an, Zhao Wen. RFPA2D System for rock failure process analysis. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1997, 16(5): 507~508 (in Chinese))
- 4 黄明利, 唐春安, 朱万成. 岩石破裂过程的数值模拟研究. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(4): 468~471 (Huang Mingli, Tang Chun'an, Zhu Wancheng. Numerical simulation on failure process of rock. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2000, 19(4): 468~471 (in Chinese))
- 5 冯增朝, 赵阳升, 段康廉. 岩石的细胞元特性及其非均质分布对岩石全曲线性能的影响. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(11): 1819~1823 (Feng Zengchao, Zhao Yangsheng, Duan Kanglian. Influence of rock cell characteristics and rock inhomogeneity parameter on complete curve of stress-strain. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(11): 1819~1823 (in Chinese))
- 6 杨友卿. 岩石强度的损伤力学分析. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(1): 23~27 (Yang Youqing. Continuum damage mechanics analysis on strength of rock. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1999, 18(1): 23~27 (in Chinese))
- 7 Whirley RG, Engelmann BE, DYNA3D: A Nonlinear, Explicit, Three-dimensional Finite Element Code for Solid and Structural Mechanics User manual, Report UCRL-MA-107254, California: University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1993. 33~120
- 8 张湘伟. 结构分析中的概率方法. 北京: 科学出版社, 2000 (Zhang Xiangwei. Probability Methods for Structure Analysis. Beijing: Science Press, 2000 (in Chinese))