

任意阶隐式指数时程差分多步法 及其在非线性和系统中的应用*

唐 晨¹⁾²⁾ 闫海青^{1)†} 张 颖¹⁾ 刘 铭¹⁾ 张桂敏¹⁾

¹⁾ (天津大学应用物理系, 天津 300072)

²⁾ (中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

(2003 年 8 月 2 日收到; 2003 年 10 月 30 日收到修改稿)

对非线性系统提出了任意阶隐式指数时程差分多步法, 实现了任意阶指数时程差分预测-校正算法. 发展完善了指数时程差分法. 将新算法应用于非线性系统, 取得了较好的效果. 数值结果表明隐式指数时程差分多步法很好地修正了显式指数时程差分多步法, 隐式指数时程差分多步法是一种高精度、高效率的方法.

关键词: 非线性系统, 任意阶隐式指数时程差分多步法, 混沌

PACC: 0545

1. 引 言

非线性现象广泛地呈现在物理、化学、生命等各个领域, 非线性系统的研究是科学界热点问题之一. 尽管近几年非线性系统在数值计算^[1-3] 和控制^[4,5] 等方面取得了相当大的进展, 但一些数值计算方法在处理非线性系统时其计算精度、效率和稳定性还有待进一步提高. 指数时程差分法 (exponential time differencing, ETID)^[6-9]、或称为指数拟合法 (exponential fitting, EF)^[10] 是近期提出的数值求解微分方程的方法, 文献[11]应用 Hermite 插值函数构造了 2 阶和 4 阶显式指数拟合算法, 并应用于延时微分方程, 文献[12]将指数时程差分法应用于流体计算中. 在我国将这种数值计算方法称为精细时程积分法 (precise time integration, PTI)^[13], 不同之处是指数矩阵计算的方法不同. 目前构造出的指数时程差分法或精细时程积分法都是显式算法, 文献[14]提出了任意阶显式精细积分多步法的通用公式, 实现了变阶次显式运算. 对于相同阶的隐式算法与显式算法, 隐式算法具有较小的局部截断误差, 此外隐式算法还有较好的稳定性品质, 所以有必要构造隐式指数时程差分法. 本文在文献[14]的基础上构造出任意

阶隐式指数时程差分多步法, 并将本文方法应用于混沌方程中, 取得了较好的效果. 数值计算结果表明, 任意阶隐式指数时程差分多步法提高了显式算法的计算精度, 在求解混沌系统方面比传统方法有很大的优势, 通过精确求解有助于对混沌系统状态的分析. 本文研究工作发展完善了指数时程差分法的理论.

2. 任意阶隐式指数时程差分多步法

对一非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, t), \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $t \in [0, R]$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$. 引进任意一个满秩定常矩阵 H , $H \in R^{n \times n}$, 将上式进行等价变换, 则有

$$\dot{y} - Hy = F, \quad (2)$$

$$F = f(t, y) - Hy. \quad (3)$$

用积分因子 $\exp(-Ht)$ 乘以 (2) 式得

$$\frac{d}{dt} [\exp(-Ht) y(t)] = \exp(-Ht) \cdot F(t). \quad (4)$$

然后从 t_k 到 t_{k+1} 积分

$$\exp(-Ht_{k+1}) y_{k+1} - \exp(-Ht_k) y_k$$

*国家自然科学基金 (批准号: 19902002), 上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室开放基金 (批准号: VSN-2003-03) 和天津大学“985 教育振兴计划”基金资助的课题.

†E-mail: haiqingyan@yahoo.com.cn; 电话: 022-87894268.

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp(-Ht) \cdot F(t) dt. \quad (5)$$

也就是说指数时程差分法放弃传统的差分,改为积分,指数时程差分算法的格式是

$$y_{k+1} = \exp(Hh) \cdot y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp H(t_{k+1} - t) \cdot F(t) dt. \quad (6)$$

对(6)式中 $F(t)$ 的近似方式不同,可构造出不同格式的指数时程差分法.

令 $t_{k+1} = t_k + h$, (6) 式表示为

$$y_{k+1} = \exp(Hh) \cdot y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp H(t_{k+1} - t) \cdot F(t) dt, \quad (7)$$

令 $t = t_{k+1} - \tau$, (7) 式进一步表示为

$$y_{k+1} = \exp(Hh) \cdot y_k + \int_0^h \exp H \cdot F(t_{k+1} - \tau) d\tau, \quad (8)$$

与 Adams 隐式多步法构造相似,本文隐式指数时程差分多步法是用已求出的 $t_{k-i+1}, \dots, t_k, t_{k+1}$ 时刻的值 $y_{k-i+1}, \dots, y_k, y_{k+1}$ 来构造 $F(t_{k+1} - \tau)$ 的插值函数. 假设节点 $t_{k-i+1}, \dots, t_k, t_{k+1}$ 上的近似值 $y_{k-i+1}, \dots, y_k, y_{k+1}$ 已经求出,由(3)式可求出 $t_{k-i+1}, \dots, t_k, t_{k+1}$ 的近似值 $F_{k-i+1}, \dots, F_k, F_{k+1}$. 由 $i+1$ 对值 $(t_{k+1}, F_{k+1}), (t_k, F_k), \dots, (t_{k-i+1}, F_{k-i+1})$ 构造的牛顿等距插值多项式 $N(t_{k+1} - \tau)$ 内差近似(8)式中 $F(t_{k+1} - \tau)$.

$i+1$ 对值 $(t_{k+1}, F_{k+1}), (t_k, F_k), \dots, (t_{k-i+1}, F_{k-i+1})$ 构造的牛顿等距插值多项式 $N(t_{k+1} - \tau)$ 是

$$N(t_{k+1} - \tau) = \sum_{s=0}^i (-1)^s \prod_{j=s}^i \frac{(-1)^j}{h} \binom{j}{s} F_{k-s+1}, \quad (9)$$

(9) 式采用了下面的符号规则:

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}, \binom{k}{0} = 1. \quad (10)$$

将(8)式中的 $F(t_{k+1} - \tau)$ 近似为 $N(t_{k+1} - \tau)$ 得到下面的隐式格式:

$$y_{k+1} = \exp(Hh) \cdot y_k + h \left[(-1)^0 \binom{i}{j} b_j^* \binom{j}{0} F_{k+1} + (-1)^1 \binom{j}{j=1} b_j^* \binom{j}{1} F_k + \dots + (-1)^s \binom{i}{j=s} b_j^* \binom{j}{s} F_{k-s+1} \right]$$

$$+ \dots + h(-1)^i b_i^* F_{k-i+1}. \quad (11)$$

根据(10)式的符号规定,任意阶隐式指数时程差分多步法格式是

$$y_{k+1} = \exp(Hh) \cdot y_k + h(b_0^* + b_1^* + \dots + b_i^*) F_{k+1} - h(b_1^* + 2b_2^* + \dots + b_i^*) F_k + \dots + (-1)^s h \left[b_s^* \binom{s}{s} + b_{s+1}^* \binom{s+1}{s} \right] + \dots + b_i^* \binom{i}{s} F_{k-s+1} + \dots + h(-1)^i b_i^* F_{k-i+1}, \quad (12)$$

式中系数 b_j^* 满足

$$b_j^* = \int_0^1 \exp Hh \cdot (-1)^j \binom{-}{j} d = \int_{-1}^0 \exp Hh(-\tau) \cdot (-1)^j \binom{-}{j} d, \quad (13)$$

由(13)式定义的系数 b_j^* 是积分运算,不具备由计算机实现任意阶隐式指数时程差分多步法运算,对(13)式作如下变形,令

$$A = \frac{H^{-1}}{h}, T = \exp(Hh), b_j^* = \int_{-1}^0 \exp Hh(-\tau) \cdot (-1)^j \binom{-}{j} d = (-1)^j \left[(-A) \int_{-1}^0 [\exp Hh(-\tau)] \binom{-}{j} d \right] = (-1)^j \left\{ (-A) \left[\exp Hh(-\tau) \binom{-}{j} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \exp Hh(-\tau) \binom{-}{j} d \right\} = (-1)^j \left\{ (-A) \exp Hh(-\tau) \binom{-}{j} \Big|_{-1}^0 - (-A)^2 \left[\exp Hh(-\tau) \binom{-}{j} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \exp Hh(-\tau) \binom{-}{j} d \right\} \dots = (-1)^j \sum_{s=0}^j (-A^{s+1}) \left[I \cdot \binom{-}{j} \right]_{-1}^0 - T \left[\binom{-}{j} \right]_{-1}^0. \quad (14)$$

式中 $\binom{-}{j} \Big|_{-1}^0$ 是 $\frac{(-1)^j (-1)^j \dots (-1)^j}{j!}$ 的

s 阶导数在 $t = 0$ 处的值, $\left. \left(\frac{\partial^s}{\partial t^s} \right) \right|_{t=0}$ 是 $\frac{(-1)^s (-1) \dots (-1 - j + 1)}{j!}$ 的 s 阶导数在 $t = -1$ 处的值, 通过编制高效递归算法程序求 b_j^* , 同时采用任意精度计算提高算法的精度^[14]. $(i+1)$ 个插值点构造的隐式指数时程差分多步法的局部截断误差的阶可达 $O(h^{i+3})$.

3. 任意阶隐式指数时程差分多步法的应用

隐式多步法常用来修正显式多步法得到的数值解, 显式多步法和隐式多步法结合构成预测-校正算法. 最常用的传统的预测-校正算法是 Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正法, 即显式 Adams-Bashforth 算法是预测步, 隐式 Adams-Moulton 算法是校正步. 例如广泛使用的 4 阶 Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正法 (ABMPC4) 表示为

预测步

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}), \tag{15}$$

校正法

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}). \tag{16}$$

这里将显式指数时程差分多步法作为预测步, 将本文提出的隐式指数时程差分多步法作为校正步, 即实现任意阶指数时程差分预测-校正算法. 应用隐式指数时程差分多步法对文献[14]中的用显式指数时程差分多步法计算的两个混沌方程重新修正, 并与 Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正法比较. 我们知道任何多步算法都需要应用起步方法计算出所需要的起始值. 在 Adams 多步法中采用 Runge-Kutta 法获得所需的起始值, 而在指数时程差分多步法中采用单步显式指数时程差分算法获得所需的起始值.

算例 1 超混沌 Rössler 系统模型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0.25y + w, \\ \dot{z} &= 3 + xz, \\ \dot{w} &= -0.5z + 0.05w, \end{aligned} \tag{17}$$

其中, 初值为 $x(0) = -18.8503, y(0) = -29.5013, z(0) = 0.1483, w(0) = 30.1428$. 我们不知道方程

(17) 的解析解, 采用四五阶变步长 Runge-Kutta 法数值计算方程 (17), 当相对误差和绝对误差控制得十分小的时候 (如 10^{-15}), 这时得到的数值解可作为精确值. 我们取固定的步长 $h = 0.001$, 分别采用 3 阶和 4 阶显式指数时程差分多步法 (EEID3, EEID4) 数值计算方程 (17), 再用 3 阶和 4 阶隐式指数时程差分多步法修正, 即用 3 阶和 4 阶指数时程差分预测-校正算法 (EIDPC3, EIDPC4) 计算方程 (17), 图 1 和图 2 给出不同算法获得的变量 y 和 z 在不同时刻的绝对误差 (图中曲线 1, 2, 3, 4 分别表示由 EEID3, EIDPC3, EEID4, EIDPC4 获得的结果).

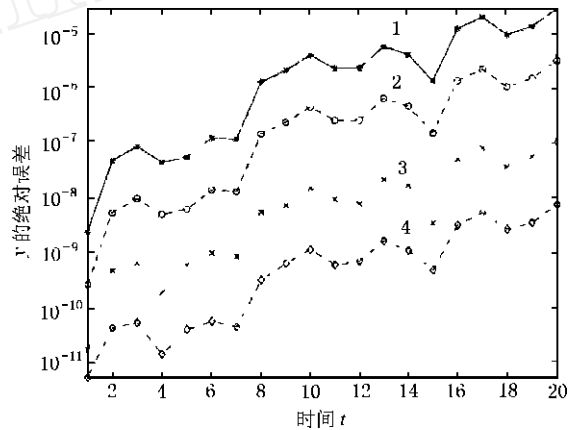


图 1 变量 y 的绝对误差

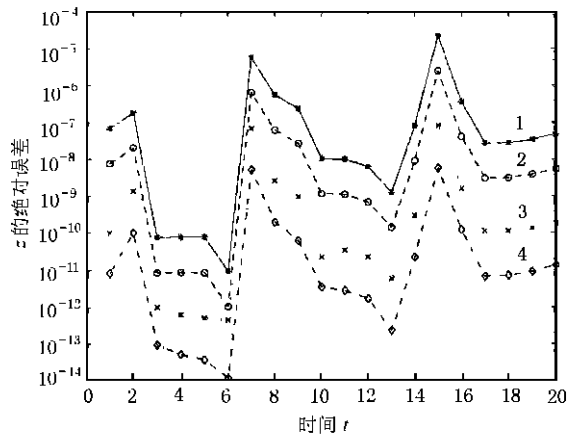


图 2 变量 z 的绝对误差

从图 1 和图 2 可见, 隐式指数时程差分多步法提高了显式指数时程差分多步法的精度.

算例 2 心脏-血液耦合动力学方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -Ex_2 - Ex_1 + Bx_4, \\ \dot{x}_2 &= Ax_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - Gx_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= P_1 x_5 + P_2 x_4 - P_3 x_4^3 + Mx_7, \\ \dot{x}_5 &= - P_1 x_4 + Dx_1, \\ \dot{x}_6 &= P_0 x_7 + 5.0x_6 - 6.0 \times 10^4 x_6^3 + Hx_1, \\ \dot{x}_7 &= - P_0 x_6 - Mx_4, \end{aligned} \quad (18)$$

其中,参数 $E = 16.0, A = 45.92, B = 5.0$ 保持不变,其他系数选取为五组:

1. $G = 4.0, P_0 = 10.0, P_1 = 3.4, P_2 = 60.0, P_3 = 12.0 \times 10^5, M = 1.5, D = 0.012, H = 0.012.$
2. $G = 0.25, P_0 = 9.8, P_1 = 3.4, P_2 = 18.0, P_3 = 6.0 \times 10^5, M = 1.5, D = 0.012, H = 0.012.$
3. $G = 0.25, P_0 = 10.0, P_1 = 3.4, P_2 = 18.0, P_3 = 6.0 \times 10^5, M = 1.5, D = 0.012, H = 0.012.$
4. $G = 0.25, P_0 = 9.8, P_1 = 3.4, P_2 = 60.0, P_3 = 6.0 \times 10^5, M = 1.5, D = 0.012, H = 0.012.$
5. $G = 0.25, P_0 = 10.0, P_1 = 3.4, P_2 = 60.0, P_3 = 6.0 \times 10^5, M = 1.5, D = 0.012, H = 0.012.$

我们不知道方程(18)的解析解,同样采用四五阶变步长 Runge-Kutta 法得到的数值解作为精确值.采用 EETD4 步长 $h = 0.0001$, EIDPC4 步长 $h = 0.0001$ 和同阶 Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正法(ABMPC4)步长 $h = 0.0000015$,分别计算方程(18),图3和图4是系数取第2组时变量 x_3 和 x_7 在不同时刻的绝对误差(图中曲线1,2,3分别代表由 ABMPC4, EETD4, EIDPC4 获得的结果).

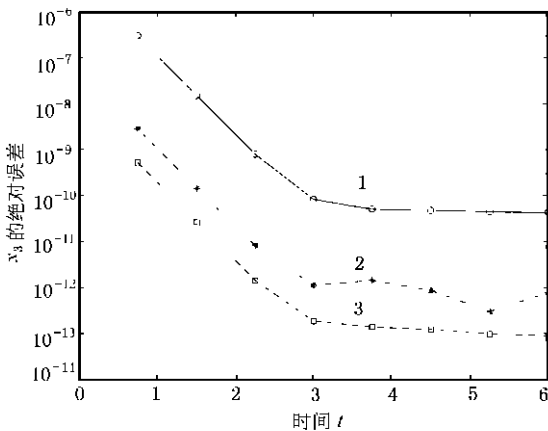


图3 变量 x_3 的绝对误差

Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正法和同阶的指数时程差分预测-校正算法每步右函数计算量相同,右函数计算量是算法总计算量的主要部分,尤其

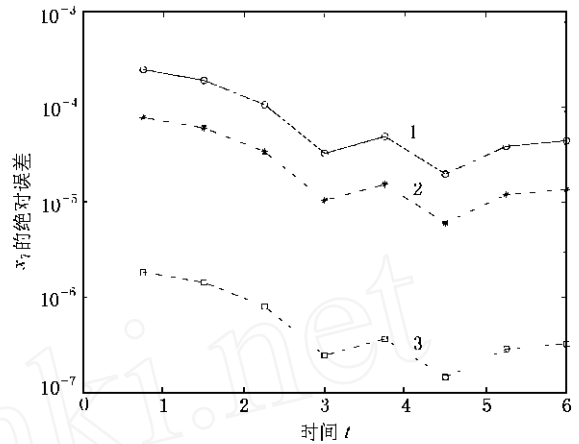


图4 变量 x_7 的绝对误差

是当右函数很复杂时,其计算量将占到总计算量的绝大部分.从图3和4可见,隐式指数时程差分多步法提高了显式指数时程差分多步法的精度,指数时程差分预测-校正算法的计算精度和效率要远好于同阶 Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正法的精度和效率.文献[14]通过显式指数时程差分多步法数值计算方程(18),由 x_2, x_4, x_7 构成相图来确定5组系数对应的状态,解决了文献[15]不能确定出第4或第5组系数对应的系统状态的问题,本文应用指数时程差分预测-校正算法进一步证实了文献[14]的结论.由此可看出,通过指数时程差分法的精确求解将有助于对混沌系统的分析.

4. 结 论

本文提出了任意阶隐式指数时程差分多步法,进一步实现了任意阶指数时程差分预测-校正算法.数值结果表明,隐式指数时程差分多步法很好地修正了显式指数时程差分多步法.指数时程差分预测-校正算法的计算精度和效率要好于同阶的广泛使用的 Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正法的精度和效率.本文的研究工作发展完善了指数时程差分法.在目前的指数时程差分多步法中我们是采用单步显式指数时程差分算法获得所需的起始值,如果改为用较高阶的指数时程差分 Runge-Kutta 法来获得所需的起始值,那么指数时程差分多步法的计算精度可进一步提高.

- [1] Yang S Q *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636(in Chinese) [杨绍清等 2000 物理学报 **49** 636]
- [2] Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10(in Chinese) [刘式适等 2002 物理学报 **51** 10]
- [3] Tang J S *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 522(in Chinese) [唐驾时等 2003 物理学报 **52** 522]
- [4] Li Z *et al* 2001 *Chin. Phys.* **10** 494
- [5] Chen S H *et al* 2002 *Chin. Phys.* **11** 233
- [6] Holland R 1994 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **36** 32
- [7] Petropoulos P G 1997 *IEEE Trans. Antennas Propagation* **45** 1054
- [8] Schuster C *et al* 2000 *Microwave Optical Technol. Lett.* **25** 16
- [9] Cox S M *et al* 2002 *Journal of Computational Physics* **176** 430
- [10] McCartin *et al* 2000 Proceedings of the Fourth Conference on Mathematical Modeling in the Undergraduate Curriculum, University of Wisconsin-La Crosse
- [11] McCartin B J 2001 *Journal of Computational and Applied Mathematics* **136** 343
- [12] Pillai A *et al* 2001 *Internat. J. Numer. Methods Fluids* **37** 87
- [13] Zhong W X 1994 *Journal of Dalian University of Technology* **34** 131 (in Chinese) [钟万总 1994 大连理工大学学报 **34** 131]
- [14] Tang C *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1091 (in Chinese) [唐晨等 2003 物理学报 **52** 1091]
- [15] He D H *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 833(in Chinese) [何岱海等 2000 物理学报 **49** 833]

The arbitrary order implicit multistep exponential time differencing method and its application for nonlinear systems *

Tang Chen¹⁾²⁾ Yan Hai-Qing^{1)†} Zhang Hao¹⁾ Liu Ming¹⁾ Zhang Gui-Min¹⁾

¹⁾ (Department of Applied Physics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

²⁾ (State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

(Received 2 August 2003; revised manuscript received 30 October 2003)

Abstract

The arbitrary order implicit exponential time differencing multistep method is proposed for nonlinear systems. We carry out the predictor-corrector method of exponential time differencing. When the method is applied to the nonlinear systems, the effect is admirable. The numerical results show that the accuracy of explicit exponential time differencing multistep method can be enhanced by implicit exponential time differencing multistep method, and the latter is highly accurate and computationally efficient. The exponential time differencing method has been developed and perfected by the present studies.

Keywords: nonlinear systems, the arbitrary order implicit exponential time differencing multistep method, chaos

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19902002), and State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiaotong University (Grant No. VSN-2003-03) and 985 Education Development Plan of Tianjing University.

†E-mail: haiqingyan@yahoo.com.cn; Tel: 022-87894268.