

[文章编号] 1001-246X(2003)03-0219-07

# 利用 Ghost Fluid 方法模拟激波与柱形界面相互作用

程军波<sup>1</sup>, 唐维军<sup>1</sup>, 李德元<sup>1</sup>, 傅德薰<sup>2</sup>

(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 计算物理实验室, 北京 100088; 2. LNM, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**[摘要]** 利用 Ghost Fluid 方法(后面简称 Ghost 方法)和  $\phi$ -model 方法, 在同样的时空离散精度条件下, 对激波与柱形界面相互作用的二维可压缩流场进行了直接模拟, 并与实验结果相比较. 从模拟结果看, 在短时间内, Ghost 方法和  $\phi$ -model 方法模拟的结果与实验结果基本相同, 两种方法均正确地模拟出界面的位置、激波的强度和速度. 但随着时间的发展, 具有较大数值耗散的  $\phi$ -model 方法的计算结果与实验差别越来越大; 而数值耗散较小的 Ghost 方法能较为正确地模拟界面的运动.

**[关键词]** Level Set 方法; Ghost Fluid 方法;  $\phi$ -model 方法; R-M 失稳

**[中图分类号]** O35 **[文献标识码]** A

## 0 引言

针对激波的捕捉, 有很多行之有效的格式, 如 TVD, ENO, WENO<sup>[1,2]</sup> 以及带群速度控制的紧致差分格式<sup>[3,4]</sup> 等. 但对于接触间断的模拟, 即使在这些格式的基础上加上人工压缩法或亚网格子法, 由于始终存在数值耗散而导致接触间断被抹平. 而且, 如果接触间断两边是两种不同的流体, 用 Euler 方法进行数值模拟时往往需要进行特别的处理. Ghost 方法的出现能较好地解决这个问题.

Ghost 方法是 Fedkiw<sup>[5]</sup> 在 Level Set 方法<sup>[6]</sup> 的基础上引入的. Level Set 方法的主要思想是利用 Level Set 函数的零等值面来表示两种流体的分界面, 界面周围其他点的 Level Set 函数值为该点到界面的有符号的垂直距离, 不同符号的 Level Set 函数表示不同的流体. Ghost 方法的主要思想是利用 Level Set 函数将含有两种流体的流场分成各含有一种流体的两个流场, 每个流场由真实流场和虚拟流场(Ghost Fluid)组成, 每个流场可单独进行计算. 这样可成功地避开界面两边流体状态方程不同的问题, 这是 Ghost 方法的最大优点.

Ghost 方法的关键是构造虚拟流场的物理量. 由

于界面之间存在接触间断, 二者的压力和法向速度相等, 而切向速度和密度不等, 为维持接触间断的性质, 虚拟流场的压力和法向速度为该点真实的压力和法向速度, 而切向速度和密度则最好是由界面另一边的真实流场延拓过来. 这样处理使得构造的流场既保留了界面的基本特征(压力和法向速度), 又保证了界面处各种物理量的连续, 这使得高精度捕捉界面成为可能.

将物理量由真实流场延拓到虚拟流场的延拓公式为

$$I_i \pm n \cdot I = 0, \quad (1)$$

$I$  表示需延拓的物理量;  $n$  表示单位法向矢量,  $n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ ;  $\pm$  为延拓的方向,  $+$  表示从  $\phi < 0$  的流体延拓到  $\phi > 0$  的流体, 而  $-$  正好相反.

为了使 Level Set 函数始终为有符号的距离函数, 必须在每个时间步后对其进行重新初始化, 使其满足方程

$$|\nabla \phi| = 1. \quad (2)$$

方程(2)的边值问题有两种求解方法, 其一是简单、计算时间长的迭代方法<sup>[7]</sup>; 其二是复杂、计算时间短的 Fast Marching Method<sup>[8]</sup>. 后来, Susan, et al<sup>[9]</sup> 将边值

[收稿日期] 2002-04-15; [修回日期] 2002-11-25

[基金项目] 国家自然科学基金重大项目(19932010), 国家自然科学基金重点项目(10135010), 国家自然科学基金(10072028), 惯性约束聚变青年科学基金(青 2002-02)及计算物理实验室试点基金资助项目

[作者简介] 程军波(1972-), 湖北天门, 博士后, 从事计算流体力学方面的研究.

问题转化为初值问题,即计算如下方程

$$\rho_t + \text{sign}(\rho_0)(|\rho| - 1) = 0, \quad (3)$$

$$\rho_0 = \rho(x, y, t = 0)$$

的稳态解,该方法简单且计算时间较少.另外,陈耀松等<sup>[10]</sup>、袁德奎等<sup>[11]</sup>在计算自由面时,采用双调和方程对函数进行重新初始化,也取得了较好的结果.本文选用 Susan, et al<sup>[9]</sup>的方法来进行函数的重新初始化.

关于界面追踪技术和 Ghost 方法,国内也有人对此进行过研究,如赵宁等<sup>[12]</sup>对界面追踪技术进行了研究,并以此来模拟 R-M 不稳定性问题,唐维军等<sup>[13,14]</sup>用 Ghost 方法研究了三维流体界面的 R-T 失稳问题,叶文华等<sup>[15]</sup>采用界面追踪技术对 R-T 失稳和 R-M 失稳进行了数值模拟,他们均取得了较好的结果.但 Ghost 方法有一个缺点,即其为非守恒算法. Gimm, et al<sup>[16]</sup>提出了针对守恒的一维 Ghost 方法,但该方法无法推广到二维和三维.

下面介绍 Shyue 提出的  $\rho$ -model 方法<sup>[17]</sup>. 针对流场中具有不同比热比的两种气体, Shyue 推导出关于比热比的方程,该方程与守恒的欧拉方程组构成一个非守恒的方程组. 对该方程组的求解采用 LeVeque 提出的 Wave-Propagation<sup>[18]</sup>方法,该方法能保证守恒的欧拉方程组的矢量积分是守恒的.

本文将利用以上两种方法对激波加速柱形界面问题进行直接数值模拟,并将两者的结果与实验结果(Hass & Sturtevant<sup>[19]</sup>)相比较,以了解非守恒 Ghost 方法对界面的捕捉能力.

### 1 数值方法

流场的示意图如图1,在  $x - y$  二维平面坐标系上放置两种不同的流体 1 与 2,其分界面为直径在  $x$  轴上的圆,圆外是流体1,圆内是流体2. Mach数为

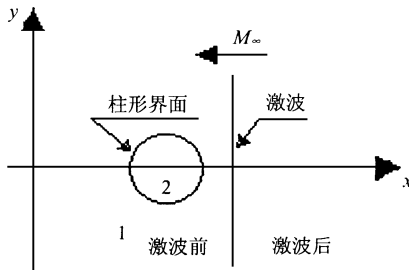


图 1 初始时刻的流场示意图 (圆表示界面,直线表示平面激波)

Fig. 1 Sketch figure of flow field at the beginning time where Circle shows interface ,line shows planar shock waves ,1 shows fluids out of interface and 2 shows in

$M$  的平面激波垂直于  $x$  轴,自右向左运动.

在计算过程中,假设流体为理想的完全气体,不考虑粘性和热传导的影响.对 Ghost 方法,需要计算的方程组为守恒的流体力学欧拉方程组和 Level Set 函数的运动方程

$$\rho_t + u \cdot \rho_x = 0. \quad (4)$$

而  $\rho$ -model 方法的方程组为

$$\begin{cases} \rho_t + (u \rho)_x + (v \rho)_y = 0, \\ (u \rho)_t + (u^2 + p)_x + (uv)_y = 0, \\ (v \rho)_t + (uv)_x + (v^2 + p)_y = 0, \\ (E \rho)_t + [u(E + p)]_x + [v(E + p)]_y = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho - 1} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho - 1} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho - 1} \right) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

为密度,  $p$  为压力,  $u, v$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的速度,  $\gamma$  为比热比,  $E$  为单位体积总能量,  $E = e + (u^2 + v^2)/2$ , 状态方程  $p = e(\gamma - 1)$ . 方程组(5)可写为

$$q_t + Aq_x + Bq_y = \mathbf{0}, \quad q = \left[ \rho, u, v, E, \frac{1}{\rho - 1} \right]^T,$$

$A$  和  $B$  为相应的 Jacobi 矩阵,可通过方程组(5)求出.对该非守恒形式的方程组,本文采用 Wave-Propagation<sup>[18]</sup>方法进行离散,其一阶精度的离散形式为

$$q_{i,j}^{n+1} = q_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^5 [(\hat{\lambda}_{xk}^- w_{xk})_{i+1,j}^n + (\hat{\lambda}_{xk}^+ w_{xk})_{i,j}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \sum_{k=1}^5 [(\hat{\lambda}_{yk}^- w_{yk})_{i,j+1}^n + (\hat{\lambda}_{yk}^+ w_{yk})_{i,j}^n], \quad (6)$$

方程(6)中,  $\hat{\lambda}$ 表示求解 Riemann 问题所得到的解(下同);  $\lambda_x$ 表示矩阵  $A$  的特征值,  $\lambda_x^+ = \max(\lambda_x, 0)$ ,  $\lambda_x^- = \min(\lambda_x, 0)$ ;  $w_{xk} = \lambda_{xk}^k r^k$ ,  $r^k$ 为矩阵  $A$  的右特征矢量,  $\lambda^k = \lambda^k q^k$ ,  $q^k$ 表示矩阵  $A$  的左特征矢量.  $\lambda_y$ 和  $w_{yk}$ 是针对矩阵  $B$  的,其表达式与  $\lambda_x$ 和  $w_{xk}$ 的表达式类似.二阶精度的离散形式较为复杂,具体细节参见文[18].本文采用二阶精度的格式进行时间和空间方向的离散.

为便于与  $\rho$ -model 方法的计算结果进行比较. Ghost 方程组的离散精度也为二阶,时间方向采用具有 TVD 性质的二阶 Runge-Kuta 法离散,空间方向采用二阶 ENO 格式离散.而对延拓方程(1),时间方向和空间方向均采用一阶迎风格式离散.

## 2 计算结果

为与 Quirk 等人的计算结果<sup>[20]</sup>和 Hass 等人的实验结果相比较,本文采用如下数据:计算区域左下角的坐标为 (0 mm, -44.5 mm), 右上角的坐标为 (250 mm, 44.5 mm); 柱形界面圆直径为 50 mm, 圆心坐标为 (175 mm, 0 mm); 柱形界面内为 R22, 其比热比  $\gamma_{R22} = 1.249$ , 密度为  $3.145 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ; 界面外是空气, 其比热比  $\gamma_{\text{air}} = 1.4$ ; 波前空气密度为  $1.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ; 激波位置  $x = 225 \text{ mm}$ ; 激波马赫数为 1.22.

流场的上下壁面为固壁, 左右边界为开口. 因此, 计算区域的上下边界采用标准的反射边界条件, 而左右边界采用零阶插值的无反射边界条件.

计算前先对相关数据进行无量纲化, 长度的无量纲化标准为柱形界面的直径; 密度的无量纲化标准为柱形界面外波前空气的密度; 压力的无量纲化标准为波前空气的压力, 即一个大气压. 根据压力的无量纲化标准和密度的无量纲化标准可推出速度的无量纲化标准, 进而推出时间的无量纲化标准.

我们进行了两种空间步长 (0.5 mm 和 1 mm) 下的计算, 两者结果基本相同. 这里只给出空间步长为

0.5 mm 的计算结果.

### 2.1 定性比较

用 Ghost 方法计算出来的图形与实验图形及用  $\gamma$ -model<sup>[15]</sup>方法模拟出来的图形进行定性比较. 另外, 为叙述方便, 本节将无量纲时间转换成有量纲时间. 从图 2 到图 10 的所有图形, 括号内所显示的均为有量纲时间.

图 2(a), 3(a), 4(a) 和 5(a) 均为 Ghost 方法模拟出来的密度等值线图; 图 2(b), 3(b), 4(b) 和 5(b) 为  $\gamma$ -model 的方法模拟出来的密度等值线图; 图 6 为不同时刻的实验阴影图, 带支架的圆圈表示初始时刻界面的位置.

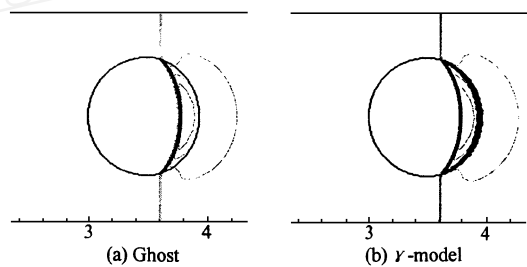


图 2 密度等值线图 (55 $\mu$ s)

Fig. 2 Density contours (55 $\mu$ s)

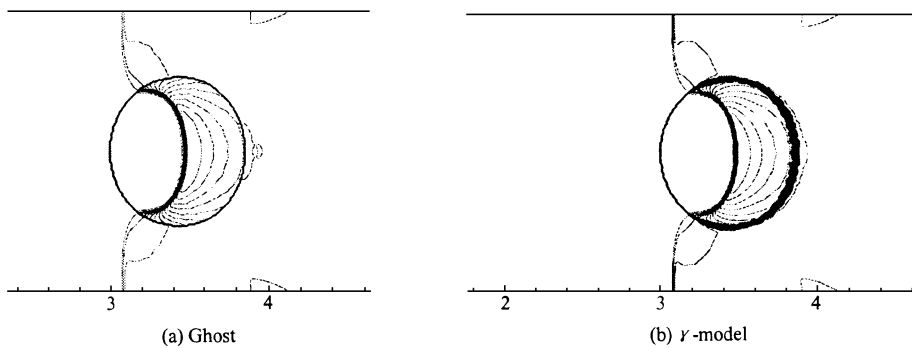


图 3 密度等值线图 (115 $\mu$ s)

Fig. 3 Density contours (115 $\mu$ s)

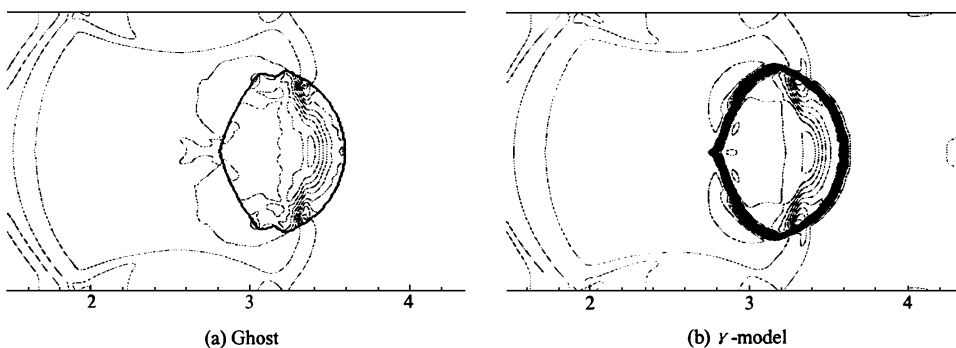
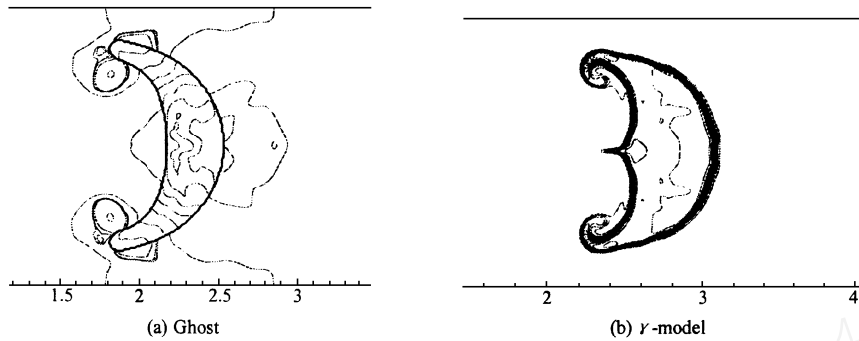
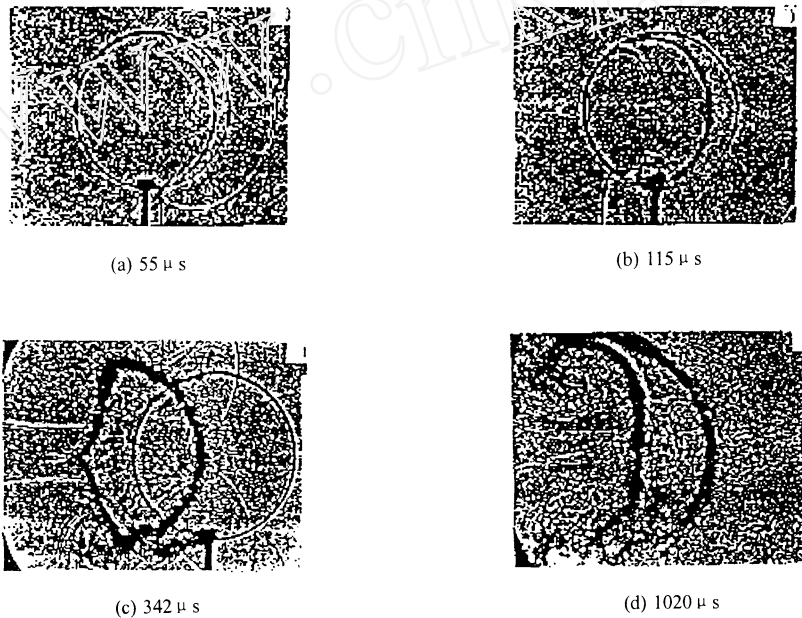


图 4 密度等值线图 (342 $\mu$ s)

Fig. 4 Density contours (342 $\mu$ s)

图 5 密度等值线图(1020 $\mu$ s)Fig. 5 Density contours(1020 $\mu$ s)图 6 实验图像<sup>[19]</sup>Fig. 6 Experimental graph<sup>[19]</sup>

将两种方法的模拟结果与实验阴影图比较可以发现,在短时间内(时间少于 342  $\mu$ s),两种方法模拟出来的界面变形与实验图形基本相符合.图中均显示出:当平面激波与柱形界面相互作用时,产生了弯曲的折射波和反射波(图 2),在激波扫过后界面被压扁(图 3),并在随后的发展过程中,右边界面基本保持原来的形状,而左边界面则由光滑曲面变成一个楔形(图 4).

但当计算时间达到 1 020  $\mu$ s 时,两种方法计算出来的界面形状出现很大的差别(图 5). Ghost 方法模拟出来的左边界面是光滑的,而  $r$ -model 方法模拟出来的左边界面还带有尖突.从与实验图形 6(d) 的比较来看, Ghost 方法的计算结果更接近实验.

上面只是图形的大致比较,下面将对计算结果进行较细致的分析.首先分析的是界面附近的压力.

当界面两边是具有不同比热比的理想气体,如采用普通的差分方法模拟,会导致界面附近的压力出现非物理振荡.但从图 7 的中心轴线处( $y=0$  的直线)的压力分布图来看,两种方法计算出来的界面附近压力变化平稳,没有振荡.这说明两种方法都能较好地解决这个问题.

再来比较这两种方法对界面的捕捉能力.对于未受激波扰动的界面,两者均捕捉得很好,从图 2、图 3 的左边界面以及图 7 的密度分布图上的下游界面(用 'downstream interface' 表示)可以看出.但对于受扰动的界面,两者就有很大的差别.图 7 中, Ghost 方法计算出来的上游界面(用 'upstream interface' 表示)在一个网格内,而  $r$ -model 方法计算出来的上游界面宽度为 5~6 个网格,这点图 8 中也可看出.这说明 Ghost 方法能较好地消除模拟界面时的数值耗

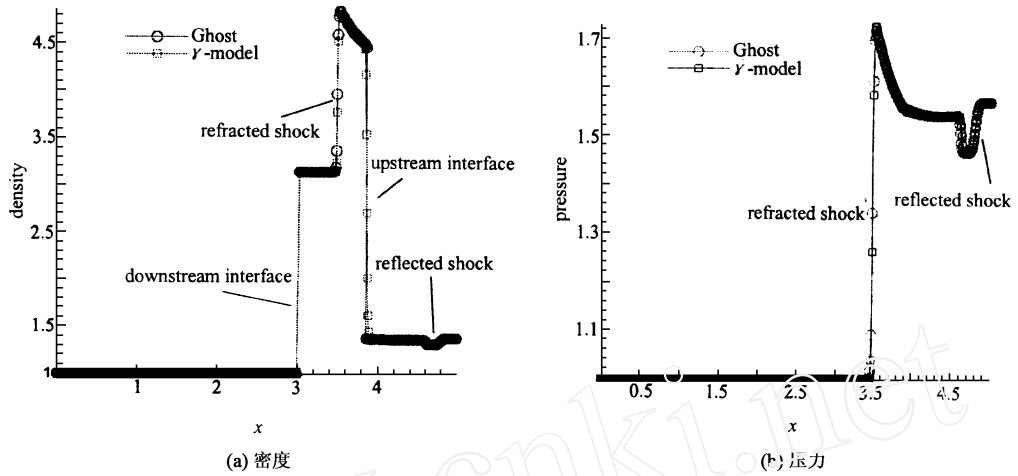


图 7 中心轴线处的密度分布和压力分布 (115 μs)

Fig. 7 Density distribution and pressure distribution on the symmetrical line (115 μs)

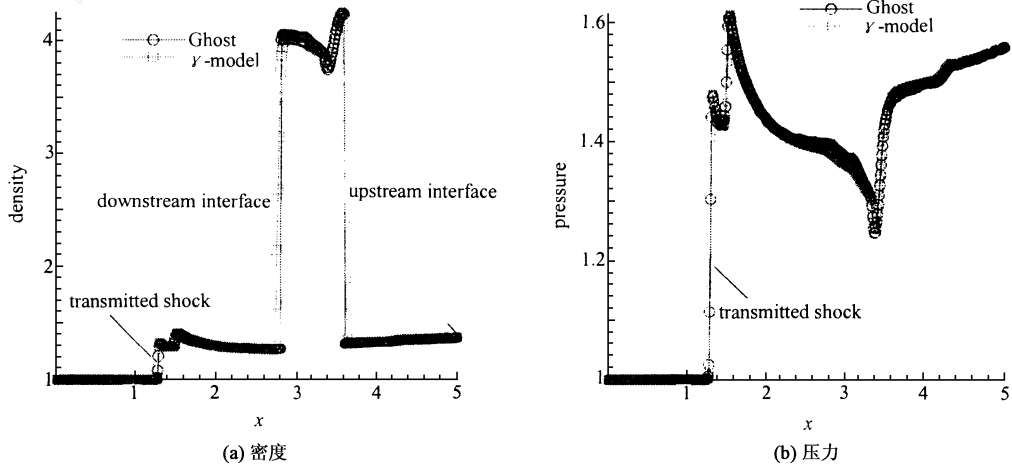


图 8 中心轴线处的密度分布和压力分布 (342 μs)

Fig. 8 Density distribution and pressure distribution on the symmetrical line (342 μs)

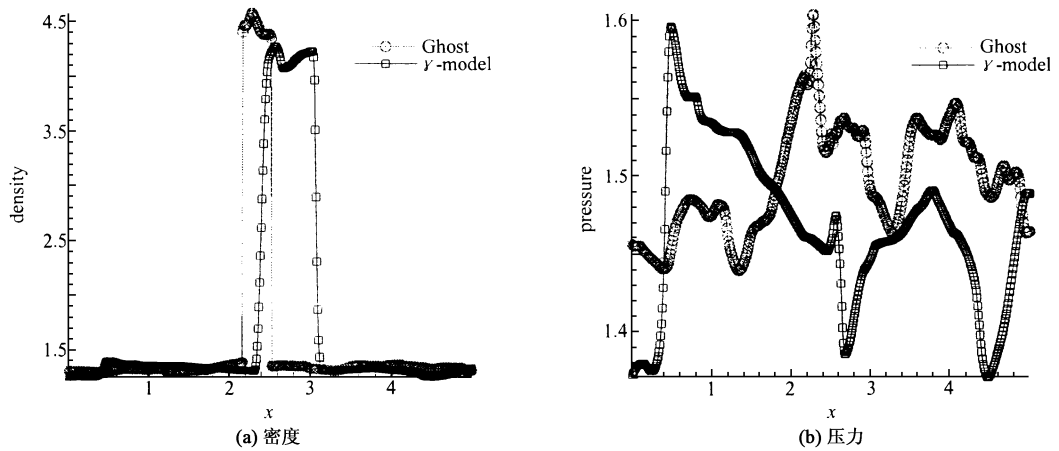


图 9 中心轴线处的密度分布和压力分布 (1 020 μs)

Fig. 9 Density distribution and pressure distribution on the symmetrical line (1 020 μs)

散,而  $\gamma$ -model 方法有较大的数值耗散,从而使界面变宽.

从图7和图8上也可看出, Ghost 方法模拟出来的界面位于  $\gamma$ -model 方法计算出来的界面中间,而且两种方法均给出了几乎相同的激波位置和激波强度等.这说明在较短时间内,两者的计算结果基本相同.但当时间增加到  $1\ 020\ \mu\text{s}$  时,从图9的密度分布图和压力分布图上可明显地看出,两种方法模拟出来的流场没有任何相似之处.

为什么计算时间较长时,两种方法的计算结果会出现差别?当激波加速柱形界面时,由于斜压效应的影响,在界面上部产生一个逆时针方向旋转的涡,在界面下部产生一个顺时针方向旋转的涡,这两个涡导致左边界面向内凹陷.在较短时间内,  $\gamma$ -model 方法的数值耗散对这两个涡的转动影响不大,因此两种方法的计算结果基本相同.当计算时间较长时,  $\gamma$ -model 方法的数值耗散减慢了涡的转动,导致左边界面带有尖突;而 Ghost 方法较小的数值耗散使其能较正确地模拟界面的运动,因此两种方法的计算结果出现较大差异.

## 2.2 定量比较

我们再进行定量比较,这里将 Ghost 方法的计算出的速度值与 Quirk 等人采用 AMR 技术的计算结果以及 Hass & Sturtevant 的实验结果相比较.由于  $\gamma$ -model 方法模拟出来的界面太宽(5~6个网格),本文没有与其计算结果进行比较.

表1 不同方法计算结果和实验数据比较

Table 1 Comparison of numerical results with other results

速度	$V_s$	$V_R$	$V_T$	$V_{ui}$	$V_{uf}$	$V_{di}$	$V_{df}$
实验数据 <sup>[19]</sup>	415	240	540	73	90	78	78
Quirk 计算数据 <sup>[20]</sup>	420	254	560	74	90	116	82
Quirk 的误差(%) <sup>[20]</sup>	+1.2	+5.8	+3.7	+1.4	+0.0	N/A	+5.1
本文数据	421	255	537	74	88	112	80
本文误差(%)	+1.4	+6.2	-0.5	+1.4	-2.2	N/A(-3.4)	+2.5

从表1可看出,除下游界面初始时刻的速度外,本文结果与实验结果相吻合,而下游界面初始时刻的速度与 Quirk 的数值模拟结果相符合.这说明 Ghost 方法的模拟是正确的.

## 4 结论

本文利用 Ghost 方法和  $\gamma$ -model 方法对激波加速柱形界面的问题进行了直接数值模拟.模拟结果

图10为上游界面和下游界面( $y=0$ 的直线与界面的相交点,右边的相交点为上游界面,左边的相交点为下游界面)以及入射波、折射波和穿透波在不同时间相对初始时刻的上游界面的距离,其横坐标表示相对初始时刻上游界面的距离,纵坐标为时间.

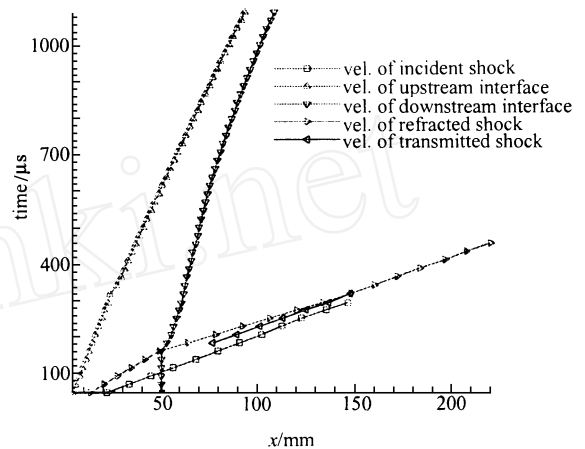


图10 界面的不同位置随时间的变化

Fig. 10 Positions of interface versus time

将图10的曲线进行拟合就得到不同位置的界面速度以及入射激波、折射激波和穿透激波的速度,具体结果见表1.表1中  $V_s$  表示入射激波的速度,  $V_R$  表示折射激波的速度,  $V_T$  表示穿透激波的速度,  $V_{ui}$  表示上游界面初始时刻的速度,  $V_{uf}$  表示上游界面最后时刻的速度,  $V_{di}$  表示下游界面初始时刻的速度,  $V_{df}$  表示下游界面最后时刻的速度.

显示,在较短时间内,两者均较好地模拟出激波与界面的相互作用以及界面失稳的问题.但随着时间的发展,  $\gamma$ -model 方法较大的数值耗散延迟了界面的发展,其计算结果与实验有较大差别,而 Ghost 方法则由于数值耗散较小,能消除抹平现象等原因使其计算结果更接近于实验结果.另外,两种方法均能解决两边具有不同比热比流体的界面模拟问题,能防止界面附近产生非物理的压力振荡.

## [参 考 文 献]

- [ 1 ] Liu Xu-Dong, Osher Stanley, Chan Tony. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. J Comput Phys, 1994, **115** :200 - 212.
- [ 2 ] Jiang Guang-shan, Shu Chi-wang. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. J Comput Phys, 1996, **126** :202 - 228.
- [ 3 ] Fu Dexun, Ma Yanwei. A high order accurate difference scheme for complex flow fields [J]. J Comput Phys, 1997, **134** :1 - 34.
- [ 4 ] Cheng Junbo, Fu Dexun, Ma Yanwen. Group velocity control scheme with low dissipation [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2000, **13** :138 - 145.
- [ 5 ] Fedkiw Ronald P, Aslam Tariq, Merriman Barry, Osher Stanley. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows(the Ghost fluid method) [J]. J Comput Phys, 1999, **152** :457 - 472.
- [ 6 ] Mulder W, Osher S, Sethian J A. Computing interface motion in compressible gas dynamics [J]. J Comput Phys, 1992, **100** :209.
- [ 7 ] Rouy E, Tourin A. A viscosity solution approach to shape-front shading [J]. SIAMJ Numer Anal, 1992, **29** (3) :867 - 884.
- [ 8 ] Sethian J A. A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts [A]. Proceedings of the National Academy of Science, 1995.
- [ 9 ] Susan M, Smereka Peter, Osher Stanley. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow [J]. JCP, 1994, **114** :146 - 159.
- [ 10 ] 陈耀松,毕远峰,江涛. Mareangoni 效应下的液桥自由面 [J]. 力学学报, 1994, **31** (2) :137 - 142.
- [ 11 ] 袁德奎,陶建华. 用 Level Set 方法求解具有自由面的流动问题 [J]. 力学学报, 2000, **32** (3) :264 - 271.
- [ 12 ] 赵宁,余彦,唐维. R-M 不稳定性数值模拟方法 [J]. 计算数学, 2001, **23** (4) :477 - 490.
- [ 13 ] 唐维军,赵宁,李晓林,张景琳,蔚喜军. 随机扰动下三维流体界面不稳定性的并行计算 [J]. 计算物理, 2001, **18** (6) :539 - 543.
- [ 14 ] 唐维军,张景琳,李晓林,赵宁. 三维流体界面不稳定性的 Ghost 方法 [J]. 计算物理, 2001, **18** (2) :163 - 169.
- [ 15 ] 叶文华,张维岩,陈光南,晋长秋,张钧. Rayleigh-Taylor 和 Richtmyer-Meshkov 不稳定性的 FCT 方法的数值模拟 [J]. 计算物理, 1998, **15** (3) :277 - 282.
- [ 16 ] Gimm James, Li Xiaolin, Liu Yingjie, Zhao Ning. Conservative front tracking and level set algorithms [J]. PANS, 2001, **98** :14198 - 14201.
- [ 17 ] Shyue Kehr-Ming. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems [J]. J Comput Phys, 1998, **142** :208 - 242.
- [ 18 ] LeVeque Randall J. Wave propagation algorithms for multi-dimensional hyperbolic systems [J]. J Comput Phys, 1997, **131** :227 - 253.
- [ 19 ] Hass J -F, Sturtevant B. Interaction of weak shock waves with cylindred and spherical gas inhomogeneities [J]. J Fluid Mech, 1987, **181** :41 - 76.
- [ 20 ] Quirk James J, Karni S. On the dynamics of a shock-bubble interaction [J]. J Fluid Mech, 1996, **318** :129 - 163.

## Simulation of Interaction of Shocks with a Cylinder Interface by Means of Ghost Fluid Method

CHENG Jun-bo<sup>1</sup>, TANG Wei-jun<sup>1</sup>, LI De-yuan<sup>1</sup>, FU De-xun<sup>2</sup>

(1. Computational Physics Laboratory, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China;

2. LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** Two-dimensional compressible flow field for the interaction of shocks with cylinder interface is directly simulated by using Ghost Fluid method (Ghost) and  $\gamma$ -model method, respectively, with the same discrete order in space and time. Numerical results are compared with the experimental results. They are almost alike in the beginning time and show the right position of interface, right strength and velocity of shocks. With the time developing, the effect of large numerical dissipation of  $\gamma$ -model method becomes greater and greater while the low numerical dissipation of Ghost method makes it efficient to simulate the moving interface well. Comparison with experiments proves that Ghost method is better than  $\gamma$ -model method in simulating the problem of interface instability.

**Key words:** Level Set method; Ghost Fluid method;  $\gamma$ -model method; R-M instability