

具有圆弧裂纹载流薄板的温度效应分析*

ANALYSIS OF TEMPERATURE EFFECT IN CURRENT-CARRYING PLATE WITH AN ARC-CRACK

杨春燕**^{1,2,3} 白象忠^{1,3} 田振国^{1,3}

(1. 中国科学院力学研究所 非线性连续介质力学开放研究实验室(LNM),北京 100080)

(2. 中国科学院力学研究所,北京 100080)

(3. 燕山大学 建筑工程与力学学院,秦皇岛 066004)

YANG Chun Yan^{1,2,3} BAI Xiang Zhong^{1,3} TIAN Zhen Guo^{1,3}(1. *Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)(2. *Research Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China*)(3. *School of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China*)

摘要 给出含有圆弧裂纹的载流薄板在通入强大脉冲电流瞬间,裂纹尖端处温度场分布的复变函数解。该解是在首先求解通电瞬间,裂纹尖端处所形成的点热源功率的情况下得到的。它为进一步求解裂纹尖端处的应力场奠定了基础。文中给出的算例表明,适当控制通入的电流强度,可以达到有效控制裂尖熔化区尺寸以及形成焊口的目的。

关键词 圆弧裂纹 载流薄板 裂纹尖端 温度场 复变函数

中图分类号 O346.1 O482.6

Abstract The temperature field around the crack tip in a current-carrying plate with a penetrated arc-crack under the action of transient pulse current was calculated and analyzed using complex function analysis solution. This solution was obtained on the condition that the power of point heat source was deduced under the action of transient pulse current, which was the basis of solving the stress field around the crack tip. The calculated examples were provided. If a current with proper intensity has been switched on, the goal of controlling the melting and welding dimension effectively around the crack tip can be obtained.

Key words Arc-crack; Current-carrying plate; Crack tip; Temperature field; Complex function

Corresponding author: YANG Chunyan, E-mail: hebeicy@sohu.com, Fax: +86-335-8063941

The project supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 50275128).

Manuscript received 20021217, in revised form 20030324.

1 引言

人类长时间在生产与实际生活中,常常利用裂纹有利的一面和消除它不利的因素,而得到遏制裂纹扩展的一些方法^[1],但利用这些方法对裂纹实施止裂,均存在不便利的一面。与文献[1]介绍的几种方法不同,利用电磁场热效应遏制裂纹扩展的方法具有一定的优越性。对于导电材料中的裂纹,利用强大的电流或超强度电磁场的作用,遏制快速扩展的裂纹具有广泛应用的可能性。这种方法具有特殊的优越性就在于能够保持外力作用不变,方法简单,收效迅速等优点。

文献[2,3]分别采用积分变换法和复变函数法研究了导电薄板内含有直线裂纹时裂纹尖端附近的温度

场。而本文是通过电流矢量与热流矢量的特性,给出瞬间电流绕无限大薄板内圆弧穿透裂纹的复变函数解。当强度均匀的瞬间电流通入无限大薄板时,由于裂纹的存在,将出现局部的温度梯度扰动。在求解裂纹尖端附近形成的点热源的基础上,确定带有曲线裂纹的载流薄板的温度场,从而为进一步确定应力场、实施裂纹止裂打下基础。本文给出的求解方法简便,实用性强,便于工程应用。

2 基本方程的建立

在 xoy 平面域内,有一半径为 R ,所对的圆心角为 2θ 的圆弧穿透裂纹(图1)。假设裂纹的正向为由 a 到 b ,其中 a, b 为裂尖,并且 $a = Re^{-i}$, $b = Re^i$ 。求

* 20021217 收到初稿,20030324 收到修改稿。国家自然科学基金资助项目(50275128)。

** 杨春燕,女,1978年12月生,河北武邑人,汉族。中国科学院力学研究所博士研究生,研究方向为电磁热效应裂纹止裂技术及其应用。

解圆弧裂纹尖端附近的温度场的过程主要分两个阶段:

1) 通过载流薄板内的电流密度的分布, 求得裂纹尖端处的热源功率。

2) 根据所求得的热源功率, 解出裂纹尖端温度场分布的表达式。

对于多连通域内边值问题, 采用通常的方法是很难求解的, 而运用复变函数的方法会使求解的过程简化。

2.1 电流强度和电流密度的确定

在具有圆弧裂纹的导电薄板上加载定常电流, 求解该板中电流密度的分布。参考文献[4]中关于对热流动的分析, 导电薄板内的电流强度 I 与电流密度 J 有如下关系

$$J_r = \frac{\partial I}{\partial r} \quad J = \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} \quad (1)$$

利用解析函数

$$\phi(z) = I + iV \quad (2)$$

其中 J_r, J 分别为 r, θ 方向的电流密度, V 为 I 的共轭函数, 并且满足 C-R(柯西-黎曼) 条件, $i = \sqrt{-1}$, 考虑到式(1)和式(2)有

$$J - iJ_r = (z) \quad I = \text{Re}[\phi(z)] \quad (3)$$

其中, $\text{Re}[\phi(z)]$ 为对 $\phi(z)$ 取实部, 且 $\phi(z) = (z) dz$, 由式(3)可得

$$|J| = \sqrt{J_r^2 + J^2} = |(z)| \quad (4)$$

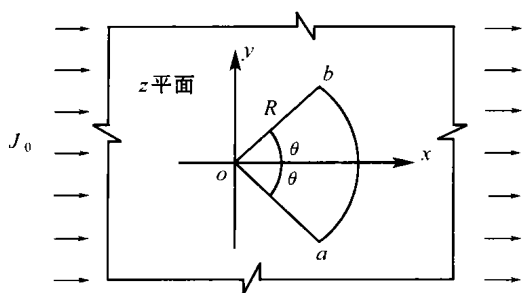


图1 带有圆弧裂纹的载流薄板
Fig. 1 A current plate with a curve-crack

2.2 具有圆弧裂纹的导电薄板内的电流强度

若在无穷远处, 电流密度是有限的, 则函数 (z) 在域内是正则的。因此边界条件可以写为

$$\begin{aligned} [(t) - \overline{(t)}]^+ + [(t) - \overline{(t)}]^- &= 2f(t) \\ [(t) + \overline{(t)}]^+ - [(t) + \overline{(t)}]^- &= 2g(t) \end{aligned} \quad \text{在 } l \text{ 上}$$

其中

$$\begin{aligned} f(t) &= -i \left[\left(\frac{\partial I}{\partial r} \right)^+ + \left(\frac{\partial I}{\partial r} \right)^- \right] \quad (t \in l) \\ g(t) &= -i \left[\left(\frac{\partial I}{\partial r} \right)^+ - \left(\frac{\partial I}{\partial r} \right)^- \right] \quad (t \in l) \end{aligned}$$

t 为裂纹边界上的点, l 为裂纹边界, 正负号分别表示裂纹的内外边界。并且 $f(t), g(t)$ 均满足迪里赫里条件。下面的计算要利用迪里赫里问题的解^[5]

$$\begin{aligned} (z) &= \frac{1}{2iX(z)} \int_L \frac{X(t)f(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2i} \int_L \frac{g(t)dt}{t-z} + \\ &\quad \frac{1}{2X(z)} \left[\frac{C_0 z}{R} + C_1 + \frac{D_1 R}{z} + \frac{D_2 R^2}{z^2} \right] + \frac{D_0}{2} + \\ &\quad \frac{(\nabla I) R^2}{2z^2} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $X(z) = (z/R - a)^{1/2}(z/R - b)^{1/2}$; C_0, C_1, D_0, D_1, D_2 为常数, (∇I) 为无穷远处的电流强度梯度。

2.3 电流密度的基本方程

由裂纹绝热的边界条件可知 $f(t) = g(t) = 0$, 则式(5)可以写成

$$\begin{aligned} (z) &= \frac{1}{2X(z)} \left[\frac{C_0 z}{R} + C_1 + \frac{D_1 R}{z} + \frac{D_2 R^2}{z^2} \right] + \\ &\quad \frac{D_0}{2} + \frac{(\nabla I) R^2}{2z^2} \end{aligned} \quad (6)$$

在 $z = 0$ 附近有

$$\frac{1}{2X(z)} \left[\frac{D_1 R}{z} + \frac{D_2 R^2}{z^2} \right] = - \frac{(\nabla I) R^2}{2z^2} \quad (7)$$

利用待定系数法, 并由式(7)可得

$$D_2 = (\nabla I) \quad D_1 = -(\nabla I) \cos \theta \quad (8)$$

对于充分大的 $|z|$ 有

$$(z) = (\nabla I) + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (9)$$

利用无穷远处的边界条件 $\lim_{z \rightarrow \infty} (z) = (\nabla I)$, 再由式(6)和式(9)可得

$$C_0 + D_0 = 2(\nabla I) \quad C_1 + C_0 \cos \theta = 0 \quad (10)$$

若 M_0 为 (z) 的常数项, N_0 为 $\overline{(z)}$ 的常数项, 则有

$$M_0 = \overline{N_0} \quad (11)$$

综合式(6)、式(9)、式(10)、式(11)可得

$$C_0 = \frac{2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} (\nabla I)$$

$$C_1 = -C_0 \cos \theta, \quad D_0 = 2(\nabla I) - C_0 \quad (12)$$

把式(8)和(12)代入式(6)可以完全确定 (z) , 再把 (z) 代入式(4)即可以确定电流密度的方程。

2.4 热源功率的计算

在已知裂纹尖端附近的电流密度 J_r, J 的情况下, 裂纹尖端附近的热源功率为^[6]

$$Q = \int_{-h}^h \frac{J_r^2 + J^2}{2} dz = \frac{2h}{\sigma} |J|^2$$

由式(3)可得到用 (z) 表示的裂纹尖端附近热源功率 $Q = \frac{2h}{\sigma} |(z)|^2$, 其中 σ 为电导率, h 为薄板的一半

厚度。

3 载流薄板内温度场的确定

带有裂纹的载流薄板在瞬间电流作用下,由于裂纹的存在,电流在流经裂纹处将出现绕流现象,在裂尖处电流密度集中,形成点热源。因此载流薄板内的温度场由两个因素确定。一是域内无裂纹且具有等效热源时所产生的温度场 $T_0(x, y)$ 。二是域内存在裂纹且具有等效热源时裂纹对周围温度场的扰动值 $T^*(x, y)$ 。因此,多连通域内的温度场表示为

$$T(x, y) = T_0(x, y) + T^*(x, y) \quad (13)$$

因板内圆弧裂纹具有绝缘、绝热的性质,并且认为以上所求得的热源功率只有两个裂纹尖端对域内温度场有作用,而忽略域内其他各点的电流热效应。使问题转化为确定具有点热源多连通域的温度场问题。

3.1 z 平面圆弧裂纹到 z 平面直线裂纹的转换

该变换要用到分式线性变换,其变换式^[7]

$$z = i \frac{R - z}{R + z} \quad (14)$$

由 $a = \operatorname{Re}^{-i}$, $b = \operatorname{Re}^{-i}$ 以及式(14)可得

$$a = -\tan(\theta/2) \quad b = \tan(\theta/2)$$

3.2 $T_0(x, y)$ 的表达式

若在 z_0 点放置点热源,参照文献[6]可得

$$T_0(x, y) = 2\operatorname{Re} F_0(z_0, z) \\ F_0(x, y) = (x, y) = m_0 R \ln(z_0 - z)$$

其中 $m_0 = \frac{Q}{4}$, Q_1, Q_2 分别为裂纹尖端的热源功率,为材料的热传导系数。考虑到板中有两个点热源,参照文献[8],利用叠加原理可得

$$F_0(x, y) = \frac{R}{4} [Q_1 \ln(a - z) + Q_2 \ln(b - z)] \quad (15)$$

$$T_0(x, y) = \frac{R}{4} \{ Q_1 \ln[(a - x)^2 + y^2] + Q_2 \ln[(b - x)^2 + y^2] \} \quad (16)$$

3.3 $T^*(x, y)$ 的表达式

绝热裂纹的边界条件为 $\left[\frac{\partial T}{\partial n} \right] = 0$ 。考虑到式

$$(13) \text{ 可得 } \left[\frac{\partial T^*}{\partial n} \right] = - \left[\frac{\partial T_0}{\partial n} \right] \quad (17)$$

$$\text{则 } T^*(x, y) = 2\operatorname{Re} F^*(z) \quad (18)$$

$$\text{其中 } F^*(z) = \frac{c}{2} + \frac{1}{2i} \int_{l} \frac{(s)}{s - z} ds \quad (s \in l) \quad (19)$$

c 为实常数, n 为裂纹边界的法线方向, s 为裂纹边界上的点, (s) 为定义在边界上的实函数,在边界处有

$$\left[\frac{\partial T^*}{\partial n} \right]^\pm = \pm i e^{i\theta_0} (s_0) - \frac{e^{i\theta_0}}{i} \int_l (s) k(s, s_0) ds$$

其中

$$k(s, s_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{(s)}{s - s_0} - \frac{1}{s - s_0} \right] \\ (s) = \frac{ds}{ds} = -e^{-2i\theta_0}$$

θ_0 为边界 $\pm s_0$ 点处法线与变换后裂纹所在轴线的夹角,根据本文实际情况 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 计算可得

$$\left[\frac{\partial T^*}{\partial n} \right]^\pm = \mp (s_0) \quad (20)$$

$$\left[\frac{\partial T_0}{\partial n} \right]^\pm = \left[\frac{\partial T_0}{\partial y} \right]^\pm = -\frac{y}{2} \left[\frac{Q_1}{(a - x)^2 + y^2} + \frac{Q_2}{(b - x)^2 + y^2} \right] \quad (21)$$

由边界条件式(17)可得

$$\left[\frac{\partial T^*}{\partial n} \right]^\pm = - \left[\frac{\partial T_0}{\partial n} \right]^\pm \quad (22)$$

由于经过线性变换后 z 平面中圆弧裂纹变为 z 平面中的直线裂纹。对于式(21)中的裂纹上下边缘的纵坐标可以由裂纹张开宽度 d 代替。同时考虑到式(20)、式(21)和式(22)可得

$$(s_0) = \pm \frac{d}{2} \left[\frac{Q_1}{(a - x)^2 + d^2} + \frac{Q_2}{(b - x)^2 + d^2} \right] \quad (23)$$

若载流薄板的初始温度为 0, 圆弧裂纹张开宽度 $d = 0$, 则经过分式线形变换后 z 平面内的直线裂纹张开宽度 $d = 0$ 。由式(19)和式(23)可得 $F^*(z) = 0$, 再由式(18)可得域内存在裂纹且具有等效热源时裂纹对周围温度场的扰动值为

$$T^*(x, y) = 0 \quad (24)$$

由文中算例可见,裂尖处的等效热源只对周围一小部分区域有影响,而对其他部分影响很小,甚至根本没有影响。

4 $T(x, y)$ 的确定

由于在由 z 平面圆弧裂纹到 z 平面直线裂纹的变换过程中, $T_0(x, y)$ 已包含了域内无裂纹且具有等效热源时所产生的温度场 $T_0(x, y)$ 和域内存在裂纹且具有等效热源时裂纹对周围温度场的扰动值 $T^*(x, y)$, 又考虑到式(14)和式(15)可得

$$F(x, y) = \frac{R}{4} \left[Q_1 \ln \left[a - i \frac{R - z}{R + z} \right] + Q_2 \ln \left[b - i \frac{R - z}{R + z} \right] \right] = \frac{R}{4} \left[Q_1 \ln \left[a - i \frac{R - x - iy}{R + x + iy} \right] + Q_2 \ln \left[b - i \frac{R - x - iy}{R + x + iy} \right] \right] \quad (25)$$

因 $T(x, y) = 2\text{Re} F(x, y)$, 所以由式(25) 可得圆弧裂纹在瞬间电流作用下的温度场的表达式如下所示

$$T(x, y) = \frac{R}{4} \left\{ Q_1 \ln \left[\left(a - \frac{2Ry}{(R+x)^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{R^2 - x^2 - y^2}{(R+x)^2} \right)^2 \right] + Q_2 \ln \left[\left(b - \frac{2Ry}{(R+x)^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{R^2 - x^2 - y^2}{(R+x)^2} \right)^2 \right] \right\} \quad (26)$$

5 温度效应分析算例

本文的公式推导是以无限大薄板为基础的, 但由于裂尖处点热源只对裂尖周围的一小部分区域(2 mm ~ 3 mm) 有影响, 用有限大薄板进行算例分析和实验研究, 不会带来大的误差。带有圆弧裂纹的 T7 钢板, 其长度为 100 mm, 宽度为 80 mm, 厚度为 $2h = 0.5$ mm, 圆弧裂纹尺寸 $R = 30$ mm, $\alpha = \pi/4$, 该材料的电导率、导热系数、密度、比热、弹性模量及其随温度变化均按文献[9] 给出的数据取值。通入的电流密度 $J_0 = 5.1 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ 。

在图2中, 曲线系列1、系列2、系列3分别表示当

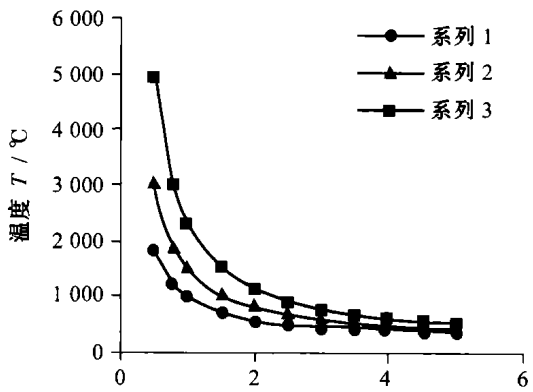


图2 曲线 $T \rightarrow r$
Fig.2 Curve $T \rightarrow r$

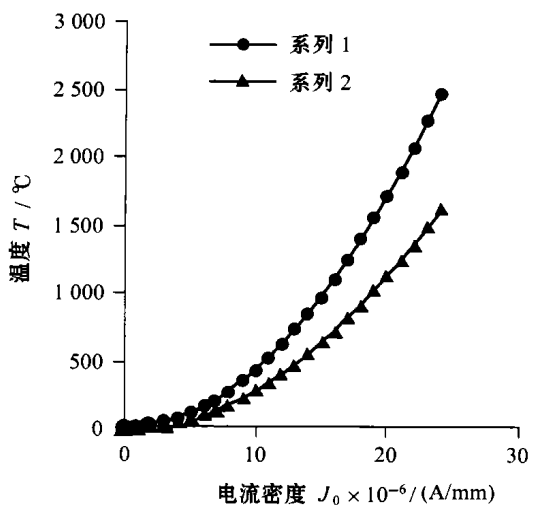


图3 曲线 $T \rightarrow J_0$
Fig.3 Curve $T \rightarrow J_0$

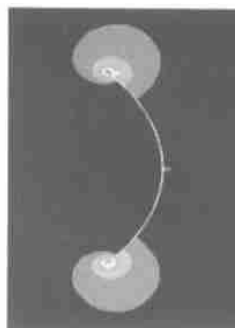


图4 温度梯度图

Fig.4 The temperature grads graphics

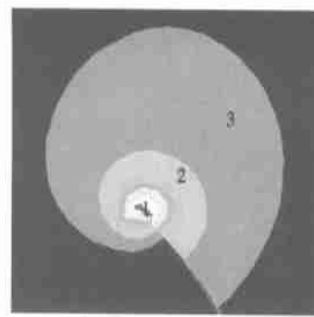


图5 温度梯度放大图

Fig.5 The magnified temperature grads graphics

$\alpha = \pi/3$ 时, 通入同一电流情况下的温度 $T \rightarrow r$ 曲线, 其中 r 为距裂纹尖端距离。图3中的曲线系列1、系列2分别表示距裂纹尖端为 1.5 mm 和 2.5 mm 处的温度随通入电流密度的变化曲线。

图4为算例中所示模型的温度梯度图, 图5为温度梯度的局部放大图。裂纹尖端的等温线基本是一同心圆, 理论计算结果熔化半径约为 1 mm。图5中的1为裂纹尖端处的温度, 该温度值最高, 可达 2000, 远远超过材料的熔点。图5中2、3处的温度依次降低。在裂纹尖端附近温度梯度高达 1×10^6 /m, 而远离裂尖附近的温度梯度趋近于零。

6 结论

1) 从图2可以看出, 在通入同一电流的情况下, 当裂纹所对的圆心角越大时, 所对应的温度越高; 当裂纹所对的圆心角越小时, 所对应的温度越低。这说明裂纹的有效(相当) 长度越大, 裂纹尖端处的电流集中的程度越显著, 其止裂效果越明显。

2) 从图3可以看出, 电流密度越大, 裂纹尖端的温度值就越大; 电流密度越小, 裂纹尖端的温度值就越小。也即, 适当控制通入电流的密度, 可以达到有效控制裂纹区熔化区尺寸及形成焊口的目的。

References

- 1 Finkelj V M. The physics elements of arresting breach. Moscow: Publishing Company of Metallurgy, 1977. 1 ~ 12 (In Russian) (胡宇达, 白象忠. 脉冲电流在导电薄板裂纹止裂技术中的应用. 固体力学学报, 2000, 21(4): 335 ~ 340).
- 2 HU YuDa, BAI XiangZhong. Application of pulse current to the crack-arrest in a conducting plate. Acta Mechanica Solida Sinica, 2000, 21(4): 335 ~ 340 (In Chinese) (胡宇达, 白象忠. 脉冲电流在导电薄板裂纹止裂技术中的应用. 固体力学学报, 2000, 21(4): 335 ~ 340).
- 3 YANG Chun Yan, BAI XiangZhong. The temperature field in a current-carrying plate with a curve crack. Journal of Applied Sciences, 2002, 20(4): 336 ~ 340 (In Chinese) (杨春燕, 白象忠. 带有曲线裂纹载流薄板的温度场. 应用科学学报, 2002, 20(4): 336 ~ 340).
- 4 Sih G C. Heat exchange of infinite medium with cracks in boundary. Applied

- mechanics. C Volume. Heat Exchange, 1965, 87(2): 157 ~ 162 (In Russian) (G. C. Sih).
- 87(2): 157 ~ 162).
- 5 uskh lishvili N I Write, ZHAO Hui Yuan Translation. Several elementary problems in mathematics and elastic mechanics. Beijing: Science Press, 1958. 196 ~ 420 (In Chinese) (著. 赵惠元译. 数学弹性力学的几个基本问题. 北京: 科学出版社, 1958. 196 ~ 420).
- 6 Kudriavcev B A, Parton V Z, Rubinskij B D. The magneto-elastic field of object with half infinite length crack. Applied Mathematics and Mechanics, 1980, 44(5): 916 ~ 922 (In Russian) (著. 李竟生, 陈崇希译. 多孔介质流体动力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983. 254 ~ 258).
- 1980, 44(5): 916 ~ 922).
- 7 Advanced Mathematics Staff Room of Xi an Jiaotong University. Engineering mathematics, complex function. Beijing: Publishing Company of Advanced Education, 1996. 146 ~ 245 (In Chinese) (西安交通大学高等数学教研室. 工程数学 复变函数. 北京: 高等教育出版社, 1996. 146 ~ 245).
- 8 Jacob. Bear[America]Write, LIJingSheng, CHEN ChongXi Translation. Hydrokinetics of medium with many holes. Beijing; Publishing Company of China Architecture Industry, 1983. 254 ~ 258 (In Chinese) (Jacob. Bear[美]著, 李竟生, 陈崇希译. 多孔介质流体动力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983. 254 ~ 258).
- 9 The Compilation Committee of Engineering Materials Practical Manual. Engineering material practical manual frame steel stainless steel. Beijing: China Standard Publishing Company, 1988. 446 ~ 453 (In Chinese) (工程材料实用手册编辑委员会. 工程材料实用手册 结构钢不锈钢. 北京: 中国标准出版社, 1988. 446 ~ 453).

www.cnki.net