文章编号: 1671-8879(2003)01-0061-03

湍流大小尺度涡量方程组及其封闭

李明军
(中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

摘　要: 利用流体大小尺度(LSS)方程组推导出湍流大小尺度涡量(LSSV)方程组, 给出两个关于湍流大小尺度涡量的命题, 从而得到湍流封闭大小尺度涡量(CLSSV)方程组。同时, 对近程相互作用命题进行了推广。

关键词: 力学; 流体大小尺度方程组; 湍流大小尺度涡量方程组; 近程相互作用
中图分类号: O241.82　　**文献标识码**: A

Large-small scale vortex equations of turbulence and its closed

LI Ming-jun
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: By using of fluid large-small scale equations, fluid large-small scale vortex equations are gained. Then, two propositions are listed, and closed large-small scale vortex equations of turbulence are present. The proposition of contiguous interactions is generlized.

Key words: mechanics; fluid large-small scale equations; fluid large-small scale vortex equations; contiguous interactions

湍流不仅是一种有涡流动, 而且不同尺度旋涡之间的相互作用并不相同。旋涡相互作用理论的已有成就主要是Bossinesq-Parandtl-Taylor等的涡粘性假说, 涡粘性模型显然是一个远程(即旋涡尺度大小可以分得很开的)相互作用模型[1~4]。涡粘性概念构成已有湍流模型的基础, 但这些湍流模型都离不开经验或半经验假定[5~8]。这是因为仅当小涡尺度与大涡尺度相距很大, 就象分子粘性中分子平均自由程与流动宏观长度相距很大那样, 涡粘性概念才完全正确的。然而实际情况并非如此, 特别是人们普遍认为相互作用主要是尺度相近旋涡之间的相互作用。这就是说, 小涡(涡尺度小于大小涡分割尺度 $V_c^{1/3}$)对大涡(涡尺度大于 $V_c^{1/3}$)的作用, 主要是涡尺度靠近分割尺度的那些小涡的作用[5]。在大小涡相互作用现象中, 问题的的特征尺度是分割尺度, 量纲分析表明相互作用大小与分割尺度平方成正比, 即 $I_c \propto V_c^{2/3}$。最近, 文献[1]提出了湍流大小尺度(LSS)方程组理论, 对旋涡相互作用和湍流问题作了有益的新探索。湍流运动包含了宽广的尺度范围, 大到流动边界尺度, 小到湍流微尺度 $\Delta x d_m$ ($m=1, 2, 3$), 若考虑尺度大于 $\Delta x d_m$ 的大涡层次与尺度小于 $\Delta x d_m$ 的小涡层次运动之间的相互作用(MI), 则相互作用的动量大小为

$$I = \frac{1}{V}\int [(\vec{u}_i - \vec{U}_i)\nabla](\vec{u}_j - \vec{U}_j)\delta_V$$

在涡粘性概念成立, 即小涡以扩散方式作用于大涡的假设下, 由 $(\vec{u}_i - \vec{U}_i)(\vec{u}_j - \vec{U}_j)$ 可导出著名的Prandtl混合长关系, 这是相互作用(MI)项正确性的一个表现。据此, 文献[1]通过流体大小尺度相互作用(MI)的比较, 假定大小涡分割尺度 $V_c^{2/3} \gg V_f^{2/3}$, 那么 $\vec{I}_c \gg \vec{I}_f$ (其中 $\vec{I}_c \gg \vec{I}_f$ 为小涡对大涡的动量相互作用(MI)项), 从而得到流体封闭大小尺度(CLSS)方程组。文献[2]利用对时间-空间的平均运算, 得到了广义涡量动力学(GVD)方程组。

收稿日期: 2002-07-03
作者简介: 李明军(1968-), 男, 湖南益阳人, 中国科学院力学研究所博士后

1 近程相互作用命题的一个证明

对不可压缩流体, 流体运动大小尺度(LSS)方程组为

$$\nabla \vec{U}_c = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{U}_c}{\partial t} + (\vec{U}_c \nabla)\vec{U}_c = -\frac{1}{\rho}\nabla P_c + v\nabla \vec{U}_c - \vec{I}_c \tag{2}$$

和

$$\nabla \vec{U}_f = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{U}_f}{\partial t} + (\vec{U}_f \nabla)\vec{U}_f = -\frac{1}{\rho}\nabla P_f + \upsilon\nabla^2 \vec{U}_f - \vec{I}_f \tag{4}$$

其中

$$\vec{I}_c = \frac{1}{V_c}\int_c [(\vec{u} - \vec{U}_c)\nabla](\vec{u} - \vec{U}_c)\delta v \tag{5}$$

$$\vec{I}_f = \frac{1}{V_f}\int_f [(\vec{u} - \vec{U}_f)\nabla](\vec{u} - \vec{U}_f)\delta v \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}(\vec{U}_c, P_c) &= \frac{1}{V_c}\int_c (\vec{u}, p)\delta v \\ (\vec{U}_f, P_f) &= \frac{1}{V_f}\int_f (\vec{u}, p)\delta v\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中: $\vec{u}$为流体质点的速度; p 为压力; V_c 和 V_f 分别是粗细网格体积元; $\vec{I}_c$ 和 $\vec{I}_f$ 为小涡对大涡的动量相互作用(MI)项, 假定$V_c \gg V_f$。

记V 为Hilbert 空间, (·,·)为V 上的内积, ‖·‖为V 上的范数。文献[1]首先给出近程相互作用命题, 下面给出该命题的一个推广。

命题1 若$V = R^n$ 上的Navier-Stokes 方程组

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (u\nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + v\nabla u \tag{8}$$

解 $u_j\,(j = 1, 2, \cdots, n)$连续可微, 它的流体运动大小尺度(LSS)方程组为式(1)、式(2), 则对任意 $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$\|(u_i - U_{ci}, u_j - U_{cj})\| \cong \|(U_{fi} - U_{ci}, U_{fj} - U_{cj})\| \tag{9}$$

证 NS 方程组解 $u_j\,(j = 1, 2, \cdots, n)$连续可微, 由积分中值定理知, 存在 $\xi = (x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cn}) \in V_c$, $\eta = (x_{f1}, x_{f2}, \cdots, x_{fn}) \in V_f$ 使得

$$(u_i - U_{ci}, u_j - U_{cj}) = \left(u_i - \frac{1}{V_c}\int_c u_i\delta v, u_j - \frac{1}{V_c}\int_c u_j\delta v\right) = (u_i(x,t) - u_i(\xi,t), u_j(x,t) - u_j(\xi,t)) \tag{10}$$

$$(U_{fi} - U_{ci}, U_{fj} - U_{cj}) = \left(\frac{1}{V_f}\int_f u_i\delta v - \frac{1}{V_c}\int_c u_i\delta v, \frac{1}{V_f}\int_f u_j\delta v - \frac{1}{V_c}\int_f u_j\delta v\right) = (u_i(\eta,t) - u_i(\xi,t), u_j(\eta,t) - u_j(\xi,t)) \tag{11}$$

不失一般性, 可假设 $\Delta x_{c1} = \Delta x_{c2} = \cdots = \Delta x_{cn}$, $\Delta x_{f1} = \Delta x_{f2} = \cdots = \Delta x_{fn}$。那么, 据 $u_j\,(j = 1, 2, \cdots, n)$连续可微, 必存在正数$M > 0$(只与流体区域$V$ 有关, 与V_c, V_f 无关), 使得

$$\|(u_i(x,t) - u_i(\xi,t), u_j(x,t) - u_j(\xi,t))\| \cong M^2\Delta x_c^2 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\|((u_i(\eta,t) - u_i(\xi,t), u_j(\eta,t) - u_j(\xi,t))\| \cong \\ &\|((u_i(x,t) - u_i(\xi,t), u_j(x,t) - u_j(\xi,t))\| \pm \\ &\|((u_i(\eta,t) - u_i(x,t), u_j(x,t) - u_j(\xi,t))\| \pm \\ &\|((u_i(\eta,t) - u_i(x,t), u_j(\eta,t) - u_j(x,t))\| \pm \\ &\|((u_i(x,t) - u_i(\xi,t), u_j(\eta,t) - u_j(x,t))\| \cong \\ &M^2(\Delta x_c^2 \pm 2\Delta x_f\Delta x_c \pm \Delta x_f^2) = M^2\Delta x_c^2\left[1 \pm 2\frac{\Delta x_f}{\Delta x_c} \pm \left(\frac{\Delta x_f}{\Delta x_c}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{13}$$

由$V_c \gg V_f$ 知, $V_f V_c^{-1} \ll 1$, 从而有

$$\|(u_i(x,t) - u_i(\xi,t), u_j(x,t) - u_j(\xi,t))\| \cong \|(u_i(\eta,t) - u_i(\xi,t), u_j(\eta,t) - u_j(\xi,t))\| \tag{14}$$

至此近程相互作用命题得证。

2 湍流大小尺度涡量(LSV)方程组

由张量分析知, 可以将式(2)表示为如下形式

$$\frac{\partial \vec{U}_c}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{U}_c^2}{2}\right) - \vec{U}_c \times \vec{\Omega}_c = -\frac{1}{\rho}\nabla P_c + \upsilon\nabla^2\vec{U}_c + \frac{1}{V_c}\int_c \nabla\left(\frac{U_c^2}{2}\right)\delta v - \frac{1}{V_c}\int_c (\vec{u} - \vec{U}_c)(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_c)\delta v \tag{15}$$

按照通常的假定, 湍流场满足微分和积分运算次序可交换的数学性质。以∇叉乘式(1)～(4), 即得湍流大小尺度涡量(LSV)方程组为

$$\nabla \vec{\Omega}_c = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}_c}{\partial t} + (\vec{U}_c\nabla)\vec{\Omega}_c = (\vec{\Omega}_c\nabla)\vec{U}_c + \upsilon\nabla^2\vec{\Omega}_c + \vec{\Gamma}_c \tag{17}$$

和

$$\nabla \vec{\Omega}_f = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}_f}{\partial t} + (\vec{U}_f\nabla)\Omega_f = (\Omega_f\nabla)U_f + \upsilon\nabla^2\Omega_f + \Gamma_f \tag{19}$$

其中

$$\vec{\Gamma}_c = \frac{1}{V_c}\int_c [(\vec{u} - \vec{U}_c)\nabla](\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_c)\delta v - \frac{1}{V_c}\int_c [(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_c)\nabla](\vec{u} - \vec{U}_c)\delta v \tag{20}$$

$$\vec{\Gamma}_f = \frac{1}{V_f}\int_f [(\vec{u} - \vec{U}_f)\nabla](\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_f)\delta v - \frac{1}{V_f}\int_f [(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_f)\nabla](\vec{u} - \vec{U}_f)\delta v \tag{21}$$

表示小涡(涡尺度小于大小涡分割尺度$V_c^{1/3}$)对大涡(涡尺度大于$V_c^{1/3}$)和更小涡(涡尺度小于大小涡分割尺度$V_f^{1/3}$)对小涡(涡尺度大于大小涡分割尺度$V_f^{1/3}$)的涡量输运。

限于篇幅, 下述命题2, 3 的证明在此从略。

命题2 若湍流质点运动涡量方程组 $\vec{\Omega}_j\,(j = 1,$

2, 3) 连续可微, 则有

$$[(\vec{u}-\vec{U}_c)\nabla](\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_c)\cong[(\vec{U}_f-\vec{U}_c)\nabla](\vec{\Omega}_f-\vec{\Omega}_c) \tag{22}$$

$$[(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_c)\nabla](\vec{u}-\vec{U}_c)\cong[(\vec{\Omega}_f-\vec{\Omega}_c)\nabla](\vec{U}_f-\vec{U}_c) \tag{23}$$

命题 3　若湍流质点运动涡量方程组 $\vec{\Omega}_j$ ($j=1$, 2, 3) 连续可微, 则对任意 $j=1, 2, 3$, 有

$$\Gamma_{cij}^{(1)}=\frac{1}{V_c}\int_c (u_j-U_{cj})\frac{\partial}{\partial x_j}(\Omega_i-\Omega_{ci})\,\delta v\propto V_c^{2/3} \tag{24}$$

$$\Gamma_{cij}^{(2)}=\frac{1}{V_c}\int_c (\Omega_i-\Omega_{ci})\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j-U_{cj})\,\delta v\propto V_c^{2/3} \tag{25}$$

不失一般性, 假设

$$\frac{\Delta x_f}{\Delta x_c}=\frac{\Delta y_f}{\Delta y_c}=\frac{\Delta z_f}{\Delta z_c}$$

则由式(24)、(25) 推出

$$\vec{\Gamma}_f=\frac{1}{V_c}\int_c[(\vec{u}-\vec{U}_c)\nabla](\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_c)\,\delta v-\frac{1}{V_c}\int_c[(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_c)\nabla](\vec{u}-\vec{U}_c)\,\delta v\cong\left(\frac{\Delta x_f}{\Delta x_c}\right)^2\vec{\Gamma}_c \tag{26}$$

若 $\left(\frac{\Delta x_f}{\Delta x_c}\right)^2\ll 1$, 则有 $|\vec{\Gamma}_f|\ll|\vec{\Gamma}_c|$。记

$$\vec{\Gamma}_{cf}=\frac{1}{V_c}\int_c[(\vec{U}_f-\vec{U}_c)\nabla](\vec{\Omega}_f-\vec{\Omega}_c)\,\delta v-\frac{1}{V_c}\int_c[(\vec{\Omega}_f-\vec{\Omega}_c)\nabla](\vec{U}_f-\vec{U}_c)\,\delta v \tag{27}$$

另一方面, 由涡量输运的近程相互作用关系式(22)、(23), 可知 $\vec{\Gamma}_c\cong\vec{\Gamma}_{cf}$。综合湍流大小尺度涡量(LSSV) 方程组式(16)～(19), 将两方程组相减, 即可得到如下近似封闭大小尺度涡量(CLSSV) 方程组

$$\nabla\vec{\Omega}_c=0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial\vec{\Omega}_c}{\partial t}+(\vec{U}_c\nabla)\vec{\Omega}_c=(\vec{\Omega}_c\nabla)\vec{U}_c+\nu\nabla^2\vec{\Omega}_c-\vec{\Gamma}_{cf} \tag{29}$$

和

$$\nabla(\vec{\Omega}_f-\vec{\Omega}_c)=0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial\vec{\Omega}_{cf}}{\partial t}+(\vec{U}_{cf}\nabla)\vec{\Omega}_{cf}=(\vec{\Omega}_{cf}\nabla)\vec{U}_{cf}+\nu\nabla^2\vec{\Omega}_f-(\vec{U}_{cf}\nabla)\cdot\vec{\Omega}_c-(\vec{U}_c\nabla)\vec{\Omega}_{cf}-(\vec{\Omega}_{cf}\nabla)\vec{U}_c-(\vec{\Omega}_c\nabla)\vec{U}_{cf}+\vec{\Gamma}_{cf} \tag{31}$$

其中, $\vec{\Omega}_{cf}=\vec{\Omega}_f-\vec{\Omega}_c$。在 CLSSV 方程组式(28)～(31) 中, 含有小涡(涡尺度小于大小涡分割尺度 $V_c^{1/3}$) 涡量 $\vec{\Omega}_f$ 及速度 $\vec{U}_f$, 大涡(涡尺度大于 $V_c^{1/3}$) $\vec{\Omega}_c$ 及速度 $\vec{U}_c$。结合文献[1]得到的近似封闭大小尺度(CLSS) 方程组知, CLSSV 方程组式(28)～(31) 是近似封闭的。在 CLSSV 方程组式(28)～(31) 中, 小涡(涡尺度小于大小涡分割尺度 $V_c^{1/3}$) 对大涡(涡尺度大于 $V_c^{1/3}$) 的涡量输运等于邻近小涡(涡尺度大于 $V_f^{1/3}$ 但小于 $V_c^{1/3}$) 对大涡的涡量输运(即 $-\vec{\Gamma}_c\cong-\vec{\Gamma}_{cf}$), 该涡量输运的量值很大于更小涡(涡尺度小于 $V_f^{1/3}$) 对大涡(涡尺度大于 $V_f^{1/3}$) 的涡量输运(即 $|\vec{\Gamma}_f|\ll|\vec{\Gamma}_c|$)。

参考文献:

[1] Gao Z, Zhuang F G. Time-space scale effects in computing flow and a new approach to flow numerical simulation [J]. Lecture Notes in Physics, 1995, 453: 256—262

[2] 高　智. 广义涡量动力学方程组[R]. 北京: 中国科学院力学研究所, 1992

[3] Saffman P G. Vortex Dynamics[M]. Cambridge University, 1992

[4] Jimenez J. On the linear stability of the inviscit Karman vortex street[J]. J. Fluid Mech., 1987, 178: 177—194

[5] Frish V, Orszag S A. Turbulence: Challenges for theory and experiment[J]. Physics Today, 1990, (1): 24—32

[6] Ferziger J H, Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics[M]. New York: Springer, 1986

[7] 是勋刚. 湍流[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994

[8] Ferziger J H, Peric M. Whither Turbulence at the Crossroads[M]. Lecture Notes in Physics, 1990, 357.

[9] Bouard R, Coutanceau M. The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for 49< Re< 10^4[J]. J FM, 1980, 101.

[责任编辑　郭庆健]