

研究简报

计算平面、型复合应力强度因子的半权函数法*

SEMI-WEIGHT FUNCTION METHOD ON COMPUTATION OF MIXED-MODE STRESS INTENSITY FACTORS

马开平** 柳春图

(中国科学院力学研究所 工程科学部, 北京 100080)

MA Kaiping LIU Chuntu

(Department of Engineering Sciences, Institute of Mechanics, Chinese Academic Sciences, Beijing 100080, China)

摘要 给出计算一般平面裂纹问题应力强度因子的半权函数方法。该方法引入两个满足裂纹面零应力条件、平衡方程以及裂尖位移具有 $r^{-1/2}$ 奇异性的虚拟位移与应力函数的解析表达式, 即半权函数。从功能互等定理出发, 结合从裂纹下缘到上缘绕裂尖任意路径的位移与应力的近似值, 得到、复合型应力强度因子 K 和 K 积分形式的表达式。由于在积分中避开了裂尖的奇异性, 因此即使采用较粗糙的模型或方法得到的近似值, 也可以得到精度较高的 K 、 K 。相对于权函数法, 本方法的限制条件较少, 半权函数易于获得, 实用性强; 相对于有限元法计算量小, 模型建立简便。

关键词 平面裂纹问题 半权函数法 功能互等定理 应力强度因子 路径独立积分

中图分类号 O346.1

Abstract Semi-weight function method was used and developed to solve general plane fracture problems. Two sets of analytical expression of semi-weight functions were obtained. Integral expression of composite stress intensity factors, were obtained from reciprocal work theorem with semi-weight functions and approximate displacement and stress values on any integral path around crack tip. These semi-weight functions satisfy conditions of equilibrium equation, stress and strain relationship, special singularity of displacement near the crack tip and the traction free on the crack surface. The singularity of stress near crack tip is avoided. The approximate values can be calculated from numeric methods. FEA was used to calculate approximate values in this paper. There were no singular elements be used in modeling. With rough mesh size, the semi-weight function method can get more precision result than that from pure FEA with fine mesh size and singular elements on crack tip. The calculation results of applications show that among high precision calculation methods, compared with the weight function method, this method provides applicable analytical expressions of semi-weight functions and in less restrict conditions. Compared with finite element method, it needs fewer amounts of calculation and simple and convenient FEA model.

Key words Plane fracture problems; Semi-weight function method; Reciprocal work theorem; Stress intensity factors; Path-independent integrals

Corresponding author: MA Kaiping, E-mail: mars_88@ina.com, Fax: +86-10-62561284

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 19872066).

Manuscript received 20020617, in revised form 20020724.

1 引言

任何工程结构都不可避免的有类似裂纹的缺陷存在, 为了定量分析这些结构的力学性能, 断裂力学中引入了应力强度因子这一关键参量。应力强度因子是一个与裂纹体几何构形、外加应力等相关的量, 是不能够直接测出的, 必须根据裂纹体的状态进行计算。由于数学上的困难, 只存在少量封闭形式的解, 主要集中在无限大体、反平面问题等几个特殊状态下。而实际问题往往是有限大体, 承受复杂应力, 裂纹体的应力应变关系也很复杂。因此, 获得解析形式的解就比较少。

有限元法在求解应力强度因子中的应用非常广泛, 它不受解析方法常遇到的因裂纹体几何和载荷的复杂性的限制, 其重点在于恰当地模拟裂纹尖端的奇异性并用 K 来解释其结果。由于裂纹尖端奇异性的存在, 模拟这种状态需要大量的单元, 而当引入奇异单元以少量的单元模拟裂尖奇异性时, 刚度矩阵的带宽被增加了, 使得计算量的减少较为有限。模拟裂纹尖端的奇异性并确定节点位移之后, 需通过一定的中间计算(直接法或间接法)得出 K 值。因此该方法存在计算工作量大的缺点。

权函数法是由 Bueckner 在 1970 年提出的^[1], 权函

* 20020617 收到初稿, 20020724 收到修改稿。国家自然科学基金资助项目(19872066)。

** 马开平, 男, 1974 年 8 月生, 四川宜宾人, 汉族。博士研究生, 研究方向为断裂力学。

数法给出了解耦裂纹几何和载荷配置两类影响的途径。只要对确定的裂纹体求解到了对应的权函数,就可以对任何载荷使用简单的积分完成应力强度因子的计算。利用权函数,应力强度因子用加权积分的方法直接表示为所受边界力和体力的积分。

$$K_i = \int_{\Gamma} TU^{(i)} ds + \int_{\Omega} FU^{(i)} d\Omega \quad (i = I, II, III) \quad (1)$$

式中 Γ 为应力边界, T 为裂纹体在应力边界上的外力大小, F 为体力, $U^{(i)}$ 为权函数。然而,由于权函数是与裂纹体的几何尺寸相关的,在应用权函数法的过程中,必须针对具体的几何构形求解相应的权函数,其难度大致相当于求解一个裂纹问题。当几何构形相当复杂的情况下,求解一个权函数在数学上的难度是很大的。同时对于有限大体,由于满足边界条件的困难,很难求得一个理想的权函数。

柳春图和张端中在 1991 年提出了半权函数^[2],使用与权函数类似的形式,用积分表达出应力强度因子,而且半权函数与裂纹体的几何尺寸无关,对边界条件没有要求。该方法在计算 I 型的平面问题中得到了很好的应用。本文将半权函数法加以推广,并应用该方法计算 II、III 型复合应力强度因子,从而为平面问题的一般情况作出较为精确简便的解答。

2 用半权函数表示的 II、III 型复合应力强度因子

考虑一个受任意载荷的含裂纹的平面结构,取出该结构中的任意一个包含部分裂纹面的域 Ω , 在区域的边界中,除去两个裂纹面 C_s 以外的边界为 Γ , 即该区域的边界为 $\partial\Omega = C_s + \Gamma$, 沿裂纹尖端为中心挖取一个半径为 R 的小圆,其边界以 C_R 表示,设被挖掉裂纹尖端以后的区域为 Ω^+ , 裂纹面为 \bar{C}_s , 则有

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow 0} \Omega^+ = \Omega \\ \lim_{R \rightarrow 0} \bar{C}_s = C_s \end{cases} \quad (2)$$

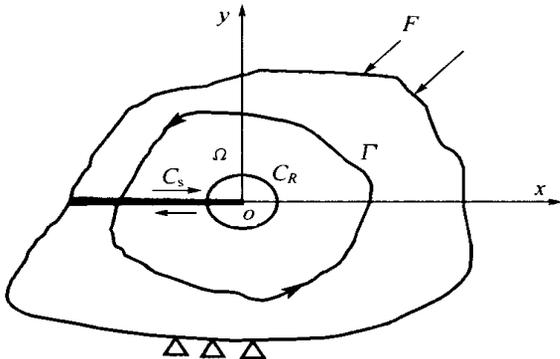


图 1 裂纹体与积分路径

Fig. 1 Crack body and integral path

利用功的互等定理,得到

$$\int_{\Gamma} f_i^{(s)} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} p_i^{(s)} u_i d\Omega = \int_{\Gamma} f_i u_i^{(s)} d\Gamma + \int_{\Omega} p_i u_i^{(s)} d\Omega \quad (3)$$

此处 (u_i, p_i, f_i) 和 $(u_i^{(s)}, p_i^{(s)}, f_i^{(s)})$ 分别为两组位移、面力和体力。变换上式并略去体力得到

$$\int_{C_R} (p_i^{(s)} u_i - p_i u_i^{(s)}) ds + \int_{\bar{C}_s} (p_i^{(s)} u_i - p_i u_i^{(s)}) ds = \int_{\Gamma} (p_i u_i^{(s)} - p_i^{(s)} u_i) ds \quad (4)$$

假设 (u_i, p_i) 为真实位移和面力的近似值,在裂纹面上必然有 $p_i = 0$ 。在设置一组虚拟的位移和面力 $(u_i^{(s)}, p_i^{(s)})$, 令其满足平衡方程、应力应变关系,裂纹尖端有 $\lim_{r \rightarrow 0} u_i = O(r^{1/2})$, 且在裂纹面上面力 $p_i^{(s)} = 0$ 。满足以上条件的虚拟的位移和面力即为半权函数,上述表达式变为

$$\int_{C_R} (p_i^{(s)} u_i - p_i u_i^{(s)}) ds = \int_{\Gamma} (p_i u_i^{(s)} - p_i^{(s)} u_i) ds \quad (5)$$

考虑到裂纹尖端的奇异性, II、III 复合型裂纹的裂尖位移与应力场为

$$\begin{cases} u = \frac{K}{2G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[k - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \\ \frac{K}{2G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[k + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ v = \frac{K}{2G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[k + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] - \\ \frac{K}{2G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[k - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ x = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{r} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \\ \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{r} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ y = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{r} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \\ \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{r} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ xy = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{r} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \\ \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{r} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (6)$$

式中 $k = 3 - 4\nu$ 平面应变
 $k = (3 - 2\nu)/(1 + \nu)$ 平面应力

引入两组半权函数,分别为

$$\begin{cases} u_1^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}r} \left[(3-2k)\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{5\pi}{2} \right] \\ v_1^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}r} \left[(3+2k)\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{5\pi}{2} \right] \\ x_1^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}} Gr^{-3/2} \left\{ \cos\frac{3\pi}{2} + 3\cos\frac{7\pi}{2} \right\} \\ y_1^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}} Gr^{-3/2} \left\{ 7\cos\frac{3\pi}{2} - 3\cos\frac{7\pi}{2} \right\} \\ x_{y1}^{(s)} = -\frac{3}{2(k+1)\sqrt{2}} Gr^{-3/2} \left\{ 3\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{7\pi}{2} \right\} \\ u_2^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}r} \left[(1+2k)\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{2} \right] \\ v_2^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}r} \left[(1-2k)\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{5\pi}{2} \right] \\ x_2^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}} Gr^{-3/2} \left\{ 5\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin\frac{7\pi}{2} \right\} \\ y_2^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}} Gr^{-3/2} \left\{ 3\sin\frac{3\pi}{2} - 3\sin\frac{7\pi}{2} \right\} \\ x_{y2}^{(s)} = \frac{1}{2(k+1)\sqrt{2}} Gr^{-3/2} \left\{ \cos\frac{3\pi}{2} + 3\cos\frac{7\pi}{2} \right\} \end{cases} \quad (7)$$

再由

$$\begin{cases} p_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \\ p_2 = -y \cos \theta + x \sin \theta \end{cases} \quad (8)$$

代入式(5),变换后得到 K 、 K' 型应力强度因子的表达式

$$\begin{cases} K = \int (p_i u_{i1}^{(s)} - p_{i1}^{(s)} u_i) ds \\ K' = \int (p_i u_{i2}^{(s)} - p_{i2}^{(s)} u_i) ds \end{cases} \quad (9)$$

与权函数相比,半权函数放松了限制条件,使得平面问题的半权函数可以精确地得到。本文所引入的半权函数与参考位移应力相结合,在以裂尖为圆心半径趋近于0的圆弧路径上进行积分,得到应力强度因子的积分表达式。由于半权函数的奇异性,使得该积分表达式中避开了真实裂尖的奇异性问题。由公式(9)可以直接用半权函数求取不同几何构形的裂纹体的应力强度因子。半权函数对任意积分回路上的位移与应力近似值的加权积分都可以得到应力强度因子较精确的结果,公式(9)中的 p_i 和 u_i 即为积分路径上的近似值。还应当指出的是,裂纹尖端的奇异性仅仅是结构的一个局部现象,同时随着 r 的增大,裂尖奇异项的作用迅速减小,因此采用绕裂尖某一段距离的回路积分的方式所得到的应力强度因子是可以满足计算精度的。

3 算例分析

以算例说明半权函数法在求解平面 K 、 K' 型复合应力强度因子的应用。以下算例中,采用有限元软件

ANSYS 计算积分路径上的近似值,有限单元采用二维平面应变的 8 节点单元,积分路径选取为从裂纹下缘绕裂尖至裂纹上缘的一段弧形,该段弧形半径大于裂尖最大单元的尺寸。由前面的推导可以知道式(9)中的积分路径是独立的,此处选取弧形路径是为了计算方便,针对不同情况例如不同的结构载荷或不同的近似值计算方法,可以选取任意的积分路径。用该路径上各点的位移和应力有限元结果求得位移和面力并代入式(9),即可计算出 K 和 K' 。

在有限元网格的划分和积分路径选取方面,一般说来,有限元网格越密计算精确程度越高,但是在积分路径较为合理的情况下,这种精度增高的趋势并不明显,也就是说通过较为稀疏的网格划分与合理的路径选取相结合,可以减少有限元计算的工作量。根据裂尖应力应变场的特性以及计算经验,在保证结构其他部分计算精度的前提下,只要积分路径至裂尖的最小尺寸(此处都为圆弧半径)大于在该处的一个网格尺寸,并且积分路径不过于靠近结构的边界,计算结果都是可以接受的。在本文的计算中,出于构模和计算简便的考虑,一般都选取 ANSYS 中的自动划分网格,积分路径选取为以裂尖为圆心的圆弧,且圆弧在径向上至少包含一个网格。

3.1 中心裂纹板受单向拉伸

首先用本方法计算矩形中心裂纹板在受单向拉伸情况下的 K ,设板的宽度为 $2b$,长度为 $2h$,裂纹长度为 $2a$,与文献[4]对应,选取 a 、 b 、 h 分别为 0.025 4 m、0.127 m 和 0.127 m,弹性模量 E 为 2.067×10^{11} Pa,泊松比 ν 为 0.3,所受拉伸载荷的大小为 3 887 Pa。

由于结构载荷的对称性,选取 1/4 结构进行计算(如图 2),左侧为 ANSYS 手册中的算例,对应于文献[4]的实验结果,该算例对结构作网格自动划分,并建立了裂尖处考虑奇异性的特殊单元,其单元数为 96;本文对网格划分较为稀疏的情况(自动划分网格,没有裂尖奇异单元,单元数为 30)用半权函数法作了计算。其结果对比如表 1,可以看出使用半权函数,即使网格划分较粗且未采用裂尖奇异元,其结果较之有限元法

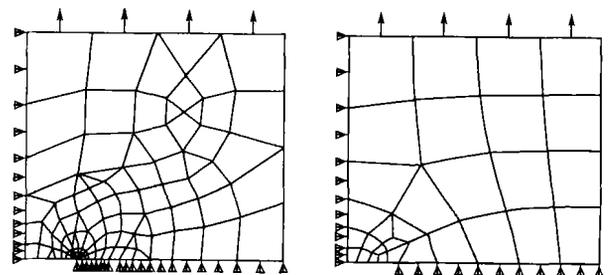


图 2 中心裂纹矩形板受单向拉伸

Fig. 2 Center-crack tension rectangle plane

表 1 中心裂纹矩形板受单向拉伸计算结果比较

Tab.1 Comparison result of center-crack tension rectangle plate

文献 Ref. [4]	ANSYS(96 单元 elements)	半权函数法 Semi-weight function method (30 单元 elements)
K	89.684	91.785

仍然更与实验接近。

3.2 单边斜裂纹板受单向拉伸

再计算含单边斜裂纹矩形板受单向拉伸的情况,该情况为典型的、复合型,选取泊松比为 0.3,弹性模量为 2.1×10^{11} Pa, b 为 2 m, a/b 从 0.1 到 0.5, 为 45° , 载荷 $\sigma = 1$ Pa, 选取坐标系如图 3。将结构划分成 545 个单元, 计算 K_I 、 K_{II} , 并与文献[3] 进行比较(图 4), 最大差异不超过 3%。图中 $K = F \sqrt{a}$, “+”为本文计算结果, “*”为文献[3] 的结果。

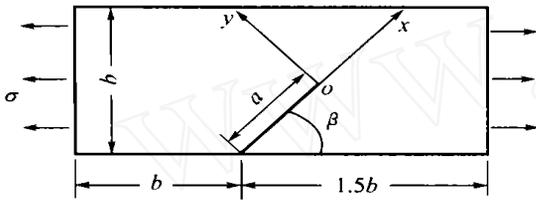


图 3 含单边斜裂纹矩形板受单向拉伸

Fig.3 Skew single-edge-crack tension rectangle plate

3.3 含裂纹角钢的应力强度因子计算

计算如图 5 所示含裂纹角钢的模型, 该模型左上角的销孔被焊接为完全约束, 右下角的销孔顶端由中间到两边受递减的压力(从 10 Pa 到 1 Pa), 角钢的内侧根部含与水平方向成 45° 的单边裂纹。结构尺寸如图 5 所示, 其中销孔直径为 0.025 m, 倒圆的半径为 0.01 m, 计算裂纹长度 a 从 0.01 m 到 0.045 m 的应力强度因子, 图中 $K = F \cdot 1 \cdot \sqrt{a}$ 。

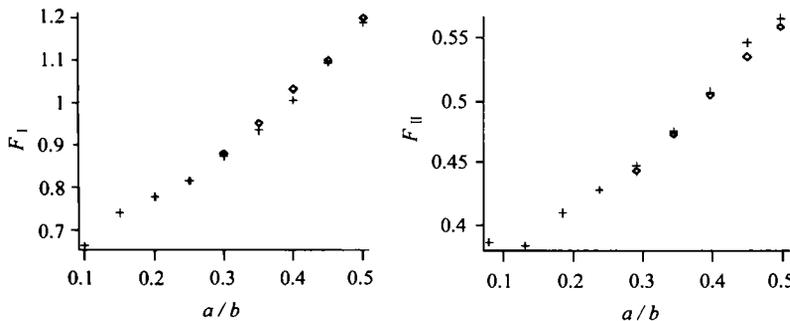


图 4 单边斜裂纹受单向拉伸的应力强度因子

Fig.4 SIF of skew single-edge-crack tension rectangle plate

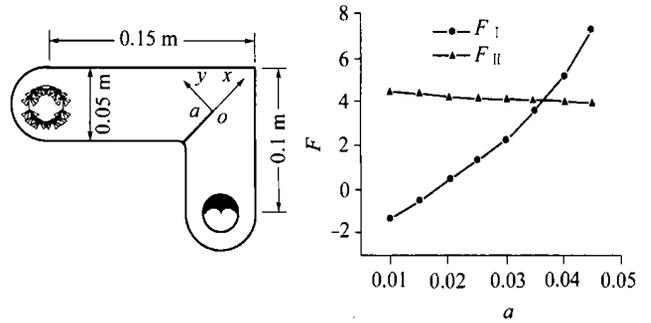


图 5 含裂纹角钢的应力强度因子

Fig.5 SIF of corner bracket with crack

可以看出,在这种较复杂的结构与载荷作用下,本方法可以得到很好的结果。随着裂纹长度的增加,、型应力强度因子都随之增大。其中 K_I 由负值增大到正值,当 a 约等于 0.017 m 时 K_I 约等于 0, 此时相当于纯 II 型裂纹情况; 当 a 约等于 0.035 m 时 K_I 和 K_{II} 大致相等。

4 结论

1) 通过对一般含裂纹平面问题的分析, 得到满足半权函数基本条件的两组函数, 并以该两组半权函数推导出、复合型的平面问题应力强度因子 K_I 、 K_{II} 相互独立的表达式, 由推导过程可以看出, 本方法适用于任意位置裂纹的计算。

2) 采用本文方法计算了多种情况的应力强度因子, 在可供比较的结果上都与文献符合得很好。

3) 由于裂尖的奇异性已经在方法的提出中得到充分的考虑, 因此在用诸如有限元对结构进行分析时可以侧重于结构整体的构模, 用粗糙的模型也可获得较精确的结果。

4) 本文采用的方法简单可靠、精度高、实用性强。

References

- 1 Bueckner H F. A novel principle for the computation of stress intensity factor. ZAMM, 1970, 50: 529 ~ 546.
- 2 Liu C T, Zhang D Z. Semi-weight function method in fracture mechanics. International Journal of Fracture, 1991, 48: R3 ~ R8.
- 3 China Aeronautical Establishment. Stress intensity factors handbook. Beijing: Science Press, 1993. 320 ~ 321 (In Chinese) (中国航空研究院. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社, 1993. 320 ~ 321).
- 4 Brown W F, Srawley J E. Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials. ASTM STP410, 1969. 77.