第 37 卷 第 5 期 力 学 学 报 Vol. 37, No. 5
2005 年 9 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Sept., 2005

波 - 流相互作用的缓坡方程及其波作用量守恒 [1)]

黄 虎 [2)]

(上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 当表面波从开阔海域传播至近岸水域时, 普遍的波 - 流相互作用经受着海底的强烈影响. 运用水波 Hamilton 变分原理, 建立了近岸水域任意水深变化海底上波 - 流相互作用的缓坡方程. 它可包含波、流和水深一般变化的二阶效应, 约化为某些典型的缓坡型方程. 据此得出广义程函方程, 并且证明该缓坡方程的波作用量守恒.

关键词 波 - 流相互作用, 缓坡方程, 二阶效应, 波作用量守恒, 程函方程

中图分类号: O353.2 **文献标识码**: A **文章编号**: 0459-1879(2005)05-0627-05

引 言

在近岸水域, 波 - 流相互作用经受着海底的强烈影响, 呈现出复杂、深刻的结构特征和广阔的工程应用背景. 正是通过对波 - 流相互作用的研究, 人们提出了在水波动力学中占据十分重要地位的概念: 波作用量及其守恒定律 [1~3]. 推而广之, 波作用量守恒定律已成为波动力学中最为一般和简要的表达 [4]. 由于所涉及问题的复杂多变性, 人们大都假设环境流场沿垂向均匀分布, 即水平面二维流场. 这种实际三维流场的二维简化, 同环境流场 (例如潮流场) 在近岸区域的时间大尺度变化特征和水平方向上的空间大尺度变化特征是近似吻合的. 对于海底地形的变化, 人们常常设置为水平海底, 即常水深, 或缓变的海底, 仅涉及到水深变化的一阶效应. 堪称经典的 Berkhoff 纯波缓坡方程 [5] 就是据此得到的. 为了解释环境流的效应和近岸区域典型的海底坡度剧烈变化特征 (即陡坡地形), 例如, 波状海底、离岸礁和在河口海岸地区广泛分布的拦门沙, 一批学者先后对缓坡方程进行了扩展 [6~14], 大多可包含水深变化的二阶效应. 目前, 缓坡类方程已成为海岸工程界广泛应用的波浪传播模型, 并在水波动力学的研究中受到普遍的关注 [15~17].

观测和研究表明 [2,18]: 海底坡度的稍许变化, 将导致波浪传播特征的显著改变, 尤其是当波浪传播较长的一段距离以后. 这样就使得那些依据特定地形尺度量级变化 (即水深的变化不是任意的) 而扩展的缓坡方程, 并不能完全预测波浪在一般的海底地形上传播所产生的超谐波和亚谐波的波峰大小 [9,19]. 换言之, 如果把海底坡度的起伏变化也看成是一种波动, 即海底波, 则目前所得到的模型只是对海底波变化的某些频率有所反映. 这种频率变化是特定的、局部的和间断的, 并非是连续的, 从而限制了模型对波浪传播特性的全面刻画和认识. 另外, 即使为常水深海底, 波长将直接相关于波幅的变化. 至今, 相对于缓坡类方程, 并不存在能够同时描述波、流和任意水深变化海底相互作用的工作, 其显著的综合二阶效应得不到充分的体现. 这将在相当程度上制约下一步对泥沙输运机理更为精细的考察和分析. 直接影响对岸滩冲淤演变的宏观预测和控制. 基于此, 本文运用水波运动的 Hamilton 变分原理, 建立波浪传播的缓坡方程, 以此为最终能较为精确地解释和刻画波浪在近岸复杂环境条件下传播的完整过程提供某种有效的动力模式.

1 新缓坡方程

不可压缩、无黏和无旋的流体假定一般可以足够

2003-09-01 收到第 1 稿, 2005-05-13 收到修改稿

1) 全国优秀博士学位论文作者专项资金 (200428)、国家自然科学基金 (10272072, 50424913)、上海市重点学科建设项目 (Y0103) 和中国科学院力学研究所 LNM 国家重点实验室开放课题基金资助项目.

2) E-mail: hhuang@staff.shu.edu.cn

精确地描述水波运动. 考虑直角坐标系 (x,y,z)，原点位于无扰动的自由水表面上, 垂直坐标 z 竖直向上为正. 以 $\Phi(x,y,z,t)$ 表示速度势函数， $z=-h(x,y)$ 代表任意海底地形变化的水深. 变分原理可以富有成效地建立水波近似演化方程, 我们在这里采用以自由表面位移 $z=\zeta(x,y,t)$ 和在自由表面处的速度势值 $\varphi(x,y,t)=\Phi\{x,y,\zeta(x,y,t),t\}$ 表征的 Hamilton 变分原理 [20], 即为

$$\delta H_E \equiv \delta \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y H = \delta \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big\{ \frac{1}{2}\rho g \varsigma^2 + \frac{1}{2}\rho \int_{-h(x,y)}^{\zeta(x,y,t)} \mathrm{d}z \Big[(\nabla\Phi)^2 + \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big)^2 \Big] \Big\} = 0 \tag{1}$$

其中， H_E 和 H 分别表示流体运动的总能量及其密度, ρ 是流体密度, δ 表示变分导数, $\nabla = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\Big)$. 由式 (1) 可得 Hamilton 正则方程

$$\rho\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\delta H_E}{\delta \varphi}, \quad \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H_E}{\delta \zeta} \tag{2}$$

由线性水波理论, 可将势函数 Φ 和自由表面位移 ζ 分别表示为

$$\left.\begin{aligned} &\zeta(x,y,t) = \zeta_0(x,y,t) + \varepsilon\zeta_1(x,y,t) \\ &\Phi(x,y,z,t) = \phi_0(x,y,t) + \varepsilon f(z,h)\phi_1(x,y,t) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 $f(z,h) = \dfrac{\cosh k(z+h)}{\cosh k(h+\zeta_0)}$, ε 是表示波浪非线性传播特征的小参数. 在这里 ζ_0 和 ϕ_0 分别是环境流场引起的表面高度和环境流速度势， $\boldsymbol{U} = \nabla\phi_0$. 我们可采用下面的近似关系式 [21]

$$\omega_r^2 = gk\tanh k(h+\zeta_0) \tag{4}$$

绝对频率 ω 和相对频率 ω_r 的关系为

$$\omega = \omega_r + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U} \tag{5}$$

由式 (3) 求得

$$\left.\begin{aligned} &H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 \\ &H_E = H_{E0} + \varepsilon H_{E1} + \varepsilon^2 H_{E2} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2}\rho g(\zeta_0+\varepsilon\zeta_1)^2 + \frac{1}{2}\rho\int_{-h}^{\zeta}\Big[\nabla\phi_0\cdot\nabla\phi_0 + \\ & 2\varepsilon f\nabla\phi_0\cdot\nabla\phi_1 + \varepsilon^2 f^2(\nabla\phi_1)^2\Big]\mathrm{d}z + \\ & \varepsilon\rho\phi_1\nabla\phi_0\cdot\Big(\int_{-h}^{\zeta_0}\nabla f\mathrm{d}z + \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+\varepsilon\zeta_1}\nabla f\mathrm{d}z\Big) + \\ & \frac{1}{2}\varepsilon^2\rho\Big\{\phi_1^2\int_{-h}^{\zeta_0}\Big[(\nabla f)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2\Big]\mathrm{d}z + \\ & 2\phi_1\nabla\phi_1\cdot\int_{-h}^{\zeta_0} f\nabla f\mathrm{d}z\Big\} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} H_2 = {} & \frac{1}{2}\rho\Big\{g\zeta_1^2 + 2\zeta_1\nabla\phi_0\cdot\nabla\phi_1 + \\ & 2\phi_1\zeta_1\nabla\phi_0\cdot(\nabla f)_{z=\zeta_0} + (\nabla\phi_1)^2\int_{-h}^{\zeta_0} f^2\mathrm{d}z + \\ & \phi_1^2\int_{-h}^{\zeta_0}\Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2 + (\nabla f)^2\Big]\mathrm{d}z + \\ & 2\phi_1\nabla\phi_1\cdot\int_{-h}^{\zeta_0} f\nabla f\mathrm{d}z\Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

由正则方程 (2), 得到 [20]

$$\rho\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\delta H_{E2}}{\delta \phi_1}, \quad \rho\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -\frac{\delta H_{E2}}{\delta \zeta_1} \tag{9}$$

注意： $f(\zeta,h) = 1 + O(\varepsilon k\zeta_1)$. 将式 (8) 代入式 (9), 可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = {} & \phi_1\int_{-h}^{\zeta_0}\Big[(\nabla f)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)^2\Big]\mathrm{d}z + \\ & \zeta_1\nabla\phi_0\cdot(\nabla f)_{z=\zeta_0} + \nabla\phi_1\cdot\int_{-h}^{\zeta_0} f\nabla f\mathrm{d}z - \\ & \nabla\cdot\Big(\zeta_1\nabla\phi_0 + \nabla\phi_1\int_{-h}^{\zeta_0} f^2\mathrm{d}z + \\ & \phi_1\int_{-h}^{\zeta_0} f\nabla f\mathrm{d}z\Big) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = {} & -g\zeta_1 - \nabla\phi_0\cdot\nabla\phi_1 - \phi_1\nabla\phi_0\cdot(\nabla f)_{z=\zeta_0} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

由式 (10) 中的两个方程消去 ζ_1，最终得到在近岸水域任意水深变化海底上波 - 流相互作用的、且相关于时间的新缓坡方程

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{D}^2\phi_1}{\mathrm{D}t^2} + (\nabla\cdot\boldsymbol{U})\frac{\mathrm{D}\phi_1}{\mathrm{D}t} - \nabla\cdot[CC_g\nabla\phi_1] + \\ & [\omega_r^2 - k^2CC_g]\phi_1 - \phi_1\Big(gM + \frac{1}{g}N\Big) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla$, $C(x,y) = \dfrac{\omega_r}{k}$ 和 $C_g(x,y) = \dfrac{\partial\omega_r}{\partial k}$ 分别表示波浪传播的相速度和群速度， M 表

征波 - 流相互作用的多重效应，是波 (k)、流 ($\zeta_0, \boldsymbol{U}$)、海底 (h) 二阶变化效应的集中体现，而 N 则代表环境流整体作用场. 它们可分别表示为

$$M = \alpha_1 \nabla^2 h + \alpha_2 \frac{\nabla^2 k}{k^2} + \alpha_3 \nabla^2 \zeta_0 + \alpha_4 k(\nabla h \cdot \nabla h) + \alpha_5 \frac{\nabla k \cdot \nabla k}{k^3} + \alpha_6 k(\nabla \zeta_0 \cdot \nabla \zeta_0) + \alpha_7 \frac{\nabla h \cdot \nabla k}{k} + \alpha_8 \frac{\nabla k \cdot \nabla \zeta_0}{k} + \alpha_9 k(\nabla h \cdot \nabla \zeta_0) \tag{12}$$

$$N = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\omega_r^2 \nabla \zeta_0 \cdot \boldsymbol{U}) + \left(\frac{1}{g}\omega_r^2 \nabla \zeta_0 \cdot \boldsymbol{U} + \nabla \cdot \boldsymbol{U}\right)(\omega_r^2 \nabla \zeta_0 \cdot \boldsymbol{U}) \tag{13}$$

其中，各无量纲参数 $\alpha_i (i = 1, \cdots, 9)$ 的详细表达式 (设：$q = k(h + \zeta_0)$, $\sigma = \tanh q$) 为

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\sigma q(1 - \sigma^2)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4}\sigma - \frac{1}{4}q(1 - \sigma^2)(1 - 2q\sigma)$$

$$\alpha_3 = \sigma(\sigma^2 - 1)\left(\frac{1}{4}\sinh 2q + \frac{1}{2}q\right)$$

$$\alpha_4 = -\sigma(1 - \sigma^2)(1 - q\sigma)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{4}\sigma + \frac{1}{4}q(1 - \sigma^2)\left(4\sigma^2 q^2 - \frac{4}{3}q^2 - 2q\sigma - 1\right)$$

$$\alpha_6 = (1 - \sigma^2)\left[\frac{1}{2}\sigma^2(\sinh 2q + 2q) - \frac{3}{4}\sinh 2q - \frac{1}{2}q\right]$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{2}q(1 - \sigma^2)(4q\sigma^2 - 5\sigma - q)$$

$$\alpha_8 = (1 - \sigma^2)\left\{\frac{1}{4}\sigma \sinh 2q + q\left[\left(\frac{5}{4}\sigma^2 - \frac{1}{4}\right)\sinh 2q - \sigma \cosh 2q - 2\sigma\right] + q^2(4\sigma^2 - 1)\right\}$$

$$\alpha_9 = (1 - \sigma^2)\left[\frac{1}{4}(3\sigma^2 - 1)(\sinh 2q + 2q) + \frac{1}{2}q(\sigma^2 - 1) - \frac{1}{2}\sigma(1 + 2\cosh^2 q)\right]$$

缓坡方程 (11) 包含了以下具有广泛代表性的缓坡型方程：经典的纯波 Berkhoff 缓坡方程 [5]；著名的 Kirby 波 - 流相互作用缓坡方程 [6]；忽略环境流场作用但涉及波数变化效应的均匀缓坡方程 [9]，它本身又包含两种扩展的缓坡方程 [7,8]. Athanassoulis 和 Belibassakis[10] 在不考虑波 - 流相互作用和波数变化的条件下，通过添加一种能考虑海底坡度变化的模式，提出一种基于缓坡型方程的线性耦合理论. 最近，Huang[22] 着眼于对波浪非线性传播特性的刻画，直接从波浪控制方程组出发，运用 Green 第二恒等式建立了一种非线性纯波缓坡方程理论. 显见，上述各类缓坡型方程均没有包揽波 - 流相互作用的整体效应，尤其是环境流场作用而引起波数变化的任意性，而缓坡方程 (11) 在线性波理论框架下，则是对这种整体效应的简洁处理和全面、统一表述.

2　广义程函方程

现在考虑波列在波要素 (波幅、波长和波频率) 缓慢变化条件下的传播特征，以期和著名的几何 - 光学近似建立联系. 为此，假定波传播的函数为

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 &= \mathrm{Re}\{b(x, y, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(x,y,t)}\} \\ \chi(x, y, t) &= S(x, y) - \omega t \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中振幅 b 和位相 S 均为实函数. 据此可分别定义有效波数和有效频率

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv \nabla \chi = \nabla S, \quad \Omega_r \equiv -\frac{\mathrm{D}\chi}{\mathrm{D}t} = \omega - \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{U} \tag{15}$$

则得到关于连续缓坡方程 (11) 的 Doppler 频移关系式

$$\omega = \Omega_r + \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{U} \tag{16}$$

将式 (14) 代入式 (11)，取其实部，可得广义程函方程

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}^2 = k^2 &+ \frac{\nabla(CC_g)}{CC_g} \cdot \frac{\nabla b}{b} + \frac{\nabla^2 b}{b} + \frac{1}{CC_g}\Big\{ -\omega_r^2 + \Omega_r^2 + gM + \frac{1}{g}N - \\ &\frac{1}{b}\nabla \cdot [(\boldsymbol{U} \cdot \nabla b)\boldsymbol{U}] - \frac{1}{b}\Big[\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \cdot \nabla b + \boldsymbol{U} \cdot \nabla\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{U}\frac{\partial b}{\partial t}\right)\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{17}$$

如果只保留方程 (17) 右端第 1 项，即为经典的程函方程，它受制于波浪传播介质的多重假定. Zhang 和 Edge[9]、Dingemans[23] 分别在任意变化海底而不考虑环境流场作用、缓变海底且包含环境流场作用的条件下得到了相应的程函方程. 显然，在方程 (17) 的右端，如果 M, N 项的大小同其余项可以比较的话，则 M、N 项将直接影响对波浪位相变化预测的精度. 在这里须注意色散关系式 (5) 和式 (16) 的重要区别：在给定环境流场 $\boldsymbol{U}(x, y, t)$ 和海底变化水深 $h(x, y)$ 的条件下，可事先确定 k 和 ω_r；而 $\boldsymbol{\kappa}$ 和 Ω_r 的确定，必须要求解广义程函方程 (17).

3 波作用量守恒

时至今日，波作用量、广义波作用量 [4] 一直作为处理波 - 流相互作用问题的最重要概念，而其守恒定律较之于通常的能量、动量守恒定律，更能揭示波 - 流相互作用问题中的不变量且便于操作和应用. 现在证明连续缓坡方程 (11) 满足波作用量守恒定律. 为此，同样将式 (14) 代入式 (11), 但取其虚部，并考虑到式 (16), 可得

$$b\frac{\partial \Omega_r}{\partial t}+2\Omega_r\frac{\partial b}{\partial t}+2\Omega_r\boldsymbol{U}\cdot\nabla b+b\nabla\cdot(\Omega_r\boldsymbol{U})+ b\nabla\cdot(\boldsymbol{\kappa}CC_g)+2CC_g\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla b=0 \tag{18}$$

将式 (18) 乘以 b, 得到

$$\frac{\partial(b^2\Omega_r)}{\partial t}+\Omega_r\boldsymbol{U}\cdot\nabla(b^2)+b^2\nabla\cdot(\Omega_r\boldsymbol{U})+ b^2\nabla\cdot(\boldsymbol{\kappa}CC_g)+CC_g\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla b^2=0 \tag{19}$$

定义波作用量 A 为波能密度 E 与波的有效频率 Ω_r 之比值，即

$$A=\frac{E}{\Omega_r},\quad E=\frac{1}{2}\rho g a^2 \tag{20}$$

其中， a 为自由表面位移的振幅，它与速度势振幅 b 的关系为

$$b^2=\frac{g^2}{\Omega_r^2}a^2=2\frac{g}{\rho}\frac{E}{\Omega_r^2} \tag{21}$$

定义有效波群速度 $V_g=\frac{\omega_r}{\Omega_r}C_g$, 并引进一个新的波群速度 $\boldsymbol{V}_g=V_g\frac{\boldsymbol{\kappa}}{k}$, 则由式 (20) 和式 (21) 可将式 (19) 化为波作用量守恒方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\cdot[(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}_g)A]=0 \tag{22}$$

它简洁地表明：波作用量的局部变化率可由波作用量通量的会聚来平衡. 相对于能量平衡方程，方程 (22) 具有更为基本的意义，只要适当地定义波作用量及其通量，波作用量守恒定律同样适用于非线性水波系统.

4 结 论

本文注意到近岸波 - 流相互作用的当前研究现状和缓坡型方程 20 年以来不断发展的趋向，通过引进二维缓变流这一有效假定和合理描述近岸海底地形的实际变化特征，由 Hamilton 变分原理推导出新缓坡方程 (11). 这就为将来能较为充分地说明近岸波 - 流相互作用的复杂动力机制提供了一条切实可行的研究途径，同时在一定意义上也是对缓坡型方程理论已有成果的完善. 如果欲要考虑近岸波 - 流相互作用的耗散效应，则由此得到的广义缓坡方程，将充分满足广义波作用量守恒方程 [4]，前者就成为后者的一个具体实践和有效论证.

参 考 文 献

1 Peregrine DH. Interaction of water waves and currents. *Adv Appl Mech*, 1976, 16: 9～117

2 Thomas GP, Klopman G. Wave-current interaction in the near shore region. In: Hunt JN, ed. Gravity Waves in Water of Finite Depth. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1997. 255～319

3 王涛, 李家春. 波作用量守恒原理在波 - 流相互作用中的应用. 力学学报, 1996, 28(3): 282～290 (Wang Tao, Li Jiachun. Application of conservation law of wave action flux to wave-current interaction. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(3): 282～290 (in Chinese))

4 黄虎. 近岸非平整海底上耗散动力系统的广义波作用量守恒方程. 力学学报, 2003, 35(4): 461～464 (Huang Hu. A generalized wave action conservative equation for the dissipative dynamical system over uneven bottoms in the nearshore region. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(4): 461～464 (in Chinese))

5 Berkhoff JCW. Computation of combined refraction-diffraction. In: Proc 13nd Int Conf on Coastal Engng. New York: ASCE, 1972. 471～490

6 Kirby JT. A note on linear surface wave-current interaction. *J Geophys Res*, 1984, 89 (C1): 745～747

7 Massel SR. Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Engineering*, 1993, 19: 97～126

8 Chamberlain PG, Porter D. The modified mild-slope equation. *J Fluid Mech*, 1995, 291: 393～412

9 Zhang LB, Edge BL. A uniform mild-slope model for waves over varying bottom. In: Proc 25th Int Conf on Coastal Engng. New York: ASCE, 1996. 941～954

10 Athanassoulis GA, Belibassakis KA. A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J Fluid Mech*, 1999, 389: 275～301

11 张永刚, 李玉成, 滕斌. 一个新的非恒定型不规则波缓坡方程. 海洋工程, 1996, 14(4): 30～37 (Zhang Yonggang, Li Yucheng, Teng Bin. A new form of time-dependent mild slope equation for random waves. *Ocean Engineering*, 1996, 14(4): 30～37 (in Chinese))

12 潘军宁, 洪广文, 左其华. 一种推广的缓坡方程. 海洋工程, 2001, 19(1): 24～31 (Pan Junning, Hong Guangwen, Zuo Qihua. An extended mild-slope equation. *Ocean Engineering*, 2001, 19(1): 24～31(in Chinese))

13 黄虎, 丁平兴, 吕秀红. 三维缓变流场上波浪折射 - 绕射的缓坡方程. 力学学报, 2001, 33(1): 11～18 (Huang Hu, Ding Pingxing, Lü Xiuhong. The mild-slope equation for refraction-diffraction of surface waves on three dimensional slowly

varying currents. Acta Mechanica Sinica, 2001, 33(1): 11~18 (in Chinese))

14 Kim JW, Bai KJ. A new complementary mild-slope equation. J Fluid Mech, 2004, 511: 25~40

15 李孟国, 蒋德才. 关于波浪缓坡方程的研究. 海洋通报, 1999, 18(4): 70~91 (Li Mengguo, Jiang Decai. A study on the mild-slope equations for water waves. Marine Science Bulletin, 1999, 18(4): 70~91(in Chinese))

16 Isobe M. Equation for numerical modeling of wave transformation in shallow water. In: Herbich JB, ed. Developments in Offshore Engineering. Houston: Gulf Publishing Company, 1999. 101~162

17 锁要红, 黄虎. 任意水深多孔介质海底上的线性波 - 流相互作用. 自然科学进展, 2004, 14(7): 815~818 (Suo Yaohong, Huang Hu. Linear wave-current interactions in water of arbitrary depth over porous medium bottoms. Progress in Natural Science, 2004, 14(7): 815~818(in Chinese))

18 Komen GJ, Cavaleri L, Donelan M, et al. Dynamics and Modelling of Ocean Waves. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 343~359

19 O'Hare TJ, Davies AG. A comparison of two models for surface—wave propagation over rapidly varying topography. Appl Ocean Res, 1993, 15: 1~11

20 Zakharov VE. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. J Appl Mech Tech Phys, 1968, 9: 86~94

21 Radder AC, Dingemans MW. Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves. Wave Motion, 1985, 7: 473~485

22 Huang Hu. Alternative model for nonlinear water waves over arbitrary depth. Journal of Hydrodynamics, Ser. B, 2003, 15(2): 95~100

23 Dingemans MW. Water Wave Propagation over Uneven Bottom. Singapore: World Scientific, 1997. 270~285

A MILD-SLOPE EQUATION AND ITS WAVE ACTION CONSERVATION FOR WAVE-CURRENT INTERACTIONS [1)]

Huang Hu[2)]

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

(*LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract When surface waves propagate from the open sea to the coastal waters, the ubiquitous wave-current interactions are affected strongly by bottom topography. Using Hamiltonian variational principle for water waves, a mild-slope equation for wave-current interactions over arbitrary depth in the near shore region is developed, including the second-order effects arising from a general changes of waves, currents and depths, reducing to some typical mild-slope type equations and leading to a generalized eikonal equation. It is shown that the wave action conservation holds for the mild-slope equation.

Key words wave-current interactions, mild-slope equation, second-order effects, wave action conservation, the eikonal equation

Received 1 September 2003, revised 13 May 2005.

1) The project supported by the Foundation for the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of China (200428), the National Natural Science Foundation of China (10272072,50424913), the shanghai leading Academic Discipline project (Y0103) and the Open Foundation of the State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics (LNM), Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences.

2) E-mail: hhuang@staff.shu.edu.cn