

## 刚性充液容器内竖直激励表面波研究进展\*

菅永军<sup>1,2</sup> 鄂学全<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 中国科学院力学研究所, 北京 100080

<sup>2</sup> 国家海洋局第一海洋研究所, 青岛 266061

**摘要** 受外激励的充液刚性容器中流体的波动问题有实际的工程应用背景. 竖直方向的受周期性外激励的充液容器的自由表面波问题——Faraday波问题是流体力学三大不稳定性难题之一(另外两个不稳定性问题是 Rayleigh-Bénard 对流和 Taylor-Couette 流). 本文综述了在理想流体中和弱粘性流体中 Faraday 波的研究成果; 介绍了作者在底部垂直激励的圆柱形容器中流体表面波图谱的实验研究和理论分析的结果. 最后提出有待进一步研究的问题.

**关键词** 垂直强迫振动, 非线性振幅方程, Faraday 波, 表面张力, 阻尼系数, 奇异摄动展开

### 1 引言

几乎我们所熟悉的所有充液容器, 从普通的茶杯到大型的火箭推进器, 它们共同的特点就是所盛的液体有自由面(液体和气体的交界面). 当充液容器受到外激励时, 自由面就会形成表面波, 且表面波的波形随外驱动振幅和频率的变化而改变. 当驱动振幅超过某一临界值时, 系统会发生不稳定现象, 形成各种丰富的表面波模式, 如从简单的线状到复杂的准周期模式. 当进一步增加驱动振幅和频率时会出现混沌现象.

受外激励的充液刚性容器中流体的波动问题有很多实际的工程应用背景, 典型的例子有充液航天器系统、导弹的液体燃料和氧化剂槽以及其它的飞行发射器<sup>[1]</sup>、大型储液罐的抗震等问题<sup>[2]</sup>. 对这类问题的研究有重要的工程背景和理论意义, 受到众多学者的关注. 充液容器受外激励所产生的表面波对容器有作用力, 影响飞行器等的稳定性和整体结构的正常工作, 通过对这类晃动引起的流体动力学问题的研究, 可以控制充液容器运动的稳定性, 并对系统的工程设计提供理论依据. 在非牛顿黏弹性流体中 Faraday 波动问题的研究, 可以用来解释在许多地震记录中观察到的放大因子的小尺度变化, 并将其作为度量流变学特征的一种潜在的工具<sup>[3]</sup>.

竖直方向受周期性外激励的充液容器的流体动

力学问题的研究首先是由 Faraday<sup>[4]</sup> 进行的, 他指出液体自由表面波的频率是容器垂直驱动频率的一半, 属于亚谐共振. 后来人们称这种相当于有效重力加速度所产生的表面波为 Faraday 波<sup>[5]</sup>. Faraday 波问题的提出到现在已有 170 多年的历史, 它和 Rayleigh-Bénard 对流、Taylor-Couette 流一起构成流体力学三大不稳定性难题. Faraday 波问题的复杂性取决于外垂直激励参数(如驱动的振幅和频率)、容器几何特性(如容器的形状和大小)、液体性质(如液体的密度、黏性、表面张力系数等)以及容器中液体的深度等.

非传播孤立波是一种 Faraday 波共振问题, 都是研究受垂直外驱动容器中液体自由表面波动<sup>[6]</sup>. 它们的区别主要表现在非传播孤立波出现在狭长容器中, 而长宽尺寸为同一量级的容器中出现的是各种 Faraday 波图案, 且对 Faraday 波的研究往往与不稳定性和时空混沌等复杂现象相联系<sup>[7~10]</sup>. 吴君汝等<sup>[11]</sup>在垂直激励的狭长矩形水槽中首先发现了非传播孤立波, 研究了其主要特性. 后来又有学者<sup>[12~18]</sup>分别对此问题进行了理论和实验研究, 并考虑了表面张力的影响, 进一步揭示了非传播孤立波的本质. 特别值得注意的是, 在海洋工程中内孤立波是一个新的环境载荷因素, 大尺度内孤立波在海洋中的存在对军事工程中的船舶和潜艇等的安全航行会造成很大的影响. 所以对此类问题的研究具有很强的实际

收稿日期: 2003-02-25, 修回日期: 2003-08-18

\* 国家自然科学基金(19772063, 19772068)资助项目

意义 [19].

近 20 年来, 由于计算机的进一步发展和流动显示技术的提高, Faraday 波动问题又引起了诸多学者的兴趣. Faraday 波问题的研究具有很高的流体力学理论价值, 通过对它的研究人们可以寻求从有序的层流运动转换到完全无序的混沌运动的基本机理. 流动在进入混沌状态之前, 非线性模式形成 [20~27]、表面波的模态竞争、波幅的变化规律、波结构及其演变过程如何、与激励参数关系如何、在什么样的阈值下进入混沌状态等一系列问题 [29~33], 是人们十分关注的问题, 是流体力学的基础性课题.

对 Faraday 波问题的研究早期主要集中在理想流体中, 但是黏性耗散对 Faraday 波的影响是重要的, 不仅因为它对外垂直驱动设置了一个阈值, 而且会影响参数不稳定的非线性状态. 下面将分别在理想流体和黏性流体中对 Faraday 波问题的研究进展给予简要的介绍.

## 2 理想流体中 Faraday 波研究现状

### 2.1 问题的提出

对垂直振动的柱形容器所产生的表面波研究已有相当长的历史, 最早可以追溯到 1831 年的 Faraday 实验. Faraday 把盛有各种不同流体 (如水、汞、墨水、酒精、松节油、牛奶及蛋白等) 的容器放到垂直振动的振动台上, 液体表面会形成各种短而粗的梳齿状高、低分布的表面驻波, 他指出这些表面波的频率是容器垂直驱动频率的一半, 属于亚谐共振, 这就是著名的 Faraday 实验. 这种相当于有效的重力加速度所产生的表面波称为参数激励或参数共振表面波.

Faraday 的早期发现引起过一些争议, 如 Matthiessen [34] 做了类似的实验, 发现表面波的频率和容器的垂直驱动频率是同步的, 属于谐共振; 有的学者认为除了表面波的响应频率为驱动频率的一半外, 没有其它的响应频率; 有人认为由于表面波响应的主频率是非亚谐的, 对足够大的驱动振幅来说, 小振幅表面波的不稳定性会产生大振幅表面波动; 还有人认为会存在任意阶稳定的亚谐和超谐解, 尽管这些响应可能由于实际物理系统中存在阻尼使其大大地受到抑制. 为了解释这些差别, Rayleigh [35] 在 50 年后重复了 Faraday 实验, 证实了表面波的频率是垂直激励频率一半的结论, 并发现此现象与驱动参数有关, 支持 Faraday 的观点. 但他没能从数学的角度给出定量的分析结果.

### 2.2 线性问题描述

20 世纪 50 年代, Benjamin 和 Ursell [36] 从理想流体的 Euler 方程出发, 将边界条件线性化, 考虑了

表面张力的影响, 在普遍的柱形容器中得到了如下描述自由表面运动的振幅方程, 即 Mathieu 方程

$$\frac{\partial^2 a_m}{\partial T^2} + (p_m - 2q_m \cos 2T)a_m = 0 \quad (1)$$

上式中  $a_m$  为  $m$  阶 (对应于第  $m$  个完备的正交函数集) 液体表面运动模式的振幅,  $T$  是相关的时间变量,  $p_m$  和  $q_m$  是常数, 且满足

$$T = \frac{1}{2}\omega t$$

$$p_m = \frac{4k_m \tanh(k_m h)}{\omega^2} \left( k_m^2 \frac{\gamma}{\rho} + g \right) \quad (2)$$

$$q_m = \frac{2k_m g_0 \tanh(k_m h)}{\omega^2}$$

式 (2) 中  $\omega$  是容器的垂直周期驱动角频率,  $t$  是时间,  $k_m$  为波数,  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ,  $\gamma$  为液体表面张力系数,  $\rho$  是液体密度,  $g$  是重力加速度,  $g_0$  是外垂直驱动的最大加速度. Benjamin 和 Ursell [36] 用熟知的 Mathieu 方程稳定性理论研究了方程 (1), 并给出由方程中  $p_m$  和  $q_m$  所确定的如图 1 所示的不稳定区域.

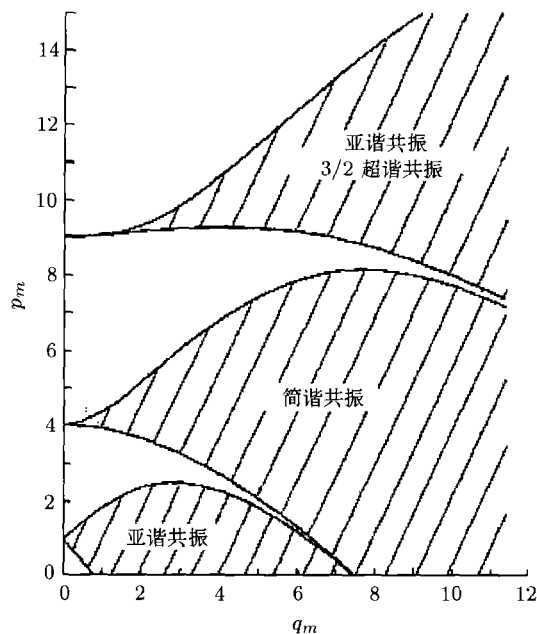


图 1 Mathieu 方程解的不稳定性示意图

因  $p_m$  和  $q_m$  为正数, 故图 1 只给出了在第一象限阴影部分表示的不稳定性区域. 从图 1 中可以看出, 当容器的垂直驱动频率为  $\omega$  时, 表面波的响应频率可能出现  $\omega/2$ ,  $\omega$ ,  $3\omega/2$  等亚谐共振、简谐共振和超谐共振, 统一了先前人们对此问题的争论. 为了验证他们的理论分析, Benjamin 和 Ursell [36] 在半径为 2.7 cm, 水深为 25.4 cm 的圆柱形容器中进行

了 Faraday 实验研究. 实验的结果和理论预测相当吻合.

图 1 的不稳定区域是由系数  $p_m$  和  $q_m$  确定的, 与原始变量的关系并非一目了然. Dodge 等<sup>[37]</sup> 用新的变量重新解释了图 1. 在柱坐标系下, 他们把图 1 的变量  $p_m$  和  $q_m$  转换成如图 2 所示的由驱动频

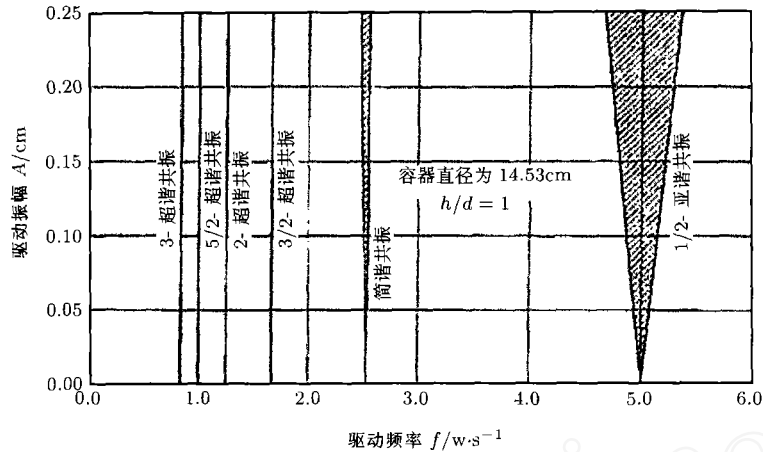


图 2 Mathieu 方程解的不稳定性示意图 ( $m = 1, n = 1$  模式)

率驱动的振幅增大时, 不稳定区域会变宽, 这时其它的谐波和超谐波会被激发. 若驱动振幅驱动频率的参数值落到图 2 右边最远的阴影区域, 亚谐共振的表面波会变的不稳定, 这时会产生大振幅自由表面波的运动. Dodge 等<sup>[37]</sup> 在半径为 7.27 cm, 水深为 14.54 cm 的圆柱形容器中对上述问题进行了实验研究, 测量了无黏流体的稳定性边界, 成功地观察到具有一半驱动频率的亚谐波的波形, 对表面波进行了有限振幅分析. 但他们得到的振幅方程违背了在基本的牛顿力学中暗含的互易性原则, 见文献 [38].

### 2.3 非线性振幅方程

Henstock 和 Sani<sup>[39]</sup> 也在圆柱容器中给出了表面波的有限振幅分析, 但他们所用的自由面边界条件是在未扰的平衡位置, 而非自由面的位移位置, 并对振幅方程中的共振频率修正到一阶, 而事实上对此修正必须是二阶的.

Ockendon 和 Ockendon<sup>[40]</sup> 同样从理想流体方程出发, 将 Benjamin 和 Ursell<sup>[36]</sup> 的线性理论分析推广到弱非线性, 用多尺度展开法得到了描述自由面表面波运动的非线性振幅发展方程. 他们研究了此方程的分岔结构并定性地引入了线性阻尼影响, 但他们没有计算度量非线性影响的参数 (它在振幅方程中是 3 次方项). Miles<sup>[41]</sup> 在任意横截面的柱状容器中研究弱非线性重力波时, 提出了一个新的数学模型. 此模型是以自由面位移为广义坐标形式, 对此系统建立了

率和驱动振幅所确定的不稳区域.

从图 2 (其中  $(m, n)$  模式是指沿圆周方向有  $m$  个波峰, 沿半径方向有  $n$  个零点) 可以看出, 除  $\omega/2$  的响应频率外, 其余的不稳定区域都非常窄, 故只有亚谐共振  $\omega/2$  与通常理论分析所假设的弱非线性相符合, 证实了对垂直振荡容器中的表面波的响应频率

Lagrangian 和 Hamiltonian 函数, 提出了基于变分原理的平均 Lagrangian 方法. Miles<sup>[38]</sup> 利用此方法研究了无黏流体中单一模式的 Faraday 波问题, 导出了自由面振幅满足的非线性发展方程, 并计算了以上非线性作用参数. 由于流体与容器壁面的摩擦会产生能量的耗散, Miles<sup>[38]</sup> 引入了线性阻尼项对振幅方程进行修正. 具体修正的振幅方程如下

$$\dot{p} + \alpha p = -[\beta - 1 + A(p^2 + q^2)]q \quad (3)$$

$$\dot{q} + \alpha q = [\beta + 1 + A(p^2 + q^2)]p \quad (4)$$

其中  $p$  和  $q$  表示慢变振幅,  $\alpha$  是阻尼系数,  $\beta$  和  $A$  分别是与驱动项和非线性项有关的常数. 此外 Miles<sup>[38]</sup> 讨论了振幅方程 (3) 和方程 (4) 的稳定性和分岔问题, 以及两表面波模式的内共振问题. 描述两表面波模式的振幅方程可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 + \alpha_1 r_1 = i\{r_1^* + [\beta_1 + 2A_{11}|r_1|^2 + \\ (2A_{12} + B)|r_2|^2]r_1 - Br_1^* r_2^*\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_2 + \alpha_2 r_2 = i\{r_2^* + [\beta_2 + (2A_{12} + B)|r_1|^2 + \\ 2A_{22}|r_2|^2]r_2 - Br_1^* r_2^*\} \end{aligned} \quad (6)$$

这里  $r_n = 2^{-1/2}(p_n + iq_n)$ ,  $r_n^* = 2^{-1/2}(p_n - iq_n)$ ,  $n = 1, 2$  是正则变换,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是阻尼系数,  $i$  是虚数单位,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  是与外驱动频率有关的常数,  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$  和  $B$  是常数. 与方程 (5) 和方程 (6) 相对应的能量方程为

$$\left(\frac{d}{d\tau} + 2\alpha_n\right)r_n r_n^* = i(r_n^* r_n^* - r_n r_n) \quad (7)$$

其中  $r_n r_n^* = 1/2(p_n p_n + q_n q_n)$  为在周期为  $2\pi/\omega$  中的平均能量,  $2\alpha_n r_n r_n^*$  是耗散率,  $i(r_n^* r_n^* - r_n r_n)$  为外驱动力做的功率. Miles<sup>[38]</sup> 从理论方面很好地解释了无黏流体中弱非线性 Faraday 波问题中的许多现象. 当所考虑的流体由于黏性的增加使得其耗散作用增加时, 此变分方法就会失效.

## 2.4 模式竞争和混沌

Gollub 和 Meyer<sup>[42]</sup> 在半径为 2.41 cm, 水深为 1 cm 的圆柱形容器中对轴对称表面波单一模式进行了实验研究. 他们测量了从出现亚谱不稳定性到混沌的 4 个作为离散波数的临界振幅, 但从理论上只能预测到发生亚谱不稳定性的临界值, 不能预测其它的阈值, 如发生混沌的临界驱动振幅. Keolian 等<sup>[43]</sup> 和 Keolian 和 Rudnick<sup>[44]</sup> 在薄的环形容器中, 利用液体氦和水观察到了表面波倍周期和准周期强非线性运动, 这些表面波包括几个模式的耦合共振, 或出现混沌现象. 何国威和李家春<sup>[45]</sup> 对慢调制振幅的垂直激励表面波的混沌特性进行了理论分析, 对 Gollub 和 Meyer<sup>[42]</sup> 的实验结果和 Miles<sup>[38]</sup> 的理论分析的争论给出了合理的解释.

模式竞争是 Faraday 波问题中研究的重要内容之一. 为了在共振系统中考察规则的、不规则的和混沌的表面波运动, Ciliberto 和 Gollub<sup>[46]</sup> 对半径为 6.35 cm, 液体深度为 1 cm 的垂直激励充液圆柱形容器的模式竞争问题进行了实验研究. 他们报道了一对稳定的模式, 即 (4,3) 和 (7,2) 模式的竞争现象, 通过实验测量确定了由驱动振幅和驱动频率所决定的如图 3 所示的稳定边界.

图 3 中, 在双曲稳定边界的下方, 自由表面保持水平; 在稳定曲线的上方, 自由面会出现表面波, 且其振动的频率为容器驱动频率的一半. 图 3 中的阴影部分表示模式竞争区域, 此区域描述了 (4,3) 和 (7,2) 模式的叠加, 其振幅除了具有快变的一半驱动频率外, 还表现出慢变时间演化的特征. 这个慢变的时间演化是周期性的 (周期大约是 15 s). 除此之外, Ciliberto 和 Gollub<sup>[46]</sup> 在实验中还观察到一个具有混沌行为特点的区域, 当驱动振幅大于图 3 中所示的振幅时, 即使驱动的频率是共振的, 表面波也会出现混沌现象.

Ciliberto 和 Gollub<sup>[46]</sup> 为了解释他们所观察到的混沌行为, 提出了一个动力系统的振幅模型方程, 并通过数值积分获得了满足实验所观察到的表面波具有周期或混沌行为的解, 但他们的模型方程并没有经过系统而严格的推导.

Meron 和 Procaccia<sup>[47]</sup> 从理想流体的运动方程出发, 将自由面边界条件中四阶和高阶项忽略, 通过建立等价于 Miles<sup>[38]</sup> 方法的正则形式方程, 推广

了 Ciliberto 和 Gollub<sup>[46]</sup> 的模型方程, 获得了描述表面波运动的耦合振幅方程. 然而, Meron 和 Procaccia<sup>[47]</sup> 通过对上述耦合振幅方程进行数值计算, 没有发现 Ciliberto 和 Gollub<sup>[46]</sup> 在实验中所观察到的 (4,3) 和 (7,2) 模式的竞争问题, 从而也没有得到表面波的混沌行为特性. 他们忽略了包含时间微分的非线性项, 认为这些项对振幅方程的长时间行为的影响不是很重要. 但事实上这种近似导出的振幅方程是不对称的, 由能量方程的角度出发, 他们的近似解不是一致有效的.

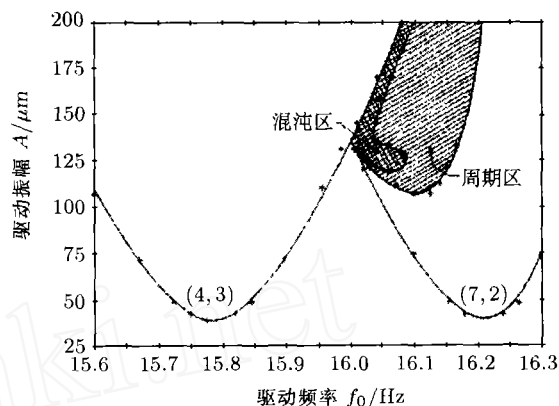


图 3 实验中由驱动振幅  $A$  和驱动频率  $f_0$  确定的表面波稳定性边界相平面图

Umeki 和 Kambe<sup>[48]</sup> 基于 Miles<sup>[38]</sup> 的方法对上述模式竞争问题进行了进一步分析. 他们在圆柱形容器中针对 Ciliberto 和 Gollub<sup>[46]</sup> 的实验, 计算了方程 (5) 和方程 (6) 的系数  $A_{mn}$  和  $B$ . 通过数值计算, 他们在相平面上发现了周期的和混沌的轨道, 且在临界点附近得到的非线性稳定边界与 Ciliberto 和 Gollub<sup>[46]</sup> 的实验定性符合.

Simonelli 和 Gollub<sup>[49]</sup> 从对称的角度出发, 在方形和矩形容器中对模式竞争问题进行了系统的研究. 他们在方形容器中考察了两种模式竞争的动力学问题, 通过实验发现在近似于方形容器的矩形容器中这种竞争模式会分离, 且模式竞争会产生周期或混沌行为. 实验的建立使得他们从理论上推导出了等价于 Meron 和 Procaccia<sup>[47]</sup> 得到的振幅方程. Simonelli 和 Gollub<sup>[49]</sup> 猜测该振幅方程的系数是虚数, 并断言在不计阻尼的情况下, 此方程系统是 Hamilton 系统. 然而, 他们同样忽略了这样的事实, 即 Hamilton 对称性也意味着方程 (5) 和方程 (6) 的系数  $r_1|r_2|^2$ ,  $r_2|r_1|^2$ ,  $r_1^* r_2^*$  和  $r_1^2 r_2^*$  也具有互易性.

Crawford 等<sup>[50]</sup> 将群论法应用到表面波的模式竞争问题中. 这种方法的好处是能够对包含正则形式的分岔结构给出完整的分类. Crawford 等<sup>[50]</sup> 将群论法进一步应用到方形容器中的模式竞争问题中, 并将理论预测和实验进行了比较, 结果符合较好.

Feng 和 Sethna<sup>[51]</sup> 在底部截面为“几乎方形”的容器中,用摄动展开法重点研究了非线性 Faraday 波的轴对称性破碎分岔问题.他们导出的发展方程在某些情况下与方程(5)和方程(6)是同构的,并对无限深流体通过数值计算给出了在实验中出现混沌行为的某一分岔域上的特例. Feng 和 Sethna<sup>[51]</sup> 还通过实验定性地证实了他们的理论预测.事实上, Nagata<sup>[52]</sup> 指出,即使在精确的方形底容器中,也应该有 5 个不同的分岔区域. Nagata<sup>[52]</sup> 忽略了轴对称性破碎因子,用奇异摄动的两时间变量展开法,获得了单一模式、混合模式和广义模式解的稳定性解析表达式.在此基础上,他还在方形底容器中给出了各种分岔的分类关系.

## 2.5 理想流体中研究方法总结

到目前为止,从理论方面研究无黏、不可压流体无旋运动的 Faraday 波动力学问题主要有 4 种方法:(1)是经典的奇异摄动法,将有关的参数以小参数的形式展开,获得流体表面波的振幅方程;(2)由 Miles<sup>[38]</sup> 所应用的基于变分原理的平均拉格朗日方法;(3)由 Meron 和 Procaccia<sup>[47]</sup> 提出的将正则理论和中心流形理论相结合法;(4)由 Crawford 等<sup>[30]</sup> 提出的群论方法.

上述理论方法和已有的实验研究结果,表明 Faraday 波在本质上是由有关某些空间模式表面波的振幅所满足的慢变时间振幅方程控制的.这些模式间的非线性相互作用能够导致二次和高次不稳定性,并最终可能导致混沌现象.但由于表面波满足的振幅方程中的系数很难由流体动力学方程直接计算,从而使得理论分析和实验研究的定量结果还不能获得非常好的符合.我们也都看到,即使是对线性问题来说,表征这些模式的系数也由于黏性边界层的存在而很难确定.但对于多分岔点附近的模式相互作用问题来说,通过对正则形式的振幅方程的定性分析,其结果可以用来解释某些可能出现的动力学行为.

以上所描述的表面波在理论上都是从理想流体出发,应用速度势满足的 Laplace 方程及其自由面位移所满足的边界条件,导出表面波振幅的非线性发展方程.为了解释实际物理模型的黏性耗散,人们凭经验人为地引入阻尼系数,使得振幅方程更加有效地描述实际中存在的物理现象.下一节将介绍黏性流体中 Faraday 波的研究现状,其理论分析的模型方程是原始的 Navier-Stokes 方程,这使得理论分析更加困难.

## 3 黏性流体中 Faraday 波研究现状

近些年来,由于 Faraday 波系统的复杂多变性

及其可观察模式的丰富性,对此问题的研究主要集中在非线性模式形成、分岔和混沌以及从有序模式到时空无序的转换机理等.重点研究了以下几个方面的内容,即黏性流体中稳定性理论的建立、在给定的几何域中的模式竞争问题、在大的展向比(展向比定义为容器的长度尺度与表面波波长的比值)系统中出现有序的驻波模式以及由于二次不稳定性所导致的沿混沌模式的转变过程等.

### 3.1 表面波模式的实验研究

在黏性流体中对 Faraday 波的实验研究要远远超前于其理论分析,大量的先前从未观察到的表面波模式都一一被发现. Faraday<sup>[4]</sup> 和 Rayleigh<sup>[35]</sup> 在早期实验中发现占主要优势的表面波模式具有四方形结构,他们的实验观察后来被许多学者所证实<sup>[53~56]</sup>.

Christiansen 等<sup>[57]</sup> 在低黏度流体中考察了毛细现象,通过对容器的高频(大约为 300 Hz)激励,首次在大尺度非平衡动力系统中发现了“二维准晶体”结构.当驱动频率固定,通过增加驱动振幅,他们还观察到由六角形、四方形直到出现混沌模式的转化过程. Kumar 和 Bajaj<sup>[58]</sup> 在单频激励 Faraday 实验中也同样观察到了六角形模式.除此之外,他们还观察到了三角形模式,以及这两种模式间的相互竞争.在高黏性流体中, Edwards 和 Fauve<sup>[54]</sup> 通过两个垂直驱动频率,在较浅液体的大展向比系统中观察到了平行线、螺旋线、四方形、六边形、以及类似于“二维准晶体”结构的 12 倍对称“准周期模式”等规则和不规则的表面驻波模式,给出了清晰的表面波图案结构.同时他们指出这些模式的形成与容器的形状无关.

对黏性流体中的模式形成问题的进一步实验研究是由 Kudrolli 和 Collub<sup>[8]</sup> 进行的.他们依据出现的不同表面波模式,对黏性及驱动频率参数空间域  $\nu-\Omega$  进行分类,在黏性系数为  $(10 \sim 100) \text{ mm}^2/\text{s}$ , 驱动频率为  $(1 \sim 200) \text{ Hz}$  的参数范围内进行了 Faraday 不稳定性的模式形成的研究.除了观察到以往的三角形、四方形和六边形的模式外,他们还发现了这些模式的共存和模式竞争现象.其中一个特别有趣的现象是六边形模式的“混合”.另外, Kudrolli 等<sup>[59]</sup> 通过双频激励发现了“超格子”模式.

鄂学全和高宇欣<sup>[60~62]</sup> 在圆柱形容器中,对底部垂直微幅振荡而侧壁不动的流体表面波的图谱进行了实验显示,获得了非常精美的从有序到无序表面波幅图谱.他们所得到的大部分流谱图是以前从未报道的,进一步丰富了 Faraday 波的表现形式.我们从理论上针对以上实验考虑了表面波的模式选择问题,尽管所建立的数学模型与实验有所差别,但模拟的结果可以用来解释实验中所观察到的许多现象.

对上述的各种实验研究,从理论上解释这些现象是一个非常复杂的难题.直到现在,对强阻尼的 Faraday 波来讲,还没有非常令人满意的理论分析.其困难主要在于流体运动满足的控制方程是 Navier-Stokes 方程,而非理想流体中的 Laplace 方程,且自由面上复杂的非线性边界条件的影响以及底部驱动使得 Faraday 波问题成为一个非自治的参数激励问题.但对黏性流体中线性 Faraday 波的研究已经取得了很大的进展,揭示了许多重要的物理现象.

### 3.2 黏性流中的线性理论

Beyer 和 Friedrich<sup>[63]</sup> 对黏性流体中的 Faraday 波不稳定性问题给出了线性分析,证明了在 Mathieu 方程中由于表面边界层的存在而出现积分核.但由于他们用的是滑移边界条件,因此在底部边界层所产生的阻尼效应并没有捕捉到. Kumar<sup>[64]</sup> 在任意深度无限边界的黏性流体中研究了 Faraday 波的线性稳定性问题(此方法是对先前 Kumar 和 Tuckerman<sup>[71]</sup> 的数值方法进行有限截断).从线性化的 Navier-Stokes 方程出发,导出了描述此问题的控制方程

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) w_k = 0 \quad (8)$$

和自由面边界条件

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) + 2\nu k^2 \right] \frac{\partial w_k}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \left( g(t) + \frac{\alpha}{\rho} k^2 \right) k^2 \eta_k \quad (9)$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) w_k \Big|_{z=0} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial t} = w_k \Big|_{z=0} \quad (11)$$

以及底部的边界条件

$$w_k \Big|_{z=-h} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (13)$$

其中  $w_k(t, z)$  是  $z$  方向的速度,  $\eta_k$  为表面波振幅,  $g(t) = (g + A \cos(2\Omega t))$  为修正的重力加速度,  $\nu$  是黏性系数,  $\sigma$  为表面张力系数,  $\rho$  为液体的密度,  $h$  为液体深度,  $A$  和  $2\Omega$  分别为外驱动的振幅和频率.方程(8)~方程(13)构成了黏性流体中线性 Faraday 波问题的基本控制方程和边界条件.

对无黏流体( $\nu = 0$ )来说,方程(8)转化为线性 Eulerian 方程,自由面边界条件(10)和底部边界条件(13)将消失,消去  $w_k(t, z)$  可以给出 Benjamin 和

Uresll<sup>[63]</sup> 导出的振幅方程

$$\dot{\eta}_k + [\omega_0^2 + ak \tanh(kh) \cos(2\Omega t)] \eta_k = 0 \quad (14)$$

且表面波的自然频率满足如下的色散关系

$$\omega_0^2 = \tanh(kh) \left( gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right) \quad (15)$$

由此可见,方程(8)~方程(13)所描述的问题更具有普遍性,从某种意义上讲,它们是对理想流体的进一步推广.为了解释由于实际系统会存在黏性耗散, Nayfeh 和 Mook<sup>[65]</sup> 曾用奇异摄动法,对 Mathieu 方程(14)加入与黏性系数成正比的线性阻尼项进行修正.此黏性项系数是由 Landau 和 Lifshitz<sup>[66]</sup> 通过理想流体中能量的耗散关系得到的,但忽略了沿容器的壁面边界层、底部以及自由面与壁面处的黏性耗散而产生的阻尼影响.他们比较了如图4所示的在有阻尼和无阻尼情况下出现 Faraday 波的边界稳定曲线.在弱耗散假设下,证明了 Faraday 波的不稳定性总是出现在第一个亚简谐不稳定域,并定义了临界的驱动振幅  $a_c$  和临界的波数  $k_c$ .

图4中舌头状共振曲线的下方(上方)部分是表面波的稳定(不稳定)区域,  $n$  为奇(偶)数所表示的区域为亚简谐 S(简谐 H)共振,空(实)心圆圈表示无(有)阻尼 Mathieu 振动.

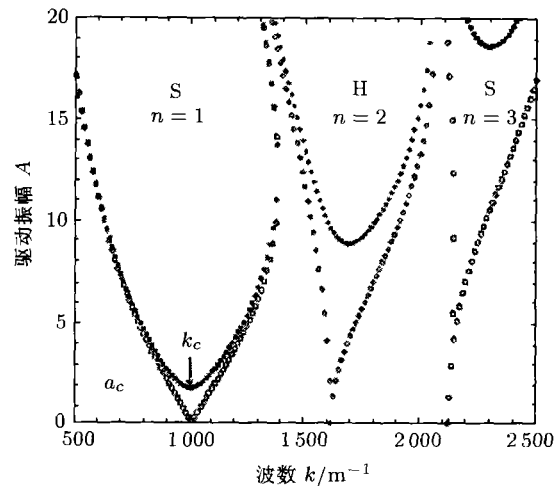


图4 出现 Faraday 波的中性稳定曲线  
 $\rho = 0.934 \text{ g/cm}^3$ ,  $\sigma = 20.1 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ ,  
 $h = 1 \text{ mm}$ ,  $\Omega/\pi = 50 \text{ Hz}$

为了从线性化方程(8)~方程(13)描述黏性流体中 Faraday 波的稳定性问题, Kumar<sup>[64]</sup> 用 Floquet 理论通过数值计算,首先在理论上解释了为什么人们通常在实验中观察到的起始不稳定性总是亚谐波这一现象.同时他还发现一个非常有趣的现象,就是当表面波的波长与液体的深度量级为同一量级时,所激发的表面波不是亚简谐的,而是简谐的.在这种

情况下,底部边界层的耗散作用将起主要作用.因此他预言,在高黏滞液体中可以先出现谐波形式的波图案.但他没有通过解析的方法给出简谐响应的参数域,只给出一个如图5所示的由驱动振幅和波数稳定性边界曲线的数值算例.图5中 $g$ 为重力加速度.然而,他们的方法不是系统的,因为他们没有指明所得的结果在黏性的几阶截断是有效的.

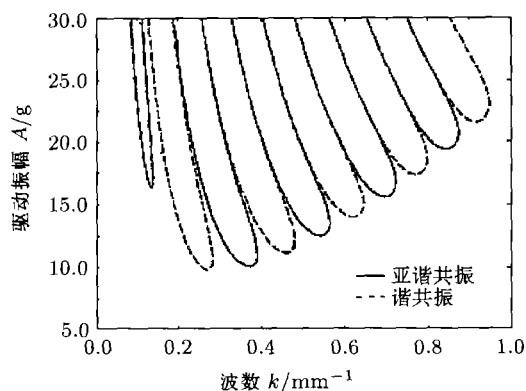


图5 糖水混合物的稳定边界曲线图  
 $\nu = 1.02 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\sigma = 67.6 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ ,  
 $h = 0.2 \text{ cm}$ ,  $\Omega/2\pi = 6 \text{ Hz}$

Muller等<sup>[67]</sup>在弱黏液体( $\varepsilon = \nu k/\Omega$ 远小于单位1)中,通过对线性特征值问题进行Fourier展开,导出一个新的描述表面波振幅的Mathieu方程.此方程除了通常由经验加入的阻尼项外,还包括代表底部和自由面与壁面相交处的阻尼分布的积分项.具体形式如下

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta}_k + \nu k^2 [3 + \coth^2(kh)] \eta_k + \\ & [\omega_0^2 + ak \tanh(kh) \cos(2\Omega t)] \eta_k + \frac{2\sqrt{\nu k^2}}{\sqrt{\pi} \sinh(2kh)} \times \\ & \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \left( \nu k^2 + \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 \eta_k(\tau) d\tau + \\ & (\nu k^2)^{3/2} \frac{\coth^3(kh) + \coth(kh) - 6 \tanh(kh)}{\sqrt{\pi}} \times \\ & \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \left( \nu k^2 + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \eta_k(\tau) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $G(t) = \exp(-\nu k^2 t)/t^{1/2}$ 表示积分核.第一个积分尺度具有量级 $O(\nu^{1/2})$ ,当波长与液体的深度同量级时,它是黏性耗散的主要部分.因为当 $h \rightarrow \infty$ 时,此积分会趋近于零,故此积分分布与底部边界层的阻尼有关.第二个积分当 $h \rightarrow \infty$ 时有有限值,故它与表面边界层有关,且具有 $O(\nu^{3/2})$ 的量级.此项积分最先是Beyer和Friedrich<sup>[63]</sup>导出的,但他们没有考虑底部的阻尼分布.

Muller等<sup>[67]</sup>从修正的Mathieu方程(16)得到了出现亚简谐的临界驱动振幅,其表达式如下

$$\begin{aligned} a_{Sc} \cong & \frac{2\Omega^2}{k} \coth(kh) \left\{ \frac{\varepsilon^{1/2} \sqrt{2}}{\sinh(2kh)} + \varepsilon [3 + \right. \\ & \left. \coth^2(kh)] + \frac{\varepsilon^{3/2}}{2\sqrt{2}} [-15 \tanh(kh) + \right. \\ & \left. 5 \coth(kh) + 2 \coth^3(kh)] \right\} \Big|_{k=k_{Sc}} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (17)$$

并从黏性色散关系中给出了临界波数满足的解析表达式

$$\begin{aligned} \omega_0^2(k)|_{k=k_{Sc}} \cong & \Omega^2 + \frac{\varepsilon^{1/2} \sqrt{2}}{\sinh(2kh)} - \frac{\varepsilon^{3/2}}{2\sqrt{2}} [-15 \tanh(kh) + \\ & 5 \coth(kh) + 2 \coth^3(kh)] \Big|_{k=k_{Sc}} \end{aligned} \quad (18)$$

由式(17)和式(18)所确定的临界驱动振幅的解析解如图6所示.

图6中的虚线是对方程(17)的计算得到的近似解,实线是通过式(16)直接数值计算得到的数值解,点线是传统的将阻尼项加到振幅方程中得到的.

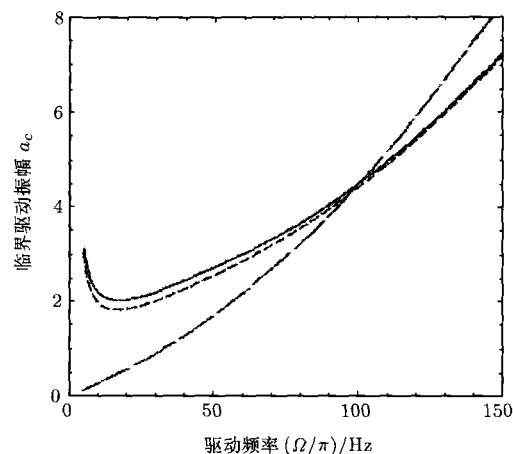


图6 出现亚简谐Faraday波的临界振幅  
 $\nu = 10 \text{ mm}^2/\text{s}$ ,  $\sigma = 20.1 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ ,  
 $\rho = 0.934 \text{ g/cm}^3$ ,  $h = 1 \text{ mm}$

可以看出,数值解和近似解非常吻合,由传统方法得到的解的误差会很大.从图6还可以看出在无限深极限,对高频驱动来说,式(17)和式(18)的近似程度很好.相反,在浅的液体深度时,意味着底部边界层的耗散会增强,使得图4中出现亚简谐的不稳定区域上升,从而临界振幅的最小值会出现在其邻居的简谐不稳定区域.这时出现的Faraday共振是简谐的,即表面波的频率和外激励频率相同(此现象首先是由Kumar<sup>[64]</sup>预测到的).

Muller等<sup>[67]</sup>还在适当的驱动频率下,给出了如

图 7 所示的亚简谐和简谐不稳定性的临界曲线, 并通过实验证实了 Kumar<sup>[64]</sup> 的预测。

利用这个近似理论, 也能较好地判别一个具体系统的起始不稳定表面波是谐波, 还是亚谐波. 但对简谐 Faraday 波的不稳定性的系统研究还没有展开, 这是因为此类表面波是在非常低的驱动频率下才能出现的, 对大部分商售的振动器来说很难办到。

当驱动频率减小, 或当液体的深度减小到黏性边界层的量级  $\delta = O(\nu/\Omega)$  时, 黏性的耗散将大大地增加. Cerda 和 Tirapegui<sup>[68]</sup> 讨论了在高黏流体 ( $\varepsilon$  远大于单位) 中的 Faraday 不稳定问题, 用各种不同黏性系数的流体观察到了具有驱动频率一半的驻表面波. 但是他们发现对高黏滞流体来说, 不稳定的产生机制与无黏流体相比是非常不同的. 他们还导出一个在高黏滞流体中不同于无黏流体的 Mathieu 方程, 通过分析这个新的方程, 他们发现高黏流体的不稳定性机制与 Rayleigh-Taylor 不稳定性有关。

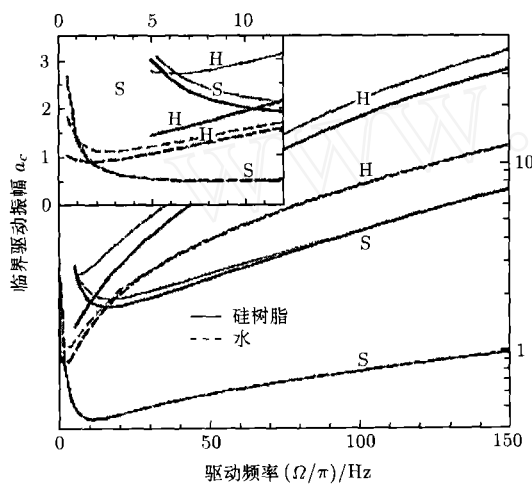


图 7 出现作为驱动频率  $\Omega/\pi$  的函数的亚简谐 (S) 和简谐 (H) Faraday 波的临界振幅  
(水:  $\nu = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  
 $\sigma = 20.1 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ ,  $h = 1 \text{ mm}$   
硅树脂:  $\nu = 10 \text{ mm}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 0.934 \text{ g/cm}^3$ ,  
 $\sigma = 20.1 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ ,  $h = 1 \text{ mm}$ )

### 3.3 黏性阻尼系数的确定

在黏性流体中, 表面波阻尼的确定是一项重要的研究课题. Case 和 Parkinson<sup>[69]</sup> 从能量关系研究了圆柱形容器中不可压缩流体表面波的线性阻尼问题, 他将整个流场分成势流区和边界层两部分, 通过耗散函数求得各边界层处的阻尼系数. Mei 和 Liu<sup>[70]</sup> 在普遍的圆柱形容器和矩形容器中, 研究了有界域中的重力表面波的线性阻尼问题. 他们也是将整个流场分成势流区和边界层两部分, 用摄动法分别求解势流方程和边界层方程, 用相容性条件给出了阻尼系数的解析表达式. Kumar 和 Tuckerman<sup>[71]</sup> 在强的

耗散系统中, 从 Navier-Stokes 方程出发对此问题进行了完全的数值研究, 重点考察了两个参数对 Faraday 不稳定性的影响, 即出现 Faraday 波时的临界驱动振幅和表面波的波长, 但对所得的结果从物理的角度去理解并非易事. 不同的竞争阻尼机制解释的解析的理论方法仍然没有报道。

以上所研究的阻尼问题都没有考虑强迫振动, 非 Faraday 不稳定性系统中产生的阻尼. 最近, Hill<sup>[72]</sup> 在矩形容器中研究了两层弱黏性流体中内 Faraday 波共振问题. 用奇异摄动理论给出了各边界层附近的近似解, 并给出了线性黏性阻尼系数的近似表达式. 随后, 他还从理想流体的 Euler 方程出发, 考虑了小振幅的非线性内表面波问题. 用两时间变量展开法, 得到内界面波的非线性振幅方程, 并将上面得到的线性黏性阻尼系数增加到非线性振幅方程中对其进行修正. Hill<sup>[72]</sup> 将所得的结论和以往所得的实验进行了对比, 符合较好。

值得指出的是, 当充液容器受垂直的外驱动时, 在矩形或方形容器与圆柱形容器中所形成的表面波的结构和特性有本质的区别. 圆柱形容器中形成的驻波, 因为径向波自中心向外扩展, 故它在传播时不再能维持它的形状和振幅, 这使得圆柱形容器中的表面波图谱有更丰富的表现形式<sup>[73]</sup>。

## 4 表面波模式结构及发展规律

为了解释鄂学全等<sup>[60~62]</sup> 对底部垂直微幅振动而侧壁不动的圆柱形容器中流体表面波图谱的实验研究结果, 菅永军等从理论上对以上实验中的表面波模式选择问题进行研究. 虽然所建立的数学模型和实验显示有所差别, 但计算的结果可以用来解释实际中存在的表面波模式。

在理想、不可压缩且运动无旋流体中, 从理论的角度研究垂直强迫激励圆柱形容器中的单一水表面驻波模式选择、结构特点及其随时间和空间变量的演化规律等问题国内外还尚未见报道. 作者从水波方程出发, 考虑了表面张力的影响, 利用高阶解满足的相容性条件, 导出一个具有立方项以及底部驱动项影响的非线性复振幅方程

$$i \frac{dp(\tau)}{d\tau} = M_1 p^2(\tau) \bar{p}(\tau) + M_2 e^{2i\sigma\tau} \bar{p}(\tau) \quad (19)$$

其中  $p(\tau)$  表示时间变量的慢变复振幅,  $\bar{p}(\tau)$  是  $p(\tau)$  的复共轭,  $M_1$  和  $M_2$  是常数, 这里我们认为强迫驱动频率之半与表面波的自然频率之差为小量, 即  $\omega_0 - \Omega = \varepsilon^2 \sigma$  ( $\varepsilon$  表示驱动加速度的最大振幅与重力加速度的比值, 假设它是一个小量). 将振幅方程 (19) 的未知函数及系数的实部与虚部分开, 可得如下的非



线性常微分方程组

$$\frac{dp_1(\tau)}{d\tau} = M_1 p_2(\tau) [p_1^2(\tau) + p_2^2(\tau)] + M_2 [p_1(\tau) \sin(2\sigma\tau) - p_2(\tau) \cos(2\sigma\tau)] \quad (20)$$

$$\frac{dp_2(\tau)}{d\tau} = -M_1 p_1(\tau) [p_1^2(\tau) + p_2^2(\tau)] - M_2 [p_1(\tau) \cos(2\sigma\tau) + p_2(\tau) \sin(2\sigma\tau)] \quad (21)$$

自由面位移解可表示为

$$\eta(r, \theta, t, \tau) = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 \quad (22)$$

其中一阶和二阶自由面位移为

$$\eta_1(r, \theta, t, z) = \frac{\lambda}{i\Omega} J_m(\lambda r) \sinh(\lambda h/R) [p(\tau) e^{i\Omega t} - \bar{p}(\tau) e^{-i\Omega t}] \cos m\theta \quad (23)$$

$$\eta_2(r, \theta, t, \tau) = [Y_1(r) + Y_2(r) \cos(2m\theta)] \times [p^2(\tau) e^{2i\Omega t} + \bar{p}^2(\tau) e^{-2i\Omega t}] \quad (24)$$

式中  $\lambda = \lambda_{mn}$  为满足方程

$$\left. \frac{dJ_m(\lambda_{mn} r)}{dr} \right|_{r=1} = 0$$

的第  $n$  个零点,  $J_m(r)$  是  $m$  阶第一类 Bessel 函数,  $h$  为流体的深度,  $R$  为容器的半径,  $Y_1(r)$  和  $Y_2(r)$  是  $r$  的函数,  $\theta$  为柱坐标下方向角分量.

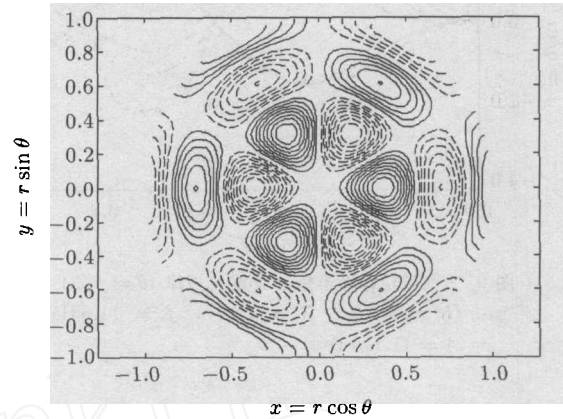
实际的物理系统中会产生黏性阻尼, 从理论上确定阻尼系数的表达式及其对表面波模式选择的影响是研究的另一个重点研究内容. 如果从 Navier-Stokes 方程出发直接求解析解是相当复杂的难题, 作者从线性化的 Navier-Stokes 方程出发, 研究了圆柱形容器中弱黏性流体受垂直强迫激励的表面波运动问题. 把整个流场分为外部势流区和内部的边界层流动, 用双时间尺度展开法, 求得了线性阻尼系数的解析表达式

$$\beta = \left[ \frac{\lambda [\sinh(2\lambda h/R) + 2\lambda h/R]}{8\Omega \cosh^2(\lambda h/R)} + \frac{\lambda^2}{4\Omega \cosh^2(\lambda h/R)} + \frac{\lambda^2 \Omega}{2(\lambda^2 - m^2)} \right] \sqrt{\frac{2\nu}{\Omega}} (1+i) \quad (25)$$

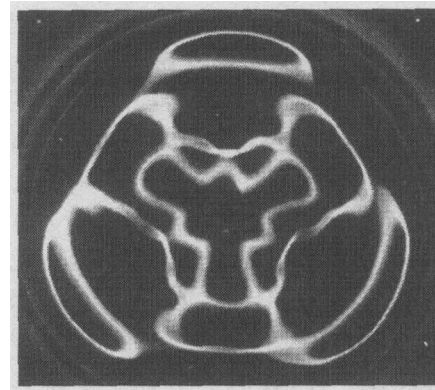
其中  $\nu$  是运动学黏性系数, Henderson<sup>[74]</sup> 指出, 阻尼系数 (24) 中的实部和虚部分别表示表面波阻尼的大小和“频率漂移”. 实部的阻尼将使得表面波衰减, 而虚部会使得表面波的固有频率发生改变. 将在弱黏性流体情况下得到的黏性阻尼系数 (24) 加到无黏流体中所得的非线性振幅方程 (19) 中对其进行修正,

修正的结果使得所研究的问题更进一步接近实验的真实情况.

通过对振幅方程和自由面位移进行数值计算, 证实了该系统产生的表面波为一阶占优的驻波. 图 8 给出了 (3,3) 模式的理论和实验等高线图的比较. 图 8(a) 等高线中实线部分对应于此刻表面波的自由面位置高出静水面, 虚线部分表示自由面的位置低于静水面. 图 8, 图 13 中  $(m, n)$  模式指沿圆周方向有  $m$  个波峰, 沿半径方向有  $n$  个零点.



(a) (3,3) 模式理论等高线



(b) (3,3) 模式实验等高线照片

图 8 (3,3) 模式理论和实验等高线比较

通过对两个图形的对比, 可以看出沿圆周方向共有 3 个波峰, 沿半径方向有 3 个零点, 体现了 (3,3) 模式的特点, 且图 8(a) 和图 8(b) 的驱动频率符合的非常好. 图 8(a) 的驱动频率为 19.9 Hz, 图 8(b) 的驱动频率为 20 Hz. 图 8(a) 已考虑了表面张力和弱黏性影响. 但对别的模式来讲, 理论上出现同一个表面波模式所需的驱动频率总是小于实验驱动频率. 造成差别的一个重要的原因是由于实验研究是在对底部垂直驱动而侧壁不动的圆柱容器中进行的, 而非原始的 Faraday 对整个容器垂直激励. 这时的黏性效应将会增加, 由此而产生的黏性耗散使得表面波的能量逐渐减小, 要得到同一模式的表面波模式就需要更高的驱动频率, 因而理论和实验的差别从

定性的角度来看是合理的。此外，液体和容器侧壁的接触线影响以及其它的一些物理机制都会对模式的选择有一定的影响。

为了深刻理解表面波的空间结构，图 9 给出了

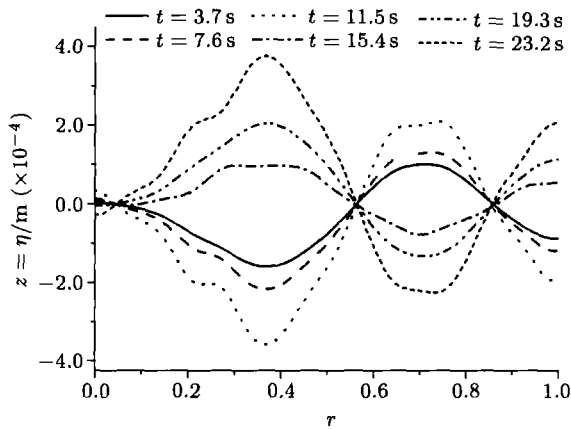


图 9 表面波位移随半径  $r$  的演化规律 ( $\theta = \pi/3$ )  
( $h = 1.0\text{ cm}$ ,  $R = 7.5\text{ cm}$ ,  $f = 11.6\text{ Hz}$ ,  
 $A = 41.4\text{ }\mu\text{m}$ )

当空间坐标  $\theta$  为  $\pi/3$  时，表面波位移的二阶解  $\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2$  在不同时刻随无量纲空间坐标  $r$  的变化规律。从图 9 中可以看出，表面波的特性主要是由自由面位移函数的一阶解来决定的（尽管二阶解对其也有一定的非线性作用，此时的  $\varepsilon = 0.1331$ ）。由常微分方程理论中一般的 Sturm 振荡定理的特例知在  $r < R$  的范围内， $J_m(k_{mn}r)$  正好过零点  $n-1$  次，因此有  $n-1$  个波节环（邻近原点处除外）。对 (3,3) 模式来说，有  $n = 3$ ，故波节环有 3 个。经过计算，它们分别为  $r = 0.051$ ,  $0.567$  和  $0.858$ ，这和一阶解的节点位置非常吻合，表明此时一阶解占优。同时从图 9 还可以看出，表面波在  $r$  方向的节点位置不随时间变化，只是表面波的振幅在上下振动，体现了驻波的特性。

下面讨论当半径  $r$  固定时，表面波随周向角  $\theta$  在不同时刻的变化规律。因为此时一阶解占优，故只考虑一阶自由面位移解在周向角  $\theta$  上的节点分布。当  $m\theta$  为  $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots, (4m-1)\pi/2$  时， $\cos m\theta = 0$ ，于是  $\theta = \pi/2m, 3\pi/2m, 5\pi/2m, \dots, (4m-1)\pi/2m$  为波节线，在这些线上，自由面的位移为零。对 (3,3) 模式有  $m = 3$ ，故在  $\theta$  方向节点位置为  $\theta = \pi/6, 3\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 9\pi/6, 11\pi/6$ 。图 10 给出了表面波位移的二阶解  $\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2$  在不同时刻，对给定径向  $r$  为 0.339 的情况下随方向角  $\theta$  的变化规律（此时的  $\varepsilon = 0.1331$ ）。由图 10 可以看出，驻点的位置和上面给出的一阶解在  $\theta$  方向驻点位置非常吻合，并且它们几乎不随时间变化，只是表面波的波幅上下振动，具有驻波的特点。

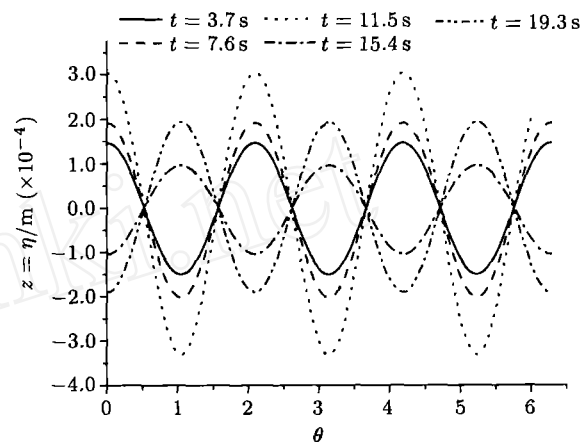


图 10 表面波位移随半径  $\theta$  的演化规律 ( $r = 0.339$ )  
( $h = 1.0\text{ cm}$ ,  $R = 7.5\text{ cm}$ ,  $f = 11.6\text{ Hz}$ ,  
 $A = 41.4\text{ }\mu\text{m}$ )

为了更清楚地描述以上 (3,3) 表面波模式随时间的演化过程，图 11 给出了表面波自由面位移二阶解  $\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2$  在不同时刻的三维空间分布图。在计算过程中发现表面波的周期很短，为了捕捉表面波的

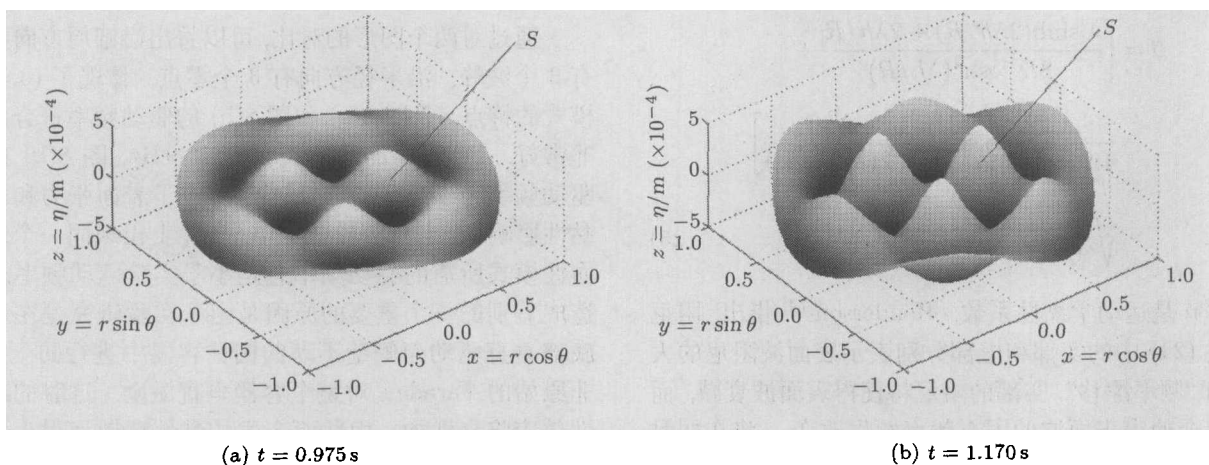


图 11 自由表面随时间  $t$  的三维演化规律 ( $h = 1.0\text{ cm}$ ,  $R = 7.5\text{ cm}$ ,  $f = 11.6\text{ Hz}$ ,  $A = 41.4\text{ }\mu\text{m}$ )

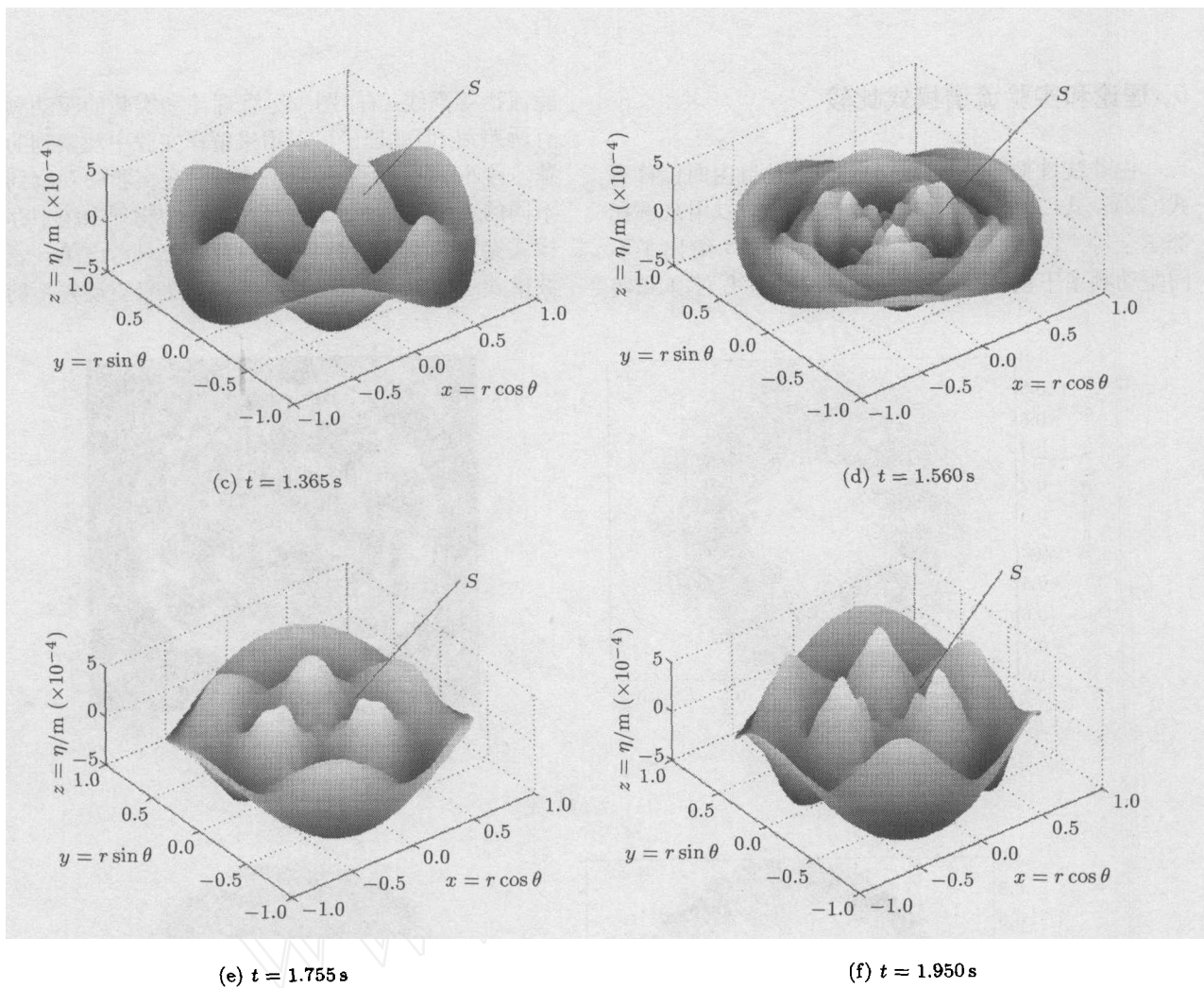


图 11 自由表面随时间  $t$  的三维演化规律 ( $h = 1.0 \text{ cm}$ ,  $R = 7.5 \text{ cm}$ ,  $f = 11.6 \text{ Hz}$ ,  $A = 41.4 \mu\text{m}$ ) (续)

周期性演化规律, 时间步长选取的较小, 图 11(a)~图 11(f) 直观地反映出表面驻波随时间的变化过程. 在时刻  $t = 0.974 \text{ s}$  时, 如图 11(a) 所示, 图中的直线  $S$  表明此时刻波面位于静水面的上方. 随着时间的推移,  $S$  处的振幅将逐渐增加, 如图 11(b)~图 11(c). 到时刻  $t = 1.365 \text{ s}$  时, 如图 11(c),  $S$  处的振幅达到最大值. 在下一时刻  $t = 1.560 \text{ s}$  时, 如图 11(d),  $S$  处的振幅将逐渐减小到  $t = 1.755 \text{ s}$  时, 如图 11(e),  $S$  处的表面波振幅由高出静水面部分变成低于静水面部分. 随着时间的增加, 如图 11(f),  $S$  处的表面波振幅逐渐变为负的最大值, 即先前的波峰变为现在的波谷. 当  $S$  处的振幅达到负的最大值后, 再逐渐减小, 后来又发展成为正的最大值. 就这样周而复始, 体现了此表面波具有驻波的特性.

需要指出的是, 图 11 中直线  $S$  处所指的表面波振幅只是一个有代表性的波幅, 别处的波幅也有完全相同的特性, 只是所处的位置不同而已. (3,3) 模式只是所描述的表面波模式的一个特例, 用同样的方法可以研究任何其它的模式.

图 12 给出了有量纲驱动频率随无量纲波数的变化规律. 从图 12 中可以看出, 在黏性阻尼和表面张

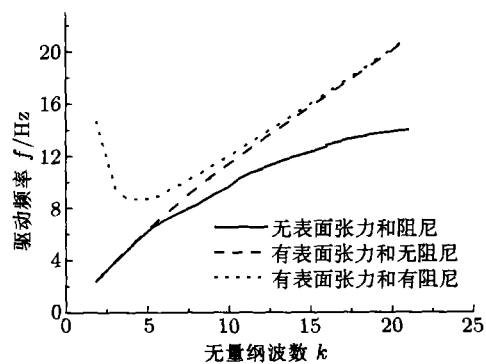


图 12 有量纲自然频率、修正频率随表面波波数的变化 ( $h = 1.0 \text{ cm}$ ,  $R = 7.5 \text{ cm}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )

力对模式选择的影响中, 在驱动的频率较小, 即表面波的模式较简单时, 阻尼对自然频率的影响比较大, 而表面张力对模式选择的影响较小, 黏性阻尼的影响起主要作用; 相反, 当驱动频率较大, 即表面波的模式较复杂时, 黏性阻尼对自然频率的影响比较小, 而表面张力对模式选择的影响较大, 表面张力的影响起主要作用.

## 5 理论和实验流谱模式比较

由非线性振幅方程组 (20), (21) 及自由面位移解式 (22)~式 (24) 所确定的表面波模式可以用来解释鄂学全等<sup>[60~62]</sup>的流动显示实验. 图 13 给出了不同驱动频率下由计算得到的表面波等高线 (左) 和实

验流谱等高线 (右) 图. 尽管理论和实验的驱动频率有所差别, 但此理论可以用来解释实验中观察到的现象. 另外, 在同一个驱动频率下, 在实验中观察到了不同的表面波模式, 原因是在实际的物理系统中存在模式竞争现象, 而我们在理论分析中只考虑单一表面波模式. 从图 13 中还可以看出, 随着驱动频率的增

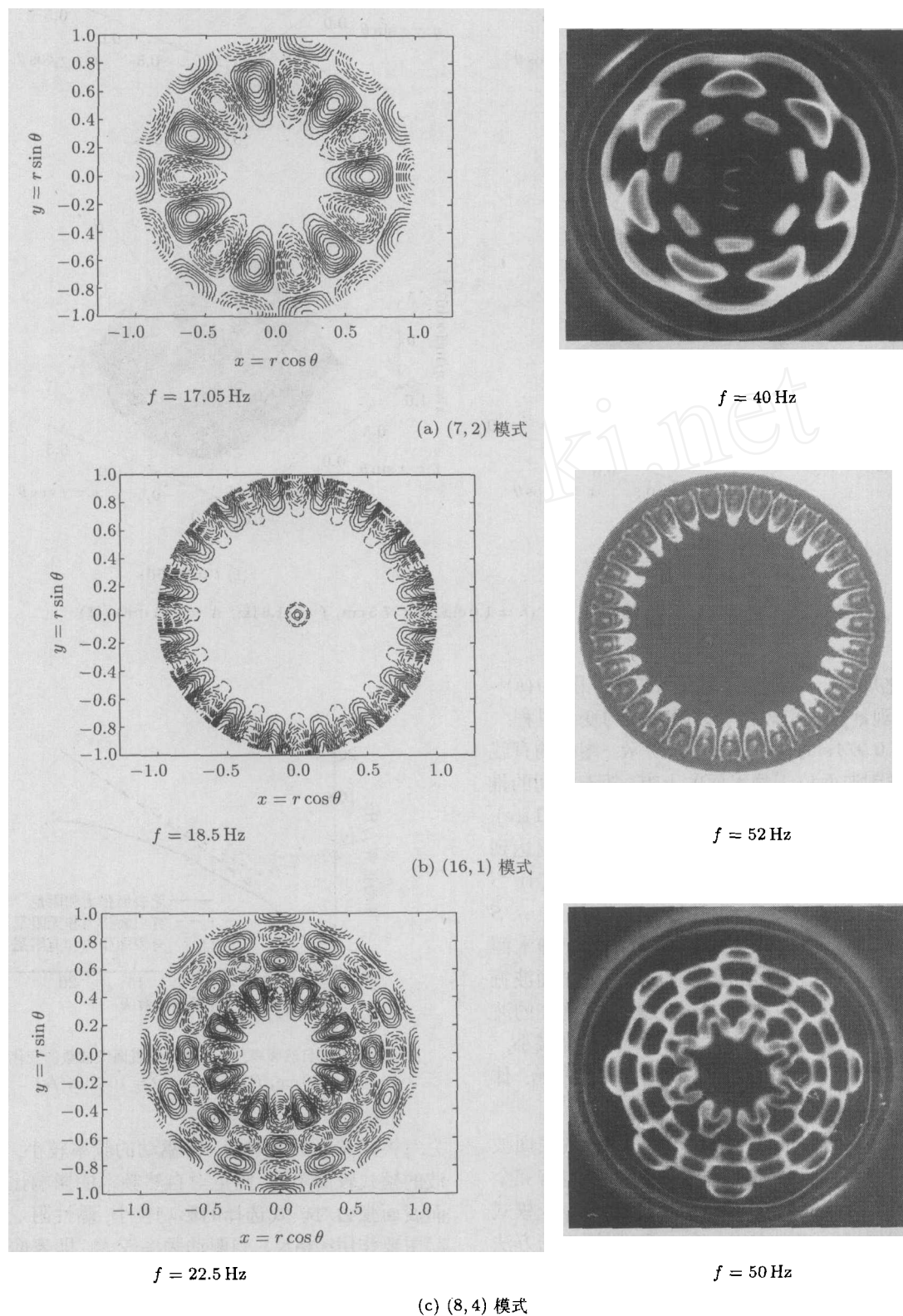


图 13 理论和实验表面波模式等高线图比较 ( $h = 1.0 \text{ cm}$ ,  $R = 7.5 \text{ cm}$ )

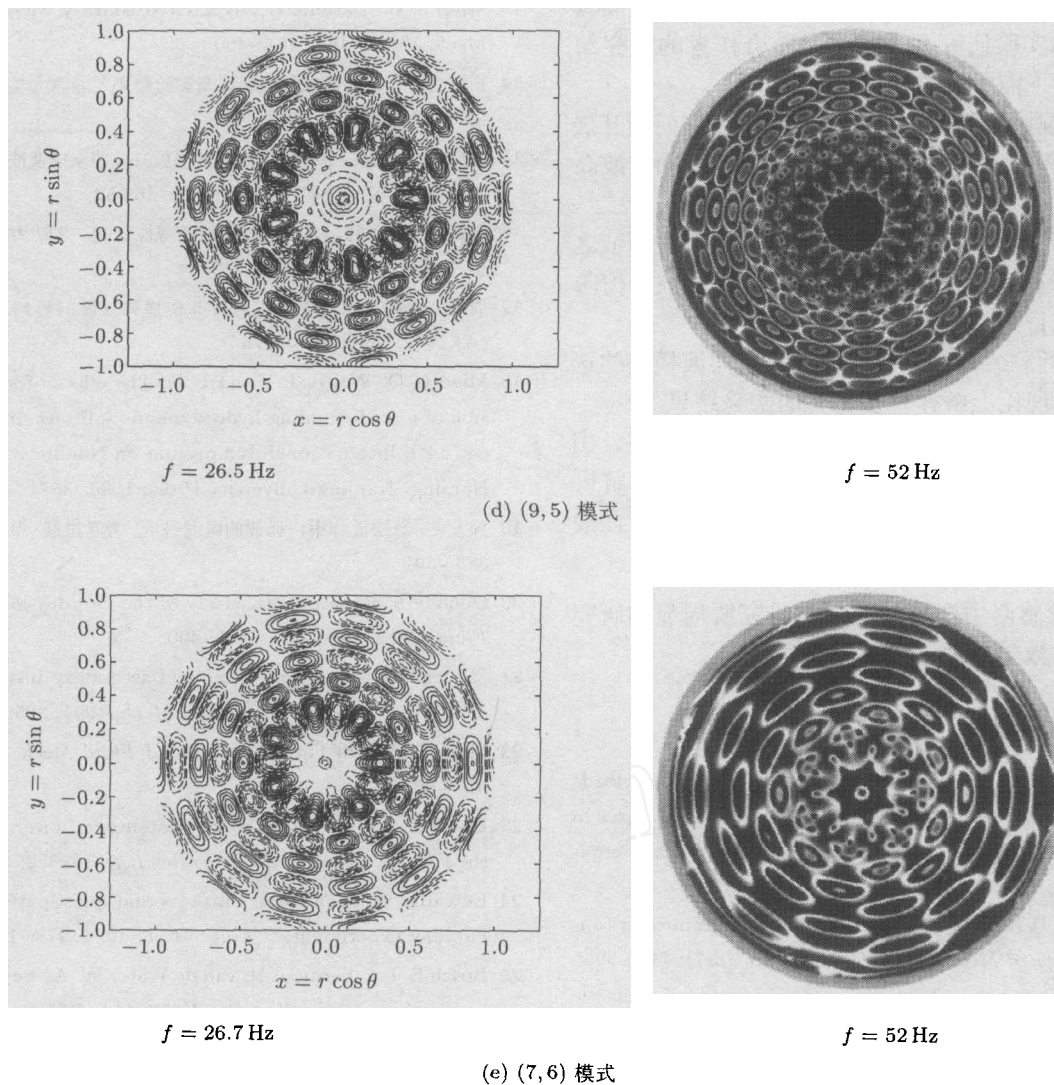


图 13 理论和实验表面波模式等高线图比较 (续) ( $h = 1.0\text{ cm}$ ,  $R = 7.5\text{ cm}$ )

加, 表面波模式变的越来越复杂.

## 6 总结及有待进一步解决的问题

综上所述, 对 Faraday 波的研究主要集中于以下 3 个方面:

(1) 理想流体中的非线性不稳定性分析和黏性流体中的线性稳定性分析. 大部分对 Faraday 波的理论研究都是建立在所谓的“几乎 Hamiltonian”近似基础之上的. 在这种近似下, 耗散项只是凭经验而引入, 并不是通过严格的推导而得出的, 且此耗散项忽略了容器壁面和底部的黏性边界层的影响. 这种方法只有对水或酒精等低黏流体才适合, 对硅树脂油或浓度较高的糖水混合物来说, 这些方法就会失效. 通过解析的近似理论在弱黏性和强黏性耗散系统中导出了具有弱阻尼和强阻尼系数的 Mathieu 方程, 并证明了在某些情况下除了在通常实验中所观察到的亚

谐波频率响应外, 谐波共振响应的 Faraday 波也会出现.

(2) 在大展向比系统中所形成的有序而规则的模式结构, 以及它们向无序结构和时空混沌的转变. 进一步理解了在大的展向比系统中的模式形成问题, 尤其是多频激励 Faraday 实验的建立, 可以获得由于不同波长的模式竞争而产生的多临界情形. 更具有历史意义的是在这些实验中观察到了先前从未发现的各种“准周期”和“三角方格”等流谱图案.

(3) 在实验研究方面已经取得了许多成功, 但由于对表面波模式定量研究是非常困难的, 还没有一个比较全面而系统的实验研究结果. 对深刻理解二次不稳定性向时空混沌的过渡还需要更进一步的定量实验测量. 在理论研究方面解释这些现象更是一个非常复杂的问题, 进展缓慢, 使得理论结果和实验的定量比较差别较大.

本文在理想流体和弱黏性流体中综述了竖直激励表面波的研究成果, 并对圆柱形容器中垂直激励

单一表面波动力学问题进行了理论分析, 这方面具有可比性的实验研究几乎没有. 结合作者的研究结果, 提出以下需要解决的问题:

(1) 对圆柱形容器中的垂直激励表面波问题开展系统的实验研究. 包括表面波模式形成、表面波波高的测量、阻尼系数的测量等.

(2) 在有限的几何域中研究两个或多个表面波之间的模式竞争问题, 进一步考察由有序的驻波结构向无序的混沌行为的转换机理.

(3) 在两频或多频垂直激励下, 表面波模式的选择规律, 从理论上解释一些已有的实验结果.

(4) 在高黏流体中建立表面波模式选择理论. 由于对强非线性问题来说, 很难给出此类问题的解析解, 故寻找适当的数值计算方法, 对此问题进行直接的数值模拟一直是很多学者探求的目标.

**致谢** 作者感谢中国科学院力学研究所周显初研究员对本文在数学处理方面的关心和帮助.

## 参 考 文 献

- 1 Epperson T B, Brown R, Abramson H N. Dynamic loads resulting from fuel motion in missile tanks. In: *Advances in Ballistic Missile and Space Technology*. New York: Pergamon Press, 1961. 313~327
- 2 Abramson H N. Dynamic behavior of liquid in moving container. *Applied Mechanics Reviews*, 1963, 16(7): 501~506
- 3 Kumar S. Parametrically driven surface waves in viscoelastic liquids. *Phys Fluids*, 1999, 11: 1970~1979
- 4 Faraday M. On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces. *Phil Trans R Soc Lond*, 1831, 121: 319~340
- 5 Miles J W, Henderson D. Parametrically forced surface waves. *Ann Rev Fluid Mech*, 1990, 22: 419~448
- 6 周显初. 流体力学中的强迫孤立波. *力学进展*, 1998, 28(3): 374~382
- 7 Ciliberto S, Gollub J P. Phenomenological model of chaotic mode competition in surface wave. *Nuovo Cimento*, 1985, 6D: 309~316
- 8 Kudrolli A, Gollub J P. Pattern and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves: a systematic survey at large aspect ratio. *Physica D*, 1996, 97: 133~154
- 9 Pushkarev A N, Zakharov V E. Turbulence of capillary waves. *Phys Rev Lett*, 1996, 76: 3320~3324
- 10 Schröder E, Andersen J S, Levinsen M T, Alstrom P, Goldberg W I. Relative particle motion in capillary waves. *Phys Rev Lett*, 1996, 76: 4717~4721
- 11 Wu J, Keolian R, Rudnick I. Observation of a non-propagating hydrodynamic soliton. *Phys Rev Lett*, 1984, 52: 1421~1424
- 12 Larraza A, Putterman S. Theory of nonpropagating surface-wave solitons. *J Fluid Mech*, 1984, 148: 443~449
- 13 Miles J W. Parametrically excited solitary waves. *J Fluid Mech*, 1984b, 148: 451~460
- 14 崔洪农. 非传播孤立波的观察及实验结果. *湘潭大学自然科学学报*, 1986, 4: 27~34
- 15 崔洪农, 周显初. 表面张力对非传播孤立波的生成及波形的影响. *水动力学研究与进展*, 1988, 3(1): 46~52
- 16 崔洪农, 庞小峰. 非传播孤立波的特性研究. *水动力学研究与进展*, 1991, 6(1): 18~25
- 17 周显初, 崔洪农. 表面张力对非传播孤立波的影响. *中国科学(A)*, 1992, 12: 1269~1276
- 18 Miao G Q, Wei R J, Wang B R. The effect of surface tension of forced standing hydrodynamic solitons. In: Wei R J, ed. *14th International Symposium on Nonlinear Acoustics*. Nanjing: Nanjing University Press, 1996. 387
- 19 程友良. 分层流体中内孤波的研究进展. *力学进展*, 1998, 28(3): 383~391
- 20 Douady S. Experimental study of the Faraday instability. *J Fluid Mech*, 1990, 221: 383~409
- 21 Milner S T. Square patterns and secondary instabilities in driven capillary waves. *J Fluid Mech*, 1991, 225: 81~100
- 22 Miles J W. On Faraday waves. *J Fluid Mech*, 1993, 248: 671~683
- 23 Bosch E, van de Water W. Spatiotemporal intermittency in the Faraday experiment. *Phys Rev Lett*, 1993, 2: 3420~3423
- 24 Edwards W S, Fauve S. Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. *J Fluid Mech*, 1994, 278: 123~148
- 25 Bosch E, Lambermont H, van de Water W. Average patterns in Faraday waves. *Phys Rev E*, 1994, 4: R3580~R3583
- 26 Miles J W. Faraday waves: Rolls versus squares. *J Fluid Mech*, 1994, 269: 353~371
- 27 Zhang W, Viñals J. Pattern formation in weakly damped parametric surface waves. *J Fluid Mech*, 1997, 336: 301~330
- 28 Yoshimatsu K, Funakoshi M. Primary patterns in Faraday surface waves at high aspect ratio. *J Phys Soc Japan*, 1998, 67: 451~461
- 29 Simonelli F, Gollub J P. Surface wave mode interactions: effects of symmetry and degeneracy. *J Fluid Mech*, 1989, 199: 471~494
- 30 Crawford J D, Knobloch E, Riecke H. Period-doubling mode interactions with circular symmetry. *Physica D*, 1990, 44: 340~396
- 31 Crawford J D. Normal forms for driven surface waves: Boundary conditions, symmetry, and genericity. *Physica D*, 1991, 52: 429~457
- 32 Chossat P, Dias F. The 1 : 2 resonance with O(2) symmetry and its applications in hydrodynamics. *Nonlinear Sci*, 1995, 5: 105~129
- 33 Landsberg A S, Knobloch E. Oscillatory bifurcation with broken translation symmetry. *Phys Rev E*, 1996, 53: 3579~3600

- 34 Matthiessen L. Akustische versuche, die kleinsten transversal wellen der flüssigkeiten betressend. *Ann Phys*, 1868, 134: 107~117
- 35 Rayleigh Lord. On maintained vibrations. *Philos Mag*, 1883a, 15: 229~235. Reprinted, in Scientific Papers, Oxford: Cambridge Univ Press, 1900. 188~193
- 36 Benjamin T B, Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc R Soc Lond, A* 1954, 225: 505~515
- 37 Dodge F T, Kana D D, Abramson N. Liquid surface oscillations in Longitudinally excited rigid cylindrical containers. *AIAA J*, 1965, 3: 685~695
- 38 Miles J W. Nonlinear Faraday resonance. *J Fluid Mech*, 1984a, 146: 285~302
- 39 Henstock W, Sani R L. On the stability of the free surface of a cylindrical layer of fluid in vertical motion. *Lett Heat Mass Transfer*, 1974, 1: 95~102
- 40 Ockendon J R, Ockendon H. Resonant surface waves. *J Fluid Mech*, 1973, 59: 397~413
- 41 Miles J W. Nonlinear surface waves in closed basins. *J Fluid Mech*, 1976, 75: 419~448
- 42 Gollub J P, Meyer C W. Symmetry- breaking instabilities on a fluid surface. *Physica D*, 1983, 6: 337~346
- 43 Keolian R, Turkevich L A, Putterman S J, Rudnick I, Rudnick J A. Subharmonic sequences in the Faraday experiment: departure from period doubling. *Phys Rev Lett*, 1981, 47: 1133~1136
- 44 Keolian R, Rudnick I. The role of phase locking in quasi-periodic surface waves on liquid helium and water. In: Sette D, ed. Proceedings of the international school of physics, Frontiers in Physical Acoustics, North-Holland, 1984. 189~199
- 45 He Guowei, Li Jiachun. Chaos of liquid surface waves in a vessel under vertical excitation with slowly modulated amplitude, *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 13(2): 106~112
- 46 Ciliberto S, Gollub J P. Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves. *J Fluid Mech*, 1985, 158: 381~398
- 47 Meron E, Procaccia I. Low-dimensional chaos in surface waves: theoretical analysis of an experiment. *Phys Rev A*, 1986, 34: 3221~3237
- 48 Umeki M, Kambe T. Nonlinear dynamics and chaos in parametrically excited surface waves. *J Phys Soc Japan*, 1989, 48: 140~154
- 49 Simonelli F, Gollub J P. Surface wave mode interactions: effects of symmetry and degeneracy. *J Fluid Mech*, 1989, 199: 471~494
- 50 Crawford J D, Gollub J P, Lane D. Hidden symmetries of parametrically forced waves. *Nonlinearity*, 1993, 6: 119~164
- 51 Feng Z C, Sethna P R. Symmetry breaking bifurcations in resonant surface waves. *J Fluid Mech*, 1989, 199: 495~518
- 52 Nagata M. Nonlinear Faraday resonance in a box with a square base. *J Fluid Mech*, 1989, 209: 265~284
- 53 Ezerskii A B, Rabinovich M I, Reutov V P, Starobinets I M. Spatio- temporal chaos in the parametric excitation of a capillary ripple. *Sov Phys JETP*, 1986, 64: 1228~1236
- 54 Edwards W S, Fauve S. Parametric instability of a liquid-vapor interface close to the critical point. *Phys Rev Lett*, 1992, 49: 3160~3164
- 55 Edwards W S, Fauve S. Parametrically excited quasicrystalline surface waves. *Phys Rev E*, 1993, 47: R788~791
- 56 Zhang W, Viñals J. Square patterns and quasipatterns in weakly damped Faraday waves. *Phys Rev E*, 1996, 53: 4283~4286
- 57 Christiansen B, Alstrøm P, Levinsen M T. Dissipation and ordering in capillary waves at high aspect ratios. *J Fluid Mech*, 1995, 291: 323~341
- 58 Kumar K, Bajaj K. Competing patterns in the Faraday instability. *Phys Rev E*, 1995, 52: R4606~R4609
- 59 Kudrolli B, Pier A, Gollub J. Superlattice patterns in surface waves. *Physica D*, 1998, 123(1-4): 99~111
- 60 E X Q, Gao Y X. Ordered and chaotic modes of surface wave patterns in a vertically oscillating fluid. *Communications in Nonlinear Sciences & Numerical Simulation*, 1996, 1(2): 1~6
- 61 E X Q, Gao Y X. Visualization of surface wave patterns of a fluid in vertical vibration. In: Wei Q D, ed. Proceedings of the Fourth Asian Symposium on Visualization. Beijing: International Academic Publishers, 1996. 653~658
- 62 高宇欣, 鄂学全. 微幅振荡流体表面波图谱显示方法. *实验力学*, 1998, 13(3): 326~333
- 63 Beyer J, Friedrich R. Faraday instability: Linear analysis for viscous fluids. *Phys Rev E*, 1995, 51(2): 1162~1168
- 64 Kumar K. Linear theory of Faraday instability in viscous liquids. *Proc Roy Soc Lond A*, 1996, 452: 1113~1126
- 65 Nayfeh H, Mook D T. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley-Interscience, 1979
- 66 Landau L, Lifshitz E M. Fluid Mechanics, 2nd edn. Oxford: Pergamon Press, 1987
- 67 Muller H, Wittmer H, Wagner C, et al. Analytic stability theory for Faraday waves and the observation of the harmonic surface response. *Phys Rev Lett*, 1997, 78(12): 2357~2360
- 68 Cerda E A, Tirapegui E L. Faraday's instability for viscous fluids. *J Fluid Mech*, 1998, 368: 195~228
- 69 Case K M, Parkinson W C. Damping of surface waves in an incompressible liquid. *J Fluid Mech*, 1957, 2: 172~184
- 70 Mei C C, Liu L F. The damping of surface gravity waves in a bounded liquid. *J Fluid Mech*, 1973, 59: 239~256
- 71 Kumar K, Tuckerman L. Parametric instability of the interface between two fluids. *J Fluid Mech*, 1994, 279: 49~68
- 72 Hill D F. The Faraday resonance of interfacial waves in weakly viscous fluids. *Phys Fluids*, 2002, 14(1): 158~169

## ADVANCES IN STUDIES OF VERTICALLY FORCED SURFACE WAVES IN A RIGID LIQUID-FILLED CONTAINER: A REVIEW\*

JIAN Yongjun<sup>1,2</sup> E Xuequan<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

<sup>2</sup>First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Qingdao 266061, China

**Abstract** The free surface responses of a fluid in a rigid fluid-filled container due to external excitation have many engineering applications. The surface waves of a liquid in a rigid fluid-filled container is excited by vertical sinusoidal oscillation. Faraday instability is one of the three classical hydrodynamic instability problems in fluid mechanics, with the two others being Rayleigh-Bénard convection and Taylor-Couette flow. In this paper, a review is made for the development of Faraday instability. The theoretical and experimental research results are introduced, which associate with surface wave patterns excited by a vertical oscillating bottom in a cylindrical circular vessel. Finally, several important problems that need to be addressed further are pointed out.

**Keywords** vertically forced oscillation, nonlinear amplitude equation, Faraday wave, surface tension, damping coefficient, singular perturbation expansions

---

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19772063, 19772068)