

机械载荷作用下的单边裂纹电热止裂效应分析

刘思远^{1,2} 白象忠^{1,2} 刘俊杰^{1,2} 敖涛^{1,2}

(中国科学院力学研究所, 国家非线性连续介质力学重点实验室(LNMI)¹, 北京 100080; 燕山大学建筑工程与力学学院², 秦皇岛 066004)

摘要 用一种新的方法求解出热源功率密度的表达式, 定义出电热应力强度因子的概念。推导出电热应力强度因子的表达式, 并与外加载荷产生的应力强度因子相叠加, 得到了机械载荷和电流共同作用下的应力强度因子。进而得出应力强度因子与断裂准则的关系。通过算例分析证明, 电热止裂可以提高金属材料的安全系数。

关键词 热源功率密度 复变函数 机械载荷 电热应力强度因子

中图分类号 O321; **文献标识码** A

在文献[1—3]中, 研究的是不加外载荷的、带有裂纹的、载流薄板的裂纹止裂问题。而在工程实际应用中, 外加的机械载荷是必然存在的。本文给出了机械载荷和电流共同作用下的应力强度因子与断裂准则的关系, 使工程实际中出现的带裂纹构件止裂问题的研究更贴近实际。

在建立机械载荷作用下的单边裂纹载流薄板温度场和应力场表达式的基础上, 推导出温度产生的应力强度因子表达式, 与外加载荷产生的应力强度因子相叠加, 表达了机械载荷与电流共同作用下裂纹尖端处的应力状态。通过改变机械场、温度场、电磁场的相关参数, 可达到控制裂纹尖端应力应变状态, 提高薄板构件的承载能力, 使其达到止裂的目的。这是理论研究与实际应用研究紧密结合的一个问题, 其研究成果对推动电磁热效应裂纹止裂理论及其应用都具有一定的意义。

1 裂纹尖端附近热源功率密度的确定

在带有长度为 a 的单边裂纹, 厚度为 $2h$ 的半无限大导电金属薄板上, 在无穷远处施加以单向拉伸载荷 σ , 同时在与裂纹垂直的方向通以电流密度为 J_0 的分布均匀的瞬间电流, 如图 1(a) 所示。利用复变函数的方法来求解裂纹尖端热源功率密度表达式。根据保角映射可以将图 1(b) 所示的 Z 平面中的问题变换成 w 平面的问题求解。其映射关系

为^[1,4]: $w = \sqrt{z^2 + a^2}$ 。通过文献[4]我们可以导出

$$f(z) = U + \Psi_j = E_\infty \sqrt{z^2 + a^2} \quad (1)$$

式中的 U 就是电流场的在 Z 平面上的势函数, Ψ 是流函数, E_∞ 是无穷远处的电场强度。假设单边裂纹薄板的裂纹长度为 a , 垂直于薄板在无穷远处通入密度为 J_0 分布是均匀的瞬间电流。电场强度与势函数的关系式为: $E_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $E_y = \frac{\partial U}{\partial y}$ 。对 $f(z)$ 求得

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \quad (2)$$

这里设定的势函数 U 和未知参数 ϕ 能够同时存在, 它们之间一定满足柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 公式: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ 。由此, (2) 式可以写成 $f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}j$, 且要满足如下的边界条件

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = f'(z) \Big|_{z=\infty} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial y}j \right)_{z=\infty} = |E_0| \quad (3)$$

又因为 $|f'(\infty)| = E_\infty$, 与 (3) 式联立得 $E_\infty = |E_0|$, 则 (1) 式可以写成: $f(z) = |E_0| \sqrt{z^2 + a^2}$ 。式中 E_0 是通入的瞬间电流在边界上产生的电场强度。通过此式我们可以确定出电场强度的分布: $\bar{E} = \frac{dw}{dz}$

$|E_0| \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$ 。式中 $\bar{E} = E_x - E_yj$ 为复场强, 且有 $E_x = \text{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right)$, $E_y = \text{Im}\left(-\frac{dw}{dz}\right)$ 。根据 Maxwell 方程

可以得出^[5]

$$j_x = \sigma_t E_x = -\sigma_t \frac{\partial U}{\partial x}, \quad j_y = \sigma_t E_y = -\sigma_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

综合上述可以得到:

$$j_x^2 = J_0^2 \frac{(x^2 - y^2)(x^2 - y^2 + a^2) + 4x^2 y^2 + \sqrt{[(x^2 - y^2)(x^2 - y^2 + a^2) + 4x^2 y^2]^2 + (2xya^2)^2}}{2(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 8x^2 y^2}$$

$$j_y^2 = J_0^2 \frac{-(x^2 - y^2)(x^2 - y^2 + a^2) - 4x^2 y^2 + \sqrt{[(x^2 - y^2)(x^2 - y^2 + a^2) + 4x^2 y^2]^2 + (2xya^2)^2}}{2(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 8x^2 y^2} \quad (4)$$

以上各式中, σ_t 为电导率; J_0 是随时间变化的通入电流的密度; j_x, j_y 为电流密度在 x, y 方向的分量。其中, 电流密度的边界条件是: 在 $x=0, y < a$ 时, $j_x=0$; $z \rightarrow \infty$ 时, $j_y=0, j_x=J_0$ 。

根据(4)式和热源功率密度 $Q(x, y)$ 表达式^[5]:

$$Q(x, y) = \int_{-h}^h \frac{1}{\sigma_t} (j_x^2 + j_y^2) dz, \text{ 可得}$$

$$Q(x, y) = \frac{2hJ_0^2}{\sigma_t} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 - y^2) + a^4}} \quad (5)$$

2 裂纹尖端附近温度场的确定

具有单边裂纹的导体内部存在热源的情况下, 温度场的基本方程是

$$T(x, y) = 2\text{Re}F(z) \quad (6)$$

式中的 $T(x, y)$ 是温度分布函数, $F(z)$ 是导体内部温度场的复合势。由文献[6], 有 $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\gamma(y)}{y-z} dy$ 。这里的 $\gamma(y) = \gamma_2(y) - i \int_0^a q_2(\tau) d\tau$ 是温度场复合势的积分密度, 且 $q^+(0, y) = \frac{2hJ_0^2}{\sigma} \frac{y^2}{y^2 - a^2}$ 。其中, 角标“+”“-”分别对应于裂纹

左右边缘的函数值。温度场的边界条件为: $\frac{\partial T(\tau)}{\partial n}$

$$= \frac{\partial T(\tau)}{\partial x} = 0, \tau \in a, T(\infty) = 0, T(0, a) \rightarrow \infty, \text{ 式中, } \tau$$

为裂纹处的切向变量, n 为裂纹的法向变量。在这里可以得到: $\gamma_2(y) = 0, q_2(y) = \frac{2hJ_0^2}{\lambda\sigma} \frac{y^2}{y^2 - a^2}$, 式中 λ

为导电薄板的热传导系数。我们这里的复平面是将 y 轴作为实轴的, 所以 z 平面可以表示为 $z = y + xi$ 。

综合上述各式, 得出温度场的复合势为

$$F(z) = \frac{hJ_0^2}{\pi\sigma\lambda} \left(\alpha + \delta + \frac{a}{2} \ln \frac{\delta}{2a + \delta} \right) \times$$

$$[\ln \sqrt{(a-y)^2 + x^2} + \text{arctg} \frac{x}{y-a} i -$$

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \text{arctg} \frac{x}{y} i] \quad (7)$$

其中, δ 是裂纹尖端附近的坐标扰动值。由(6)式和(7)式可得到裂纹尖端附近满足上面所提到的温度场的边界条件的温度分布表达式

$$T(x, y) = \frac{2hJ_0^2}{\pi\sigma\lambda} \left(\alpha + \delta + \frac{a}{2} \ln \frac{\delta}{2a + \delta} \right) \times$$

$$(\ln \sqrt{(a-y)^2 + x^2} - \ln \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (8)$$

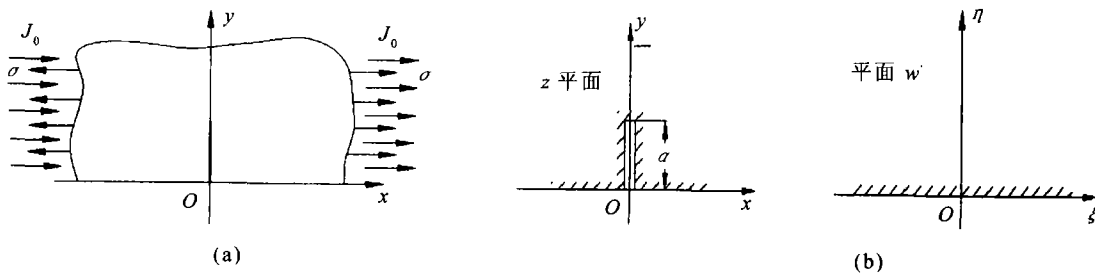


图1 加入载荷的单边裂纹载流薄板
(a) 示意图; (b) z 平面与 w 平面映射关系。

在电容放电电路中,可以通入 $J_0 = J_{00} \int_0^t \exp \frac{-1}{RC} dt/t$ 的电流,这里的参数 R 为放电电容; J_{00} 为电流密度幅值。

3 电热应力强度因子的确定

要求解的电热应力强度因子用到的热源功率密度和温度场的表达式可以通过式(5)逆时针旋转坐标系得出

$$Q_1(x_1, y_1) = \frac{2hJ_0^2}{\sigma_1} \times \frac{x_1^2 + y_1^2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)^2 - 2a^2(x_1^2 - y_1^2) + a^4}} \quad (9)$$

$$T(x_1, y_1) = \frac{2hJ_0^2}{\pi\omega\lambda} \left(\alpha + \delta + \frac{a}{2} \ln \frac{\delta}{2a + \delta} \right) \times (\ln \sqrt{(a - x_1)^2 + y_1^2} - \ln \sqrt{x_1^2 + y_1^2}) \quad (10)$$

由文献[7],在受到点 $C(\alpha, \beta)$ 处产生的一定量值的热源影响下(如图 2 所示),所产生的应力强度因子的近似表达式为

$$K_q = \frac{qE\alpha_1\beta}{2} \sqrt{\frac{\pi R}{a}} \frac{\beta \cos \frac{1}{2}\theta_1 + (a - \alpha) \sin \frac{1}{2}\theta_1}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{qE\alpha_1}{2} \sqrt{\pi a} - \frac{qE\alpha_1}{4} \sqrt{\pi a} \log [a^2 + \beta^2 + R_1 + 2\sqrt{R_1}(\beta \cos \frac{1}{2}\theta_2 - \alpha \sin \frac{1}{2}\theta_2)] + \frac{qE\alpha_1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} (\alpha + a \log 2) + \frac{qE\alpha_1}{2} \sqrt{\frac{\pi R_1}{a}} \sin \frac{1}{2}\theta_2 \quad (11)$$

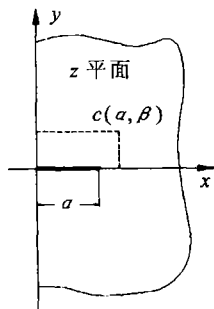


图 2 带裂纹薄板上的点热源

其中 α_1 —线胀系数 $m/(m \cdot ^\circ C)$, E —弹性模量 Pa, $R=R_1=[(a^2 - \beta^2 - a^2)^2 + 4a^2\beta^2]^{1/2}$, $\theta = \theta_{11} + \theta_{12}$,

$$\theta_{11} = \begin{cases} \sin^{-1}(\beta/r_1), & \alpha + a \geq 0; \\ \pi - \sin^{-1}(\beta/r_1), & \alpha + a < 0, \beta \geq 0; \\ -\pi - \sin^{-1}(\beta/r_1), & \alpha + a < 0, \beta < 0. \end{cases}$$

$$\theta_{12} = \begin{cases} \sin^{-1}(\beta/r_2), & \alpha + a \geq 0; \\ \pi - \sin^{-1}(\beta/r_2), & \alpha + a < 0, \beta \geq 0; \\ -\pi - \sin^{-1}(\beta/r_2), & \alpha + a < 0, \beta < 0. \end{cases}$$

$$r_1 = \sqrt{(\alpha + a)^2 + \beta^2}, r_2 = \sqrt{(\alpha - a)^2 + \beta^2}, \theta_2 = \theta_1 - \pi.$$

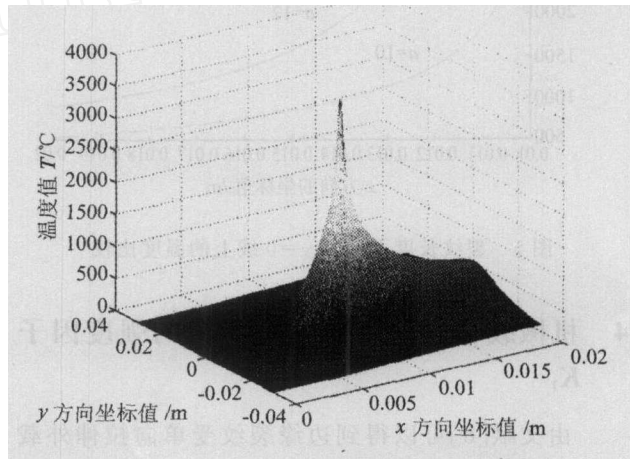


图 3 温度分布趋势

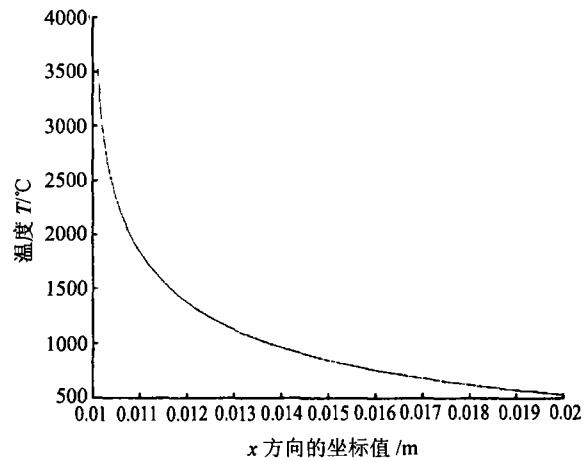


图 4 $y=0$ 时裂纹尖端温度场的变化

这里是将单边裂纹的裂尖处看成点热源,所以点热源位置取在裂尖处,即 $\alpha = a, \beta = 0$ 代入上述表达式中得到 $R=R_1=0, \theta_{11}=0, \theta_{12}=0, \theta_1=0, \theta_2=-\pi$ 。将这些条件带入到(11)式中得到

$$K_q = \frac{qE\alpha_1}{4} \sqrt{\pi a} \left(1 + 2 \log \frac{2}{a} \right) \quad (12)$$

又因为 $q = -Q_1/2\pi\lambda$, 所以(12)式可写成

$$K_q = -\frac{Q_1 E \alpha_1}{8\pi\lambda} \sqrt{\pi a} \left(1 + 2\log \frac{2}{a}\right) \quad (13)$$

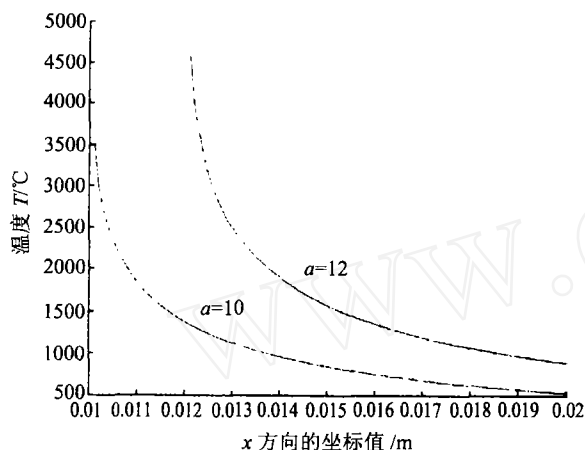


图5 裂纹长度不同时 $y=0$ 线上的温度比较

4 机械载荷与电流共同作用时的强度因子 K_I

由文献[8]可以得到边缘裂纹受单向拉伸外载荷的应力强度因子的表达式

$$K_\sigma = 1.1215\sigma \sqrt{\pi a} \quad (14)$$

将电热应力强度因子 K_q 与外载荷应力场的应力强度因子 K_σ 相叠加,得到总的应力强度因子 K_{cl} 的表达式

$$K_{cl} = K_q + K_\sigma = \sqrt{\pi a} \left[-\frac{Q_1 E \alpha_1}{8\pi\lambda} \times \left(1 + 2\log \frac{2}{a}\right) + 1.1215\sigma \right] \quad (15)$$

应力强度因子 K_{cl} 是描述裂纹尖端附近应力场强弱程度的参量^[9],裂纹是否会发生失稳扩展取决于 K_{cl} 值的大小,利用断裂准则 $K_{cl} \leq K_{IC}$,即可以判断裂纹是否开裂。

5 算例分析

计算含有长度为 $a=10$ mm 的高速工具钢单边裂纹钢板所制成的试件,已知试件的厚度为 0.5 mm,受到 $\sigma=190$ MPa 单向拉伸外载荷,板内沿着 Y 轴通入电流密度的标量值为 $J_0=2.1 \times 10^8$ A/m² 的瞬间电流。平面应变情况下 K_{IC} 的临界值 $K_{IC}=39$ MPa $\cdot\sqrt{m}$,热传导系数为 $\lambda=27.2$ W \cdot (m \cdot °C),电导率为 $\sigma_c=5.5 \times 10^6$ ($\Omega \cdot m$)⁻¹,弹性

模量 $E=2.0 \times 10^{11}$ Pa,线胀系数 $\alpha_c=11.2 \times 10^{-6}$ m/(m \cdot °C)。利用这些条件可以得出在裂尖点 (0.01003,0) 位置处温度达到 1 480°C, $K_q = -14.72$ MPa $\cdot\sqrt{m}$, $K_\sigma = 37.77$ MPa $\cdot\sqrt{m}$, $K_{cl} = 23.05$ MPa $\cdot\sqrt{m}$ 。

通过这个结果可以看出在不考虑电热影响时裂纹尖端的应力强度因子 $K_I=K_\sigma=37.77$ MPa $\cdot\sqrt{m}$,这个数值与平面应变状态下的临界值 $K_{IC}=39$ MPa $\cdot\sqrt{m}$ 比较接近,裂纹的失稳扩展很容易发生。在通过入瞬间电流的情况下,由于 K_q 的影响裂纹尖端总的应力强度因子 K_{cl} 将下降到 23.05 MPa $\cdot\sqrt{m}$,在这个数值下的裂纹失稳现象将不会发生。图 3 表示的是 $a=10$ mm 的温度场的变化规律。图 4 表示的是在 $y=0$ 的情况下,裂尖附近温度场的分布平面图。图 5 是裂纹长度不同的温度场的比较。从这三个图可以得到在裂尖熔化后熔化区域边缘的位置并用这个位置的热源功率密度得到电热应力强度因子的确定数值。由于实际所求得的电热应力强度因子是负值,所以在裂尖附近产生压应力场减小外拉伸载荷对裂纹的影响。这样就说明了电热应力强度因子在电磁热止裂中所起到的作用,即有效地遏制裂纹的扩展。

6 结论

(1) 本文在原有求解单边裂纹尖端温度场方法的基础上,另辟蹊径,找到了一种与原来不同的求解温度场的方法。

(2) 引入电热应力强度因子的概念。应用断裂准则,通过算例证实了:由于温度产生的电热应力削弱了外载荷对裂纹扩张的影响。

(3) 本文算例分析结果与文献[10]给出的实验研究结果有较好吻合。所以这种计算方法可以作为指导工程应用的理论依据。

参 考 文 献

- 胥红敏,白象忠,付宇明. 单边裂纹通电瞬间裂尖处应力场的复变函数解. 力学季刊,2002;23(3):362-368
- 付宇明,白象忠,胥红敏. 电磁热效应止裂效果与电路通路尺寸关系的研究. 机械强度,2002;24(4):558-561
- 田振国,马世麟,付宇明,白象忠. 带有边缘裂纹的导电薄板跨越止裂的温度场. 应用基础与工程科学学报,2002;6(2):162-167

- 4 高等数学教研室编. 高等数学讲义(第五册). 中国人民解放军军事工程学院, 1962; 181—184
- 5 马西奎. 电磁场理论及应用. 西安: 西安交通大学出版社, 2000; 282—290
- 6 Кит Г С, Кривцун М Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1983; 61—69
- 7 Zhang X Z, Hasebe N. Basic singular thermoelastic solutions for a crack. *Int J Fracture*, 1993; 62(2): 97—118
- 8 中国航空研究院编著. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社, 1993; 200
- 9 范天佑. 断裂理论基础. 北京: 科学出版社, 2003; 77—80
- 10 付字明, 白象忠, 郑丽娟, 胥红敏. 电磁热效应止裂效果与裂纹走向关系的研究. *应用力学学报*, 2002; 19(2): 117—121

The Analysis of Crack Arresting Efficiency as a Result of Electrothermal Effects under the Mechanical Load

LIU Siyuan^{1,2}, BAI Xiangzhong^{1,2}, LIU Junjie^{1,2}, AO Tao^{1,2}

(The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical(LNM)¹, Beijing 100080;
Institute of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University², Qinhuangdao 066004)

[Abstract] The expression of the heat source efficiency density can be provided through a new method. The concept of electrothermal stress intensity factors was defined and its expression was deduced. Adding it to the stress intensity factor caused by the mechanical load, the stress intensity factors under the mechanical load and electric current common action were obtained. The relationship between the stress intensity factors and fracture judgment can be obtained. As an example, it proves that the crack arresting as a result of electrothermal effects can improve the safety coefficient of the metal material.

[Key words] heat source efficiency density adding mechanical load electrothermal stress intensity factors