

具有中间穿透裂纹载流薄板裂纹前缘的应力场

田振国^{1,2}, 郑 坚^{1,3}, 白象忠^{1,2}

(1. 中国科学院力学研究所, 国家非线性连续介质力学重点实验室, 北京 100080; 2. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004; 3. 中国人民解放军军械工程学院一系, 河北 石家庄 050003)

摘 要: 用复变函数方法研究了带有中间穿透裂纹的载流薄板在瞬间电流通入时, 在裂纹尖端处由于电流集中及电磁热效应而形成的点热源的计算方法, 进而推导并计算了由此热源在裂纹前缘产生的温度场和应力场。通过控制通入电流密度, 可以使裂纹尖端温升达到熔化状态, 至使裂尖钝化, 由温升产生的压应力可以遏制裂纹的扩展。在文中讨论了裂尖附近材料的热传导系数、线胀系数、弹性模量随温度的变化, 及其对应力场的影响。

关键词: 载流薄板; 裂纹尖端; 温度场; 应力场; 复变函数

中图分类号: 0346.1 文献标识码: A

0 引言

在一个带有中间穿透裂纹的导电薄板内通入电流, 由于在流经裂纹时产生的绕流现象, 在裂尖处电流密度将极速增大, 电热效应增强。当电流很大且作用时间很短的情况下, 裂尖附近的小区域内的金属将被熔化, 在裂纹尖端形成弧形焊口, 裂尖被钝化。

同时实验表明, 焊口的附近的金属金相组织发生相变, 使金属晶粒细化, 至使韧度和硬度增加。在整个过程中, 裂尖处的应力主要是由三种作用产生的。即外载荷产生的机械应力、温度场形成的温度应力及相变产生的相变应力。其综合效应会有效地遏制了裂纹的扩展^[1]。

本文只限于采用复变函数的方法, 在求解在电流作用下中间裂纹的温度场的基础上, 进一步求解由于电热效应所产生的热应力。首先, 求解了在电流作用下裂尖处形成的热源功率及在该点热源作用下的温度场, 然后, 将所求得温度场分布状态作为已知条件, 进一步求解带有直线裂纹载流薄板内裂尖局部的应力场。由此来确定电磁热效应裂纹开裂时裂尖尖端处应力状态中的温度应力成分。

1 电热效应作用下裂纹尖端处热源功率的确定

1.1 电流强度与电流密度

在对一个具有直线穿透裂纹的无限大导电薄板上通入定常电流时(图 1), 板内的电流强度 I 与电流密度 J 有如下关系^[2]:

$$J_x = \frac{\partial I}{\partial x}; J_y = \frac{\partial I}{\partial y} \quad (1)$$

定义解析函数:

$$w(z) = I + iV$$

其中: $i = \sqrt{-1}$; J_x 、 J_y 分别为 x 、 y 方向的电流密度; V 、 I 满足 C-R (柯西 - 黎曼) 条件。考虑到式(1)有:

$$J_x - iJ_y = W(z) \quad (2)$$

且

$$w(z) = \int W(z) dz$$

很显然可以得到:

收稿日期: 2004-07-20 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50275128)

作者简介: 田振国 (1975-), 男, 山东齐河人。在读博士。研究方向为耦合场理论及其应用。

$$|J| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = |W(z)| \quad (3)$$

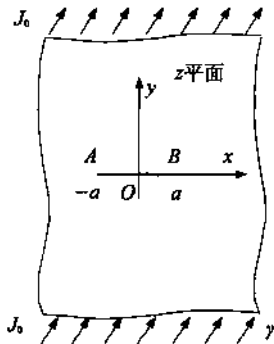


图1 带有中间穿透裂纹的无限大薄板
Fig. 1 An infinite plate with a central crack

1.2 带有直线裂纹的导电板内电流密度的基本方程

若在无穷远处电流密度是有限的, 则式(2)所定义的函数在域内是正则的。此时, 边界条件可以写成^[5]:

$$\begin{cases} [W(s) - \bar{W}(s)]^+ + [W(s) - \bar{W}(s)]^- = 2f(s) \\ [W(s) + \bar{W}(s)]^+ - [W(s) + \bar{W}(s)]^- = 2g(s) \end{cases}, (s \in l) \quad (4)$$

其中: $f(s) = -i \left[\left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^+ + \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^- \right]$, $g(s) = -i \left[\left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^+ - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^- \right]$, $(s \in l)$; l 为裂纹边界, $(\)^{\pm}$ 分别表示 $(\)$ 内函数在裂纹上下边界的值, 且 $f(s)$, $g(s)$ 满足迪里赫里条件。下面的计算将利用迪里赫里问题的解^[4], 即:

$$W(z) = W_0(z) + \frac{P_m(z)}{\chi(z)} + (\nabla I)^\infty \quad (5)$$

其中: $W_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\chi_i(s)f(s)}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{g(s)}{s-z} ds$, $P_m(z) = c_0 z^2 + c_1 z + \dots + c_m$, 式中 c_0, c_1, \dots, c_m 为实常数, $(\nabla I)^\infty$ 为无穷远处电流强度的梯度。

若图1所示的裂纹绝缘、绝热, 则有:

$$f(s) = g(s) = W_0(s) = 0$$

此时式(5)可以写成:

$$W(z) = \frac{P_m(z)}{\chi(z)} + (\nabla I)^\infty \cos \gamma \quad (6)$$

式中: γ 为 J_0 与 x 轴的夹角; $P_m(z) = c_0 z^2 + c_1 z$, $\chi(z) = [(z^2 - a^2)]^{\frac{1}{2}}$ 。由式(4)可得:

$$W(\infty) - \bar{W}(\infty) = -2i(\nabla I)^\infty \quad (7)$$

由于 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{P_m(z)}{\chi(z)} = c_0$, 同时考虑式(6)及式(7)可得: $c_0 = i(\nabla I)^\infty \sin \gamma$ 。由连续性条件, 且电流场为无源场, 因此 $c_j (j=1, 2)$, 可由下式确定:

$$\operatorname{Re} \left[\oint_c \frac{P_m(s_1)}{\chi(s_1)} ds_1 \right] = 0$$

所以有 $c_{j1} = 0$ 。若取 $\gamma = \frac{\pi}{2}$, 至此可得:

$$W(z) = \frac{J_y z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (8)$$

式中, J_y 为无限远处 y 方向的电流密度。由式(3)及式(8)容易得到:

$$|J| = \frac{J_y \sqrt{x^2 + y^2}}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{\frac{1}{4}}} \quad (9)$$

从式(9)中可以看出, 在裂纹处仅有 x 方向的电流, 而 y 方向的电流为零, 在裂纹尖端电流密度奇异。无穷远处为有限值。

1.3 热源功率的计算

在已知裂纹尖端附近的电流密度 J_x, J_y 的情况下裂纹尖端附近的热源功率为^[5]:

$$Q = \int_{-a}^a \frac{1}{\sigma} (J_x^2 + J_y^2) dz = \frac{2h}{\sigma} |J|^2 = \frac{2h}{\sigma} (J_y^2) \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \quad (10)$$

式中: $2h$ 为板厚; σ 为电导率。

2 带有直线裂纹的载流薄板温度场的计算

设 D 为除去裂纹线的全平面。则根据上文所得的热源功率, 在域内无裂纹时温度场的分布为^[6]:

$$T = 2\operatorname{Re}[F_0(z)]; F_0(z) = -\frac{Q}{4\pi\lambda} \ln(z^2 - a^2) \quad (11)$$

其中: $\operatorname{Re}[\]$ 为对 $[\]$ 内函数取实部。

由于纯金属或合金中导热系数是晶格导热系

数和电子导热系数的总和,温度的变化影响了晶格及自由电子的能量传递,从而导致了导热系数的变化^[7]。这里假设导热系数随温度成线性变化,即:

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta_s T)$$

式中: β_s 为修正系数。此时,温度函数所满足拉普拉斯方程为^[8]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (12)$$

引进新的变量:

$$H = \int_0^T \lambda dT$$

有

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial T} = \lambda \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{cases} \quad (13)$$

于是,式(12)就变换为经典的拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

求解未知量 H 的过程同上文中求温度 T 的方法相同,求得 H 后,即可根据式(13)找到相应的温度值。

3 带有直线裂纹的载流薄板应力场的计算

应力场基本公式的复变函数表示如下^[4]:

$$\begin{cases} \sigma_y + \sigma_x = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$\Omega(z) = -\overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi}$$

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz$$

$$\varphi(z) = \int \Phi(z) dz$$

$$\psi(z) = \int \Psi(z) dz$$

在域内存在裂纹且通入电流瞬间,利用上述方法求得两个点热源分布是关于虚轴对称且均位于裂纹尖端。因此,欲求整个域内的应力场状态,只须计算出只有一个点热源作用时域内应力的分布,之后在相应位置叠加即可。

首先考虑在 $B(a, 0)$ 点有点热源的作用,则在 $B(a, 0)$ 点周围有:

$$\Phi(z) = \Phi_+(z) + A(z); \quad \Omega(z) = \Omega_+(z) + B(z) \quad (16)$$

式中: $A(z) = A_0 \ln(z - z_0)$, $B(z) = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_0} A_0 - A_0 \ln(z - \bar{z}_0)$, $A_0 = -\frac{\beta m_0}{1 + \kappa}$, $m_0 = -\frac{Q}{4\pi\lambda}$, $\beta = \frac{\alpha_s E}{1 + \kappa}$; E 为材料的弹性模量; $\Phi_+(z)$ 和 $\Omega_+(z)$ 为在 B 点和 \bar{B} 附近调和的函数。设在裂纹的上下边界上给定应力分量分别为 σ_y^+ , τ_{xy}^+ 和 σ_y^- , τ_{xy}^- , 则由基本公式(15)可得:

$$\Phi^+ - \Omega^+ = (\sigma_y - i\tau_{xy})^+; \quad \Phi^- - \Omega^- = (\sigma_y - i\tau_{xy})^- \quad (17)$$

由此叠加计算得到:

$$(\Phi + \Omega)^+ - (\Phi + \Omega)^- = q(t); \quad (\Phi - \Omega)^+ - (\Phi - \Omega)^- = p(t) \quad (18)$$

其中: $q(t)$ 和 $p(t)$ 为满足迪里赫里条件的函数,且:

$$q(t) = (\sigma_y - i\tau_{xy})^+ - (\sigma_y - i\tau_{xy})^-$$

$$p(t) = (\sigma_y - i\tau_{xy})^+ + (\sigma_y - i\tau_{xy})^-$$

考虑到式(16)可得:

$$\begin{cases} (\Phi_+ + \Omega_+)^+ - (\Phi_+ + \Omega_+)^- = q(t) \\ (\Phi_+ - \Omega_+)^+ + (\Phi_+ - \Omega_+)^- = p(t) - 2A(z) + B(z) \end{cases} \quad (19)$$

则边界问题的解可以写成如下形式

$$\begin{cases} \Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{q(\tau)}{\tau - z} d\tau + D_0 + A(z) + B(z) \\ \Phi(z) - \Omega(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_l \frac{p_0(\tau)}{\chi'(\tau)(\tau - z)} d\tau + \chi(z)P_0(z) + A(z) - B(z) \end{cases} \quad (20)$$

其中:

$$p_0(t) = p(t) - 2A(t) + 2B(t)$$

$$P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$$

若在无穷远处应力分量 σ_x^{∞} , σ_y^{∞} , τ_{xy}^{∞} 是有限的, 即:

$$\begin{cases} \Phi(z) = \Gamma + \frac{a_{\infty}}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \Omega(z) = \Gamma + \frac{b_{\infty}}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases}, \text{ 当 } |z| \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (21)$$

其中: $\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_y^{\infty} + \sigma_x^{\infty})$; $\Gamma = \Gamma - \sigma_y^{\infty} + i\tau_{xy}^{\infty}$; $a_{\infty} = -\frac{1}{1+\kappa} \left[\frac{X_0 + iY_0}{2\pi} + b_0\beta \right]$; (X_0, Y_0) 为外载荷的主矢; $b_{\infty} = \frac{1}{1+\kappa} \left[-\frac{\kappa X_0 + iY_0}{2\pi} + b_0\beta \right]$ 。

此时, 温度场势函数 $F(z)$ 有下面的形式:

$$F(z) = \frac{b_0}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \text{ 当 } |z| \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (22)$$

则有

$$D_0 = \Gamma + \Gamma$$

$$c_0 = \Gamma - \Gamma$$

$$c_1 = a_{\infty} - b_{\infty} - \frac{1}{2} c_0 \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

当无外载荷且裂纹边界自由时有:

$$q(t) = p(t) = D_0 = c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{2m_0\beta}{1+\kappa}$$

且点热源作用在裂纹的延长线上, 因此式 (20) 可写成下面的形式:

$$\begin{cases} \Phi(z) + \Omega(z) = 0 \\ \Phi(z) - \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_1^t \frac{-2A(\tau) \sqrt{\tau^2 - a^2}}{\tau - z} d\tau + \frac{c_1}{\sqrt{z^2 - a^2}} + 2A(z) \end{cases} \quad (23)$$

至此解得:

$$\Phi(z) = -\Omega(z) = -\frac{2A_0 a}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

将式 (23) 带入式 (15) 中并分离式中的实部与虚部得:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2A_0 l(d_3 - 2yd_6 - 6d_1) \\ \sigma_y = -2A_0 l(d_1 + d_3 - 2yd_6) \\ \tau_{xy} = 2A_0 l(d_2 + d_4 + yd_5) \end{cases} \quad (24)$$

式中:

$$d_1 = [(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2]^{-\frac{1}{4}} \cos \frac{1}{2} \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

$$d_2 = -[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2]^{-\frac{1}{4}} \sin \frac{1}{2} \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

$$d_3 = [(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2]^{-\frac{1}{4}} \cos \frac{1}{2} \arctan \frac{-2xy}{x^2 + y^2 - a^2}$$

$$d_4 = -[(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2]^{-\frac{1}{4}} \sin \frac{1}{2} \arctan \frac{-2xy}{x^2 + y^2 - a^2}$$

$$d_5 = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{[(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2]^{\frac{3}{4}}}$$

$$\cos \left[\arctan \left(-\frac{y}{x} \right) - \frac{3}{2} \arctan \frac{-2xy}{x^2 + y^2 - a^2} \right]$$

$$d_6 = -\frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{[(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2]^{\frac{3}{4}}}$$

$$\sin \left[\arctan \left(-\frac{y}{x} \right) - \frac{3}{2} \arctan \frac{-2xy}{x^2 + y^2 - a^2} \right]$$

若将坐标轴平移至裂尖处 $(a, 0)$, 然后将直角坐标转换为极坐标, 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 将应力表达式转换成极坐标下的形式, 就得到了裂尖局部的应力表达式。至此, 得到了由于在 $B(a, 0)$ 作用点热源时域内的应力场, 同理可以计算得到在 A 点作用点热源时的应力分布, 将两个计算结果叠加即可得到由于在含有中心裂纹的导电薄板内通入电流时的应力场。

4 算例

取牌号为 GH2132 的高温合金钢制成的带有中心裂纹的薄板, 如图 1 所示, 裂纹长 $2a = 20 \text{ mm}$, 材料的导热系数以 100 和 900 时的值作为两点

拟合成为一条直线后可得 $\beta_r=1.048 \times 10^{-3}$ ，电导率 $\sigma=1.112 \times 10^6 (\Omega \cdot m)^{-1}$ ，材料的线胀系数及弹性模量取值见文献 [9]。当初始电流密度 $J_0=3.5 \times 10^9 A/m^2$ 、 $r=1.5 mm$ 时，裂尖处的应力值($\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$)随 θ 的变化关系如图 2 所示，其中曲线 1、3、5 分别为 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 应力值，而曲线 2、4、6 为考虑了材料的常数随温度变化时相应的应力值。当 $\theta=0$ 时，上述应力值随 r 的变化关系如图 3 所示。在图 3 中，曲线 1 为应力 σ_r, σ_θ 值（由计算得知，当 $\theta=0$ 时， σ_r 与 σ_θ 值相等），而曲线 2 为考虑了材料的常数随温度变化时相应的应力值。同样，若取 $\theta=0, r=1.5 mm$ 时 J_0 对上述应力值的影响见图 4。

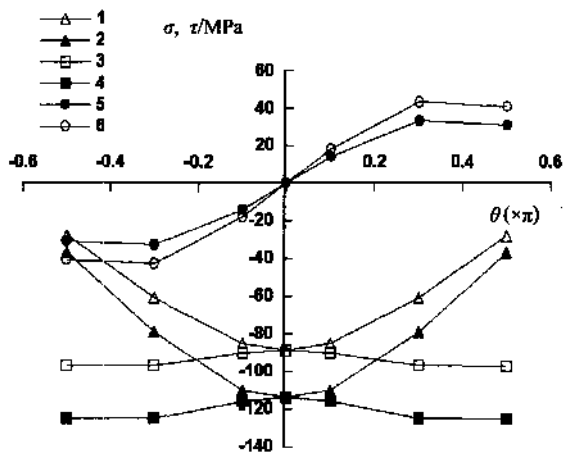


图 2 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta} \sim \theta$ 曲线
Fig. 2 Curve of $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta} \sim \theta$

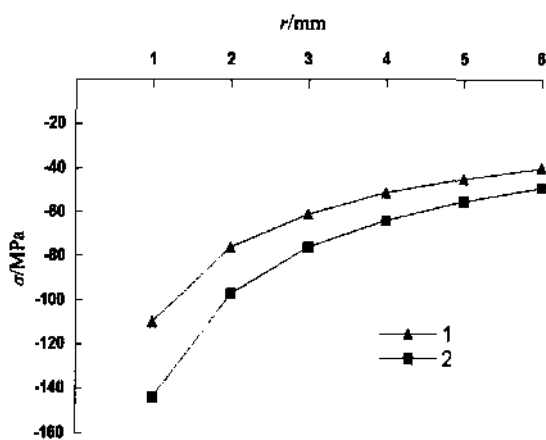


图 3 $\sigma_r, \sigma_\theta \sim r$ 曲线
Fig. 3 Curve of $\sigma_r, \sigma_\theta \sim r$

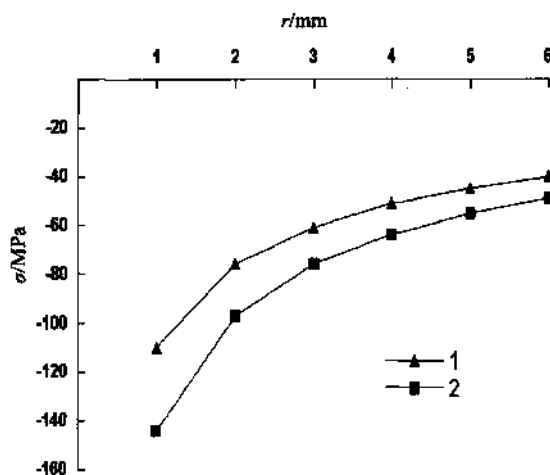


图 4 $\sigma_r, \sigma_\theta \sim J_0$ 曲线
Fig. 4 Curve of $\sigma_r, \sigma_\theta \sim J_0$

5 结论

- 1) 应用复变函数的方法可以求解带有中间裂纹载流薄板裂尖附近及整个薄板的温度应力场。
- 2) 当通入的电流密度达到一定值时，裂纹前缘的温度可以达到材料的熔点以上。裂纹前缘熔化范围的大小取决于通电电流密度、导电薄板材料及几何尺寸。
- 3) 考虑到熔化区的应力释放，且在通电时间极其短暂（约为 $100 \mu s$ ）的情况下，裂纹尖端附近的应变速率 $\dot{\epsilon} = \frac{\alpha_0 \Delta T}{t}$ 将非常大。塑性变形在这样高的应变速率下来不及发生，故在裂纹尖端熔化区外一定尺寸范围内，温度应力可以近似地按弹性区来计算。
- 4) 裂纹前缘产生的温度应力均为压应力，且随着 r 和 θ 的变化而变化。计算得知：当 θ 在一定范围内， σ_r 和 σ_θ 的数值相近且均为压应力，随着 r 的增大，应力绝对值递减且趋于平缓。
- 5) 由于电磁热效应产生的应力场是一自平衡系统，拉应力区远离裂纹尖端，因此，可有效地遏制裂纹的扩展。
- 6) 随着通入电流密度的增加，裂纹前缘处的压应力的绝对值在增加。适当控制通入电流密度，即可得到遏制裂纹扩展所需的应力数值。对带有裂纹的金属构件通入电流瞬间所产生的热应力、相变

应力与外载荷所产生的机械应力共同作用下的止裂作用。

本文只给出了温度应力成分的具体计算方法,为推广电磁热效应裂纹止裂在工程中的应用,打下了理论分析的基础。

参考文献

- [1] 白象忠, 胡宇达, 谭文锋. 电磁热效应裂纹止裂研究的进展 [J]. 力学进展, 2000, 25 (4): 546-557.
- [2] 毕德显. 电磁场理论 [M]. 北京: 电子工业出版社, 1985.
- [3] Си (G. C. Sih. 薛昌明). Теплопроводность в бесконечной среде с разрывными линиями [J]. Прикл. механика. Се

р. С. Тепло-Передача, 1965, 87 (2): 157-162.

- [4] Прусов. И. А. Некоторые задачи термоупругости [M]. Минск. Изд-во БГУ, 1972: 12-40
- [5] Кудрявцев. Б. А, Партон. В. З, Рубинский. Б. Д. Магнитотермоупругость поле в теле с полубесконечным разрезом. При. Мат и Мех, 1980, 44 (5): 916-922
- [6] Кит. Г. С, Кривцун. М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами [M]. Киев. Наукова думка. 1983: 18-40.
- [7] E. R. G. 埃克特, R. M. 德雷克, 著. 传热与传质分析 [M], 航青, 译. 北京: 科学出版社, 1983.
- [8] 王补宣. 工程传热传质学 [M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [9] 工程材料实用手册编辑委员会. 工程材料实用手册 [M]. 北京: 中国标准出版社, 1989.

Stress field around crack tip inside thin current-carrying plate

TIAN Zhen-guo^{1,2}, ZHENG Jian^{1,3}, BAI Xiang-zhong^{1,2}

(1. The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical (LNM), Beijing 100080, China; 2. College of Architecture Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhangdao, Hebei 066004, China; 3. Dept. of Artillery Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang, Hebei 050003, China)

Abstract: In this paper, a thin current-carrying plate with a penetrated crack is analysed when an instant electric current is switched on. Complex analysis method is used to propose the way of how to calculate the point heat source which is formed owing to the heat concentration effect on the crack tip. Furthermore, the temperature field and the stress field near the crack leading edge are also deduced. Theoretical analysis and experimental surveys show that if the electric current density is controlled, the material around the crack tip will melt due to the heat concentration effect, at the same time the super passive tissue and the compressive stress around the crack tip can prevent the crack from propagating. The influence of heat transfer coefficient varying with temperature on stress field is also discussed.

Key words: thin current-carrying plate; crack tip; temperature field; stress field; complex function