

文章编号:1002-1175(2005)06-0733-06

## 简报

# 多热源分布时薄层液体中热毛细对流的分叉特征

寻 波<sup>1,2,3</sup> 胡文瑞<sup>2</sup>

(1 北京大学力学与工程科学系, 北京 100871; 2 中国科学院力学研究所国家微重力实验室, 北京 100080;

3 中国科学院研究生院, 北京 100049)

(2004 年 5 月 20 日收稿; 2004 年 12 月 6 日收修改稿)

Xun B, Hu WR. Bifurcation features of thermocapillary convection in a thin liquid layer with multiple heating sources. Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, 2005, 22(6): 733 ~ 738

**摘 要** 研究一个液体薄层在热源作用下的流动特征. Pimputakar 和 Ostrach 给出了单热源作用下薄层液体的高度和流场方程. 在此基础上具体分析比较了多个热源分布作用下的流动图像随各参数尤其是随热源间距离不同的变化情况, 着重讨论产生的分叉现象.

**关键词** 热毛细对流, 旋涡, 流线, 分叉

**中图分类号** O335

## 1 引言

热毛细对流是由于表面张力不均匀而驱动的对流. 薄层液体的热毛细对流是广泛存在的一类问题. 当薄层液体表面温度分布不均匀时, 就会驱动液体运动, 在液层内形成对流<sup>[1]</sup>.

本文中, 我们研究一个液体薄层在热源作用下的热毛细对流. Pimputakar 和 Ostrach<sup>[2]</sup>研究了这个问题, 用给定自由面温度分布的方法代替热源的作用, 在一些合理假设下, 用量级分析简化了方程, 给出了液层高度所满足的方程和速度及流函数方程, 并且给出了单热源作用下的流动图像. 但是, 在考虑瞬态响应的时候, 给定定常的自由面温度分布不大合理. 另外还有一种模型是给定自由面上的热流量. Hitt D.L. 和 Smith M. K.<sup>[3]</sup>则考虑自由面与热源及空气间的热辐射, 并比较了这三种模型给出的瞬态响应. 胡文瑞和 N. Imaishi<sup>[4]</sup>研究了一类射流问题. Pimputakar 和 Ostrach 模型的另一个局限是当  $Bo^* \sim 3$  时, 模型不再适用, 热源处液层高度将趋向于零且出现尖点<sup>[2,3]</sup>. 所以, 本文中只考虑  $Bo^* > 3$  的情况.

下面先给出模型和方程, 并引用 Pimputakar 和 Ostrach<sup>[2]</sup>的结果.

考虑一无限延伸的液体薄层, 液层在  $XY$  平面方向上是无限大的. 采用二维模型, 任意物理量沿  $Y$  方向是不变的. 考虑不可压缩均匀流体, 密度不变. 定常情况下的方程组为

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{\nabla} \cdot g e_z, \quad (2)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot) T = \kappa \nabla^2 T. \quad (3)$$

其中,  $\vec{v} = (U, 0, W)$  是速度向量,  $\nu$  是运动学黏性系数;  $\kappa$  是热扩散系数;  $\rho$ ,  $P$  和  $T$  分别是流体的密度、压力和温度;  $e_z$  是  $Z$  方向即液层高度方向的单位向量;  $\nabla$  和  $\nabla^2$  分别是二维的梯度和 Laplace 算符. 相应的边界条件为

$$Z = 0: \quad U = W = 0; \quad T = T_c; \quad (4)$$

$$Z = H: U_n = 0; \mu \frac{\partial U_s}{\partial n} = \frac{d}{dS}; P = P_0 + 2\mu \frac{\partial U_n}{\partial n} - \frac{\sigma}{R}; T = T_s(X). \quad (5)$$

其中,  $H$  是自由面位置(即液层的高度);  $T_c$  是壁面温度;  $T_s$  是自由面温度;  $U_s$  和  $U_n$  分别是自由面上的切向和法向速度分量;  $\mu$  是动力学黏性系数;  $P_0$  是大气压;  $\sigma$  是表面张力系数;  $R$  是自由面的曲率半径.

引进无量纲量

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{L}, z = \frac{Z}{d}, h = \frac{H}{d}, \theta = \frac{T - T_c}{T_H - T_c}, u = \frac{U}{U_*}, \\ w &= \frac{W}{U_*}, P = \frac{P - P_0 - g(H - Z)}{\mu U_* L / d^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, 特征速度为  $U_* = \left| \frac{\partial \theta}{\partial T} \right| (T_H - T_c) \mu^{-1}$ ; 常数  $T_H$  是单个热源作用时自由面上的最高温度;  $d$  是无热源作用时的液层高度;  $L$  是  $x$  方向的特征长度. 在对称情况下, 有对称条件和无穷远边界条件:

$$x = 0: h_x = 0; \quad x = \infty: h = 1. \quad (7)$$

其中,  $h_x$  是  $h$  的导数.

当  $Bo^* \ll 1$  时, Pimputakar 和 Ostrach<sup>[2]</sup> 在一些合理假设下给出的定常解为

$$h^2 = 1 - \frac{3}{Bo^*}, \quad (8)$$

$$u = - \left( \frac{3z^2}{4h} - \frac{z}{2} \right) \tilde{\theta}_x, \quad (9)$$

$$w = \frac{3z^3}{8Bo^* h^3} \tilde{\theta}_{xx} + \left( \frac{z}{h} - 1 \right) \frac{z^2}{4} \tilde{\theta}_{xx}, \quad (10)$$

$$= \tilde{\theta}_x \left( \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{4h} \right). \quad (11)$$

其中,  $\tilde{\theta}(x)$  为给定的自由面无量纲温度分布;  $f$  为流函数; Bond 数  $Bo^* = gd^2 \left| \frac{\partial \theta}{\partial T} \right| (T_H - T_c)$ .

对于一个热源分布的作用, 设它对自由面温度的影响是高斯型分布的, 可设热源在  $x = 0$  处,  $\tilde{\theta}(x) = \exp(-Cx^2)$ , 其中  $C$  为常数,  $C$  越大, 热源对流体的作用随距离的增大而衰减得越快.

根据 Pimputakar 和 Ostrach<sup>[2]</sup> 的结果, 单热源分布时, 热源左右各有一个旋涡, 旋涡中心位置约在  $x = \pm 0.25$  处 ( $C = 10, Bo^* = 10$ ).  $z$  轴对应一条竖直方向的零流线, 其附近流速最大(自由面和壁面附近除外), 且速度方向和  $z$  轴几乎平行. 在离  $z$  轴足够远处, 速度趋向于零.

本文将对这些结果进行更细致的讨论, 并在此基础上研究两个和三个热源分布作用下的具体流动图像. 分析各个参数的变化对流场的影响, 给出了不同参数范围时的典型流动图像. 与单热源分布时不同的是, 多热源分布时会产生分叉现象, 本文着重讨论分叉过程及不同参数范围时的流动特征.

## 2 双热源分布作用下流场的分析

这里考虑同时作用两个相同强度的热源时的流场. 讨论流场图像随热源间距离不同的变化, 着重讨论产生的分叉现象. 这部分先不考虑参数  $Bo^*$  和  $C$  的影响, 总令  $Bo^* = 10, C = 10$ . 设两热源对称地分布在  $x = \pm x_0$  处, 令

$$\tilde{\theta}(x) = \exp[-C(x - x_0)^2] + \exp[-C(x + x_0)^2]. \quad (12)$$

对于流场中旋涡的中心点, 应该满足  $u = w = 0$ . 由  $u = 0$  可知, 旋涡中心应在  $z = 2h/3$  处. 将  $z = 2h/3$  代入  $w$  的解(10)式, 令

$$f(x) = w|_{z=2h/3} = \frac{1}{9Bo^*} \left[ \tilde{\theta}_x - \left( \frac{Bo^*}{3} - \right) \tilde{\theta}_{xx} \right], \quad (13)$$

则每个旋涡中心的横坐标对应一个  $f(x)$  的零点.

双热源分布时,因为  $\tilde{\eta}_x(0) = 0$ , 有  $f(0) = -\frac{1}{9Bo^*} \left[ \frac{B_o^*}{3} - \right] \tilde{\eta}_{xx}(0)$ , 而  $\tilde{\eta}_{xx}|_{x=0} = (4C^2x_0^2 - 2C)|_{x=0} = 4C(2Cx_0^2 - 1)\exp(-Cx_0^2)$ . 所以,如图 1 所示,当  $x_0^2 = \frac{1}{2C}$  时,  $\tilde{\eta}_{xx}|_{x=0} = 0, f(0) = 0$ , 此时  $f(x)$  有 3 个零点,但此时的 1 个零点是在  $x = 0$  处的零流线上,实际上只有 2 个涡,特殊的是此时  $x = 0$  处各点的速度均为零;当  $x_0$  较大时,  $f(x)$  有 4 个零点,对应 4 个涡,只是中间的 2 个涡被压缩了,涡心离邻近热源的距离较小,而边上 2 个涡的中心离邻近热源的距离仍约为  $x = 0.25$ ;当  $x_0$  较小时,  $f(x)$  只有 2 个零点,对应只有 2 个涡,而涡心位置离邻近热源的距离较小,如  $x_0 = 0.1$  时,约为  $x = 0.2$ , 中间 2 个涡则消失了.

由(11)式可知,竖直零流线的位置即  $\tilde{\eta}_x$  的零点位置. 我们知道,总有  $\tilde{\eta}_x(0) = 0$ , 且  $\tilde{\eta}_{xx}|_{x=0}$  是随  $x_0$  连续变化的,当  $x$  趋向于正无穷时,  $\tilde{\eta}_x$  小于且趋向于零. 如图 2 所示,  $x_0^2 > 1/2C$  时,  $\tilde{\eta}_{xx}|_{x=0} > 0$ , 有 3 条竖直的零流线;  $x_0^2 = 1/2C$  时,  $\tilde{\eta}_{xx}|_{x=0} = 0$ , 只有 1 条竖直的零流线. 而且随着  $x_0$  的减小,边上 2 条竖直的零流线逐渐向中间靠拢,直至三者重合.

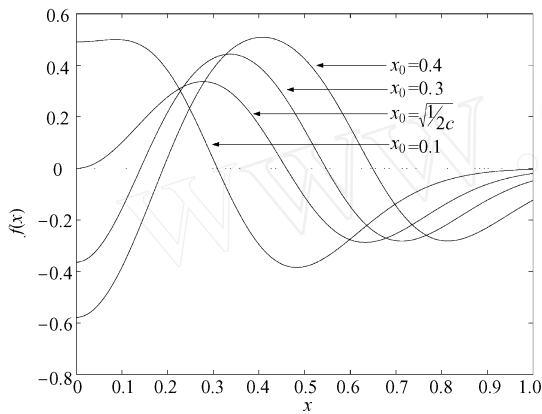


图 1 双热源时旋涡中心位置

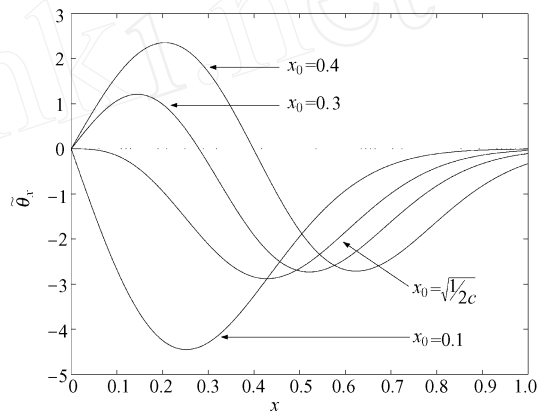


图 2 双热源时竖直零流线位置

可见,  $x_0$  较大时,有 3 条竖直的零流线,将 4 个涡分开;  $x_0$  较小时,只有 2 个涡,竖直的零流线也只剩 1 条. 随着  $x_0$  的减小,边上 2 条竖直的零流线逐渐靠拢,中间 2 个涡逐渐被压缩,直到当  $x_0^2 = 1/2C$  时,3 条零流线重合,中间 2 个涡消失. 可见,随着  $x_0$  的减小,流场图像会发生突变,由原来的 4 个涡变成 2 个涡,发生分叉,分叉点为  $x_0 = \sqrt{1/2C}$ .

另外,由水平速度分量  $u$  的表达式可见,自由面上流体是由高温处向低温处流动,而  $x_0$  较小时,自由面温度只有  $x = 0$  处取极大,  $x > 0$  时总有  $\tilde{\eta}_x < 0$ , 由此亦可预见将发生突变.

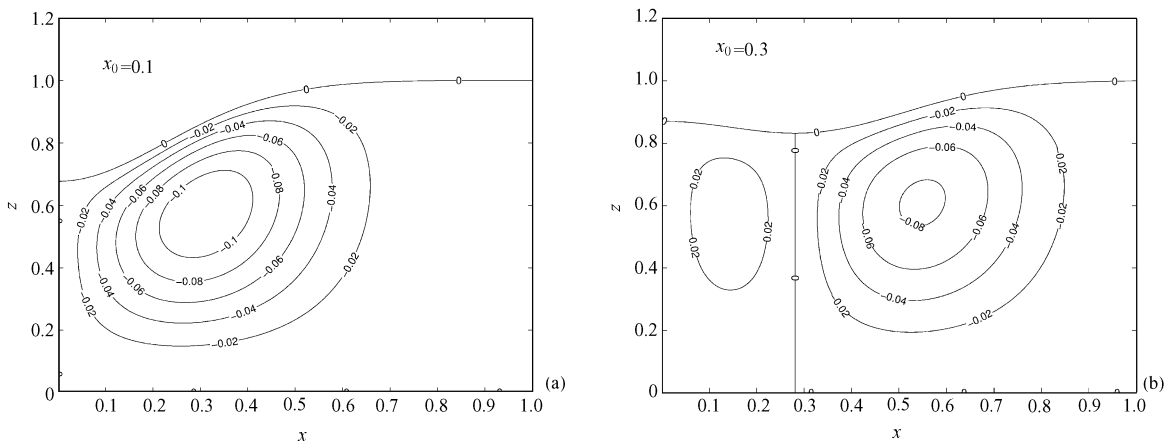


图 3 双热源分布时的典型流动图像

各个阶段的典型流动图像如图 3 所示,图中标注的是对应流线上的流函数值.由图 3(b)可见, $x_0$  较大时,虽然有 4 个涡,但是中间 2 个涡的流动要弱得多.

### 3 三热源分布作用下流场的分析

这里考虑 3 个相同强度热源同时作用时的流场,讨论流场图像随热源间距离的变化,主要讨论发生的分叉现象.先不考虑参数  $Bo^*$  和  $C$  的影响,总令  $Bo^* = 10$  且  $C = 10$ . 此时设

$$\tilde{\psi}(x) = \exp(-Cx^2) + \exp[-C(x-x_0)^2] + \exp[-C(x+x_0)^2], \quad (14)$$

其中, $x_0$  是相邻两热源间的距离.

先考虑竖直的零流线的个数,即  $\tilde{\psi}_x$  的零点个数.由图 4 可知, $x_0$  较大时,有 5 条竖直的零流线,随着  $x_0$  的减小,边上的 2 条零流线逐渐靠拢,直至  $x_0 = 0.4611$  时重合,然后消失.自由面上流体是由高温处向低温处流动的,而图 4 表明, $x_0$  较小时,自由面温度只有  $x = 0$  处取极大, $x > 0$  时均有  $u|_{z=h} > 0$ . 可见,至少自由面上的速度会发生较大的变化.

再考虑旋涡中心的位置,由图 5 可见, $x_0$  较大时,有 6 个涡,只是中间的 4 个涡被压缩了,涡心离邻近热源的距离较小,而边上 2 个涡的中心离邻近热源的距离仍约为  $x = 0.25$ . 但是  $x_0$  较小时,只有 2 个涡,而涡心位置离邻近热源的距离较小,如  $x_0 = 0.3$  时,约为  $x = 0.2$ .

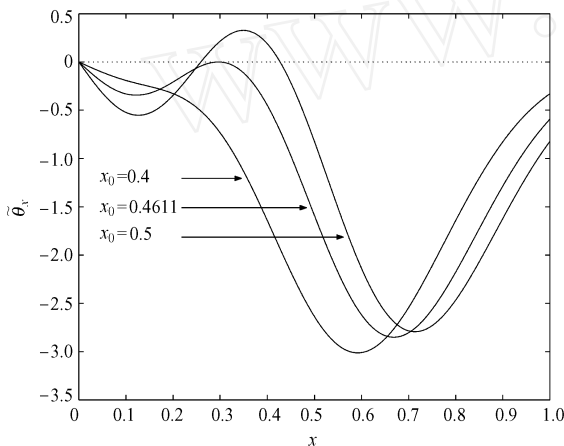


图 4 三热源时竖直零流线位置

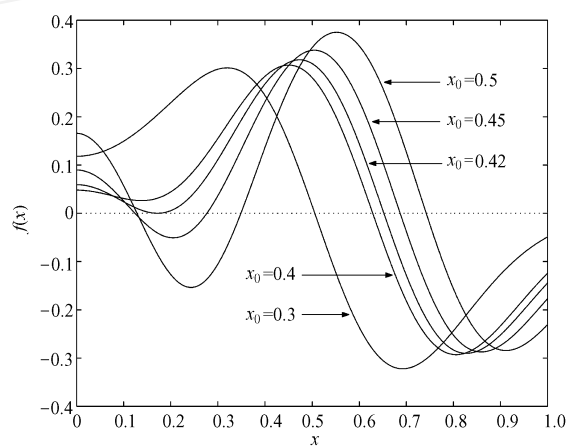


图 5 三热源时旋涡中心位置

典型的流动图像如图 6 所示(为了清晰起见,图中流线上的流函数值不是等间隔的).有趣的是,由前面的分析可知,当  $0.42 < x_0 < 0.46$  时,竖直的零流线只有一条, $f(x)$  的零点数为 6 个,而且考虑到竖直零流线的变化情况,此时的涡数应为 4 个.为此,令  $x_0 = 0.45$ ,此时的旋涡中心位置和流线图分别如图 5、图 6(c) 所示.由此可知, $0.42 < x_0 < 0.46$  时,竖直的零流线只有 1 条,涡仍有 4 个,但中间的 2 个涡和边上的 2 个大涡耦合在一起. $f(x)$  的 6 个零点中 4 个对应于旋涡中心,另外 2 个则对应互相耦合在一起的 2 个涡交界处的奇点位置.当  $x_0$  更小时,中间 2 个涡完全被边上的 2 个大涡吞并,成为 2 个涡.我们知道, $x = 0$  处的自由面温度始终是最大的,其附近流体是远离  $z$  轴的.注意到这个事实及各个涡的流向可知,不可能是  $z$  轴附近的 2 个涡先消失.至于为何是两个两个的消失,而不是中间 4 个一起消失,则是由给定的自由面温度分布的特定数学形式决定的.

可见, $x_0$  较大时,有 5 条竖直的零流线,将 6 个涡分开.随着  $x_0$  的减小,边上的 2 条零流线逐渐靠拢,直至重合并且消失,有 2 个涡消失,6 个涡变为 4 个涡,此时竖直的零流线只有 1 条,每边的两个涡则互相耦合在一起. $x_0$  继续减小,则中间 2 个涡逐渐被边上的大涡吞并,直到变为 2 个涡.其间流场出现了 2 次分叉,第一分叉点约为  $x_0 = 0.4611$ ,第二分叉点约为  $x_0 = 0.42$ .

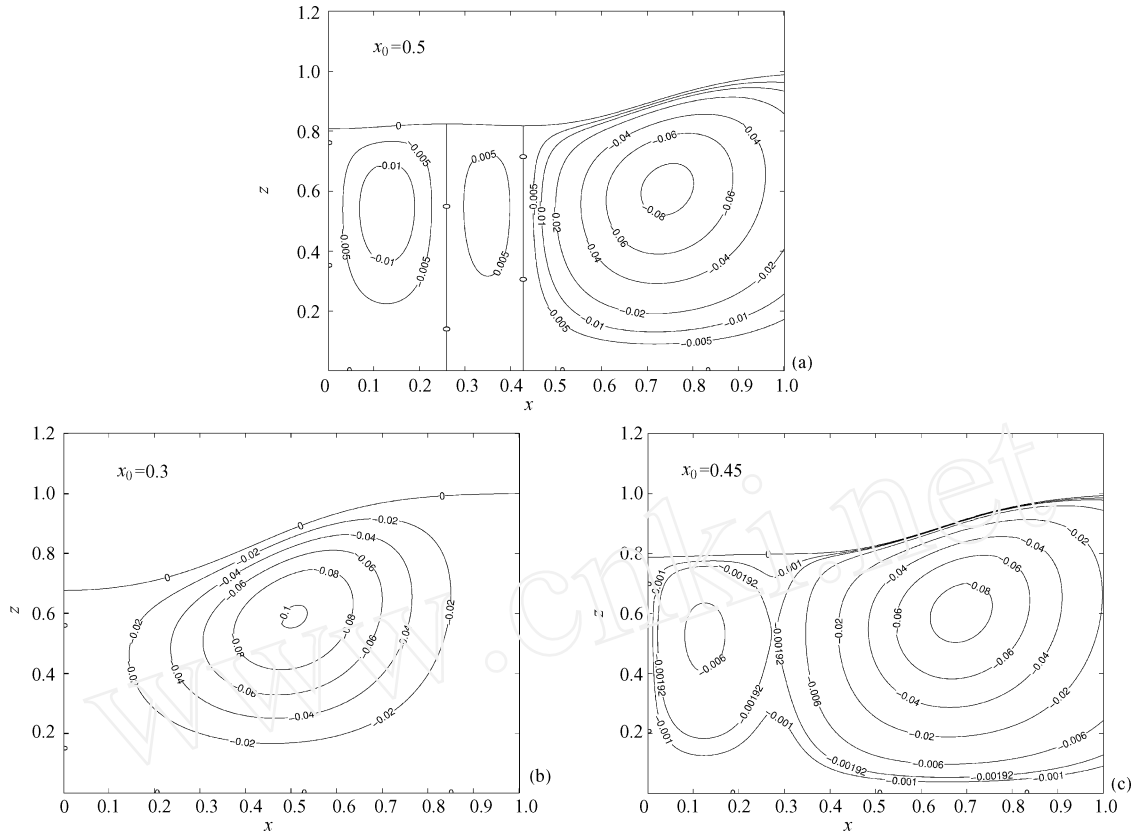


图 6 三热源分布时的典型流动图像

### 4 讨论

对流中的涡结构是流体力学的基本问题. 本文讨论的热毛细对流分叉特征涉及到三个参数:  $Bo^*$ 、 $C$  和  $x_0$ .

由前面的讨论可见, 参数  $Bo^*$  与竖直零流线的变化无关, 也与双热源分布时的分叉点及三热源分布时的第一分叉点无关. 只会影响高度分布和旋涡中心离热源的距离  $x$  以及三热源分布时的第二分叉点. 参数  $Bo^*$  越大, 热源越弱, 高度变化越小,  $x$  越小. 而大致的流动图像及其分叉过程都不会变化.

对于参数  $C$  而言,  $C$  越大, 热源对流体的作用随距离的增大而衰减得越快. 对于给定的  $C$ , 若作线性变换  $\tilde{x} = \sqrt{C}x$ , 则相应的有  $\tilde{v}_x = \sqrt{C}v_x$ ,  $\tilde{v}_{xx} = C v_{xx}$ , 可见零流线的变化情况与  $C$  无关. 且由  $f(\tilde{x}) = w|_{z=2h/3} = \frac{C}{9Bo^*} [\tilde{x}^2 - (Bo^*/3 - \tilde{x})]$  知, 旋涡中心离热源的距离  $x$  及分叉点的位置均可通过线性变换由  $C=10$  时的结果求得. 大致的流动图像及其分叉特征也没有变化.

参数  $x_0$  则是决定流场的重要参数. 对于不同的  $x_0$ , 流场图像会有很大的不同. 双热源分布情况下,  $x_0$  较大时, 有 4 个涡, 被 3 条零流线分隔开; 当  $x_0$  减小时, 边上 2 条零流线逐渐靠拢, 直至重合, 中间的两个涡也逐渐被压缩直至消失. 三热源分布情况下,  $x_0$  较大时, 热源之间的影响较小, 流场中有 6 个涡; 随着  $x_0$  的减小, 有 2 个涡逐渐被压缩直至消失;  $x_0$  再减小, 则剩下的 4 个涡中的中间 2 个会被边上的 2 个大涡逐渐吞并, 最后只剩下 2 个涡.

### References

- [ 1 ] Hu WR ,Xu SC. Microgravity Fluid Mechanics. Beijing :Science Press ,1999 (in Chinese)
- [ 2 ] Pimputkar SM,Ostrach S. Transient thermocapillary flow in thin liquid layers. *Phys. Fluids* , 1980 ,23(7) :1281 ~ 1285
- [ 3 ] Hitt DL ,Smith MK. Radiation-driven thermocapillary flows in optically thick liquid films. *Phys. Fluids* ,1993 ,A5(11) :2624 ~ 2632
- [ 4 ] Hu WR ,Imaishi N. Thermocapillary flow in a jet of liquid film painted on a moving boundary. *Langmuir* ,2000 ,16(10) :4632 ~ 4638

### 附中文参考文献

- [ 1 ] 胡文瑞,徐硕昌. 微重力流体力学. 北京:科学出版社,1999

## Bifurcation Features of Thermocapillary Convection in a Thin Liquid Layer with Multiple Heating Sources

XUN Bo<sup>1,2,3</sup> HU Wen-Rui<sup>2</sup>

(1 Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China;

2 National Microgravity Laboratory, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

3 Graduate University, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** Convection features in a thin liquid layer with heating sources is studied in the present paper. Pimputakar and Ostrach gave the thickness equation and flow field of the liquid layer, in the case of a single heating source. This paper examines the variety of the flow image in a thin liquid layer with multiple heating sources, depending on the parameters, especially the distance of the heating sources. The bifurcation phenomenon in the convection is discussed in detail.

**Key words** thermocapillary flow, vortex, streamline, bifurcation