

# 剪切流中大长细比圆柱体的二维涡激振动\*

葛斐, 王雷, 陆维, 洪友士

(中国科学院力学研究所 非线性力学国家重点实验室, 北京, 100190)

**摘要:** 本研究建立了剪切流中大长细比柱体顺流向与横向耦合的涡激振动模型, 漩涡脱落产生的流体力的变化用尾流振子来模拟, 考虑到柱体振动对涡脱落的影响, 在尾流振子中引入了柱体振动的加速度耦合项。根据柱体振动时瞬时速度的变化, 建立了非线性流体力模型。采用有限差分法求解柱体的振动方程, 计算结果与已有模型实验结果的对比显示, 本模型能较好地模拟大长细比圆柱体在剪切流中涡激振动的一些重要特性, 包括振动频率、振动模态、振幅大小等。在剪切流作用下, 柱体的振动中出现了明显的行波振动特征, 特别是在顺流向方向, 这也是大长细比柱体涡激振动的重要现象。

**关键词:** 涡激振动; 大长细比柱体; 剪切流; 尾流振子; 有限差分法

## 1 引言

随着海洋石油开采向深海的发展, 立管、张力腿、锚链等结构的长细比越来越大, 甚至可以达到  $10^3$  的量级。当水流流经此类结构, 由于漩涡脱落, 产生脉动的流体力, 若涡脱落频率接近于结构的自振频率时, 便会发生涡激共振, 结构的振幅明显增大, 最终导致结构的疲劳破坏。海洋结构的涡激振动问题已经开展了大量的研究工作, 相关综述性文章可参阅文献 [1-3]。为了数值求解结构的涡激响应, 目前主要有两种不同的方法, 一种是基于 N-S 方程的计算流体力学方法, 此方法可以直接计算结构上流体动压力的变化, 结合结构的运动方程求解得到动力响应, 但是由于计算量非常大, 对计算机硬件的要求很高, 需要耗费大量的计算时间。另一种方法是基于半经验模型描述的涡动力特性, 此方法的优点是模型简单, 计算简便, 适用于进行大量的参数分析, 但是模型中需要提供一些经验参数的数值。尾流振子模型就是此类方法的代表, 并在工程设计中得到了大量的应用。Facchinetti<sup>[4]</sup>等的研究表明若选取合适的流固耦合项, 尾流振子模型能够很好地模拟结构的涡激振动特性。

在已有的研究中, 研究重点基本上围绕结构的横向涡激振动(cross-flow), 认为顺流向涡激振动(in-line)对结构的疲劳破坏相比横向振动可以忽略<sup>[5]</sup>。当结构长细比较小时, 此结论是成立的, 若结构长细比很大( $\sim 10^3$ ), 高阶自振模态被激发, 顺流向涡激振动对疲劳破坏的影响

\*国家自然科学基金(10532070), 中国科学院知识创新工程重要方向项目(KJ9X2-YW-L07)和非线性力学国家重点实验室青年基金资助。

不可忽略,此时需同时考虑两个方向的涡激振动及其耦合作用。Baarholm<sup>[6]</sup>等的实验结果已经证实顺流向涡激振动对大长细比柱体结构疲劳破坏的贡献与横向涡激振动在同一量级,在一定的流速条件下,甚至大于横向的贡献。本研究在已有工作的基础上<sup>[7-9]</sup>,以尾流振子模型为基础,考虑了结构与流体的耦合以及结构顺流向与横向振动的耦合效应,在模型中引入相应的耦合项,数值求解柱体结构在剪切流中的二维动力响应并与模型实验结果做对比。

## 2 数学模型

受张力的圆柱体,两端的约束视为简支(图1),其运动控制方程具有 Euler-Bernoulli 梁的形式,即

$$\begin{aligned} \bar{m} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (C + C') \frac{\partial x}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial x}{\partial z} \right) &= F_x \\ \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (C + C') \frac{\partial y}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial y}{\partial z} \right) &= F_y \end{aligned} \quad (1)$$

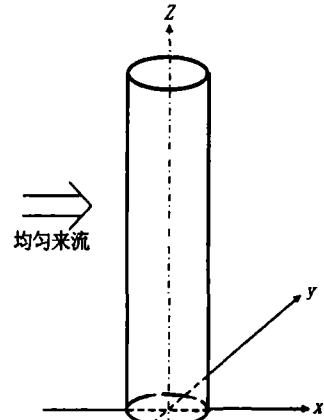


图1 圆柱体及坐标系

其中,  $\bar{m}$  为锚索单位长度的质量,包括流体附加质量。  $C$  是柱体的黏性阻尼系数,  $C'$  是线性化的流体阻尼系数,和涡串频率  $\Omega_f$  有关,可以表示为  $C' = \gamma \Omega_f \rho D^2$ ,  $\gamma$  是黏滞力参数,可通过实验确定,  $\rho$  是流体密度,  $D$  是圆柱外径。  $EI$  是圆柱的弯曲刚度,  $T$  是圆柱中的拉力,表示为

$$T = T_0 + EA \frac{S - L}{L} \quad (2)$$

$T_0$  是初始拉力,  $E$  是弹性模量,  $A$  是圆柱的截面积,  $S - L$  代表圆柱在变形过程中的伸长量,可由下式得到

$$\frac{dS}{dz} = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2} \quad (3)$$

方程右端的  $F$  代表作用于圆柱上的流体力,与流速的平方成正比,即

$$F_x = \frac{1}{2} C_D \rho D U^2, \quad F_y = \frac{1}{2} C_L \rho D U^2 \quad (4)$$

其中,  $U$  是来流速度,  $C_D$  代表顺流向的拖曳力系数,  $C_L$  代表横向升力系数。当柱体发生振动,柱体的运动会影响到流场,因而流体力系数会随之变化。顺流向的拖曳力系数可进一步表示为平均拖曳力系数和脉动拖曳力系数之和<sup>[8]</sup>。

$$C_D = \bar{C}_D + \tilde{C}_D = C_{D0} \left( 1 + K \frac{a_y}{D} \right) + C_{D1} \quad (5)$$

式中,  $C_{D0}$  是圆柱静止时的拖曳力系数,  $K$  是一个常数, 一般取为 2,  $a_y$  是圆柱的横向振幅,  $C_{D1}$  是随时间变化的拖曳力系数。  $C_{D1}$  及  $C_L$  的变化及与柱体振动的耦合用尾流振子模型来描述, 即满足 Van Der Pol 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_x}{\partial t^2} + \varepsilon_x \Omega_f (q_x^2 - 1) \frac{\partial q_x}{\partial t} + 4\Omega_f^2 q_x &= \frac{A_x}{D} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 q_y}{\partial t^2} + \varepsilon_y \Omega_f (q_y^2 - 1) \frac{\partial q_y}{\partial t} + \Omega_f^2 q_y &= \frac{A_y}{D} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $q_x, q_y$  是引入的无量纲变量, 相应的流体力系数可表示为

$$C_{D1} = C_{D10} \frac{q_x}{2}, \quad C_L = C_{L0} \frac{q_y}{2} \quad (7)$$

$C_{D10}, C_{L0}$  是作用于固支刚性圆柱上的流体力系数。  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, A_x, A_y$  是由实验确定的常数,  $\Omega_f$  是 Strouhal 频率, 即

$$\Omega_f = 2\pi S_f \frac{U}{D} \quad (8)$$

$S_f$  是 Strouhal 数, 与流体的  $Re$  数有关,  $U$  是来流速度。

假定来流是剪切流并且沿柱体轴向线性变化, 将柱体等分为  $N$  个单元, 相应节点坐标为  $z_0, z_1, \dots, z_N$ , 其中  $z_0$  在  $z=0$  处,  $z_N$  在  $z=L$  处。在每一单元中流速线性变化, 因此每一单元的平均流速可表示为

$$\bar{V}_k = \frac{1}{\Delta L_k} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (bz + c) dz = \frac{b}{2} (z_{k+1} + z_k) + c_k \quad (9)$$

相应的涡脱落频率可用式(8)得到, 只是流速用单元中的平均流速替代。

进一步考虑当圆柱发生振动时, 顺流向和横向流体力的变化如图 2 所示。  $f_D$  是作用在振动柱体上的平均拖曳力,  $f_D', f_L$  分别是涡脱落引起的脉动拖曳力和升力。

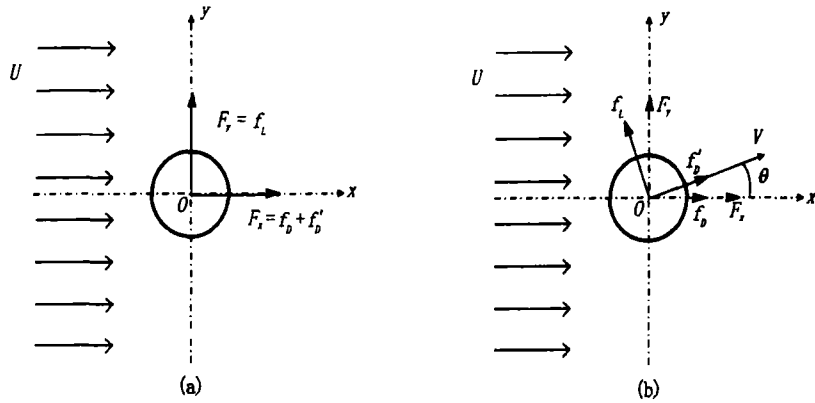


图2 均匀流中作用于圆柱截面上的流体力。(a) 圆柱静止时；(b) 圆柱振动时

当圆柱静止时，流体升力  $f_L$  和脉动拖曳力  $f_D'$  的方向与坐标轴的方向重合，如图(a)所示；当圆柱由于涡串泄放而发生振动时，升力和脉动拖曳力的方向不再与坐标轴重合，此时，脉动拖曳力  $f_D'$  的方向与相对速度  $V$  的方向重合，升力  $f_L$  的方向则垂直于  $V$ ，圆柱截面上的流体作用力简化后最终可以表示为<sup>[7,9]</sup>

$$\begin{cases} F_x = f_D + f_D' - f_L \dot{Y}(t) \\ F_y = f_L + f_D' \dot{Y}(t) \end{cases} \quad (10)$$

• 代表对时间变量求导， $\dot{Y}(t)$  是柱体的无量纲瞬时速度。

### 3 数值算例

Baarholm<sup>[6]</sup>等在自然水域中进行了大尺度立管的涡激振动模型实验，模型长细比为 3000，上端连接于传动机构，带动模型运动，形成等效剪切流，实验示意图如图 3 所示，表 1 列出了立管主要物理参数的值。

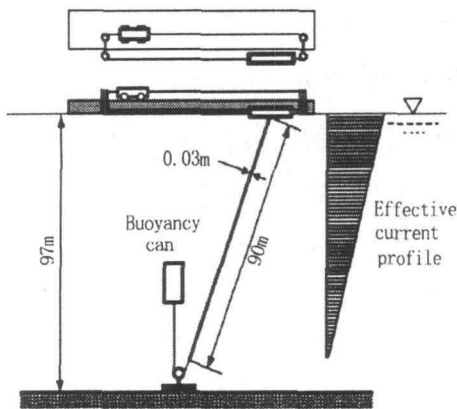


图3 模型实验示意图<sup>[6]</sup>

表1 模型物理参数

物理参数	数值
长度	90m
外径	0.03m
内径	0.026m
单位质量	2.27kg/m
弹性模量	$2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$
轴向张力	3.7kN

本研究模型中涉及的经验参数的选取方法同文献[9]，不同的是尾流振子模型中，考虑到

剪切流特性，参数  $A_x$  和  $A_y$  的取值分别为 12 和 36。采用中心差分法求解结构的运动方程，立管两端为铰接，在初始时刻，立管的位移和速度都为 0。对于尾流振子模型，其初始条件设定为

$$q_x = q_y = 2, \quad \frac{\partial q_x}{\partial t} = \frac{\partial q_y}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

模型实验中，立管上端点处的拖曳速度从 0.16 m/s 逐渐增加到 2m/s，进行了多组实验测试，数值计算中对应采用不同的流速，对每组实验得到了相应的数值模拟结果。图 4 给出了当拖曳速度为 0.54m/s 时，立管横向振动位移均方根值沿立管轴向的变化。数值结果和实验结果都显示立管的 11 阶振动模态被激发，且立管的运动是驻波与行波的组合形态，在立管靠近上下端部处，主要呈现出驻波的振动形态，而在立管中部，即远离端部处，出现了明显的行波振动特征。立管顺流向振动位移均方根值沿立管轴向的变化如图 5 所示，实验结果显示，立管在顺流向的振动仍然是驻波与行波的组合，但是与横向振动相比，驻波的特征明显减弱，行波逐渐占据主导地位。而对于数值计算的结果，立管的顺流向振动只呈现出行波振动特征，行波产生于立管上部流速较大的区域，在此区域中能量由流体传入立管，行波激发后沿着立管向下传播，由于立管振动频率与流体力频率偏离的增加，流体的阻尼效应增大，行波的能量被耗散，振幅衰减，频率不变，近似两倍于行波激发处的涡脱落频率。

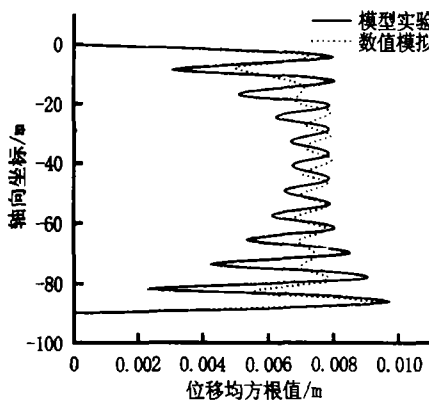


图 4 横向振动位移均方根值的分布

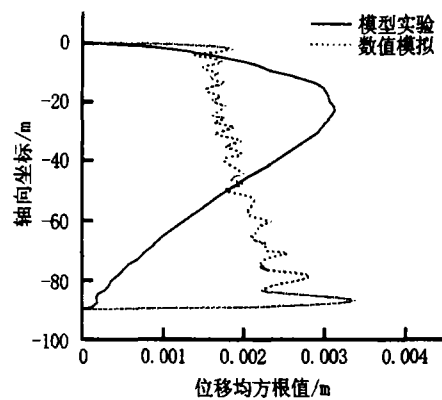


图 5 顺流向振动位移均方根值的分布

图 6 至图 8 给出了位移均方根值的平均值、振动频率、振动模态随流速的变化，图中实心点是模型实验结果<sup>[10]</sup>，空心点是数值计算结果，圆圈是横向结果，方框是顺流向结果。图 6 中位移均方根值沿立管轴向的平均值随流速的变化很小，且顺流向和横向的数值计算结果基本与实验结果吻合。图 7 中的实线代表 Strouhal 频率随流速的变化，虚线是 Strouhal 频率的二倍频，可以看到顺流向的振动频率近似于横向振动频率的两倍，且随着流速的增加频率呈线性增加的趋势。在数值模拟结果中，行波振动是立管顺流向涡激振动的主要形态，因此在图 8 中没有给出顺流向涡激振动的驻波振动模态。对于立管的横向振动模态，数值计算的结果与实验结果吻合的比较好，且有随着流速线性增大的趋势。

在本算例中，立管顺流向涡激振动的振幅大约是横向振动振幅的 1/5，在数值模拟结果中，顺流向振动主要呈现行波的振动特征，预示着在顺流向方向，立管可能没有发生涡激共振，即涡脱落频率的二倍频并没有对应的模态频率与之接近，这与立管的自振特性有密切关系。

图 9 给出了立管不同模态自振频率的变化趋势，为了比较，图中同时给出了具有相同物理特征及边界条件的梁和受张力锚索的自振频率。当模态数低于 8 阶时，立管的自振频率与受张力锚索的相同，可知此时决定自振频率的物理量是立管中的拉力，且自振频率与模态阶数之间有正比关系成立。当模态阶数高于 11 阶时，立管自振频率的变化趋势更接近于简支梁，因而抗弯刚度决定了立管的自振频率，立管的频率与模态阶数的平方呈正比关系。据此当立管在横向的激发模态阶数大于 4 阶，在顺流向方向并不一定存在一个模态频率等于涡脱落频率的二倍频，因此顺流向没有发生涡激共振。根据图 8 的结果，实验中横向振动的激发模态始终大于 5 阶，因此考虑到顺流向涡激共振的发生条件及流体的阻尼效应，在数值模拟中，驻波的振动模态很难维持，代之以行波振动为主，且随着行波的传播能量很快耗散。

在模型实验中附加质量是变量，与立管的振动频率等因素有关，意味着立管振动过程中，顺流向与横向的附件质量可以是不同的，因此两个方向同一模态的自振频率也会有差别，使高阶模态的频率接近于涡脱落频率的二倍频，在两个方向同时发生涡激共振<sup>[11]</sup>。而在本模型中，两个方向上的附加质量认为相等且在立管振动过程中保持不变，这可能是数值计算结果与实验结果不同的原因。

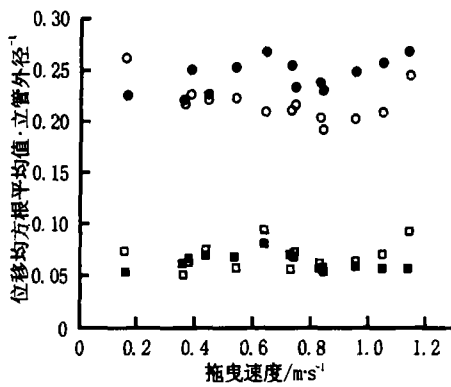


图 6 位移均方根平均值随流速的变化

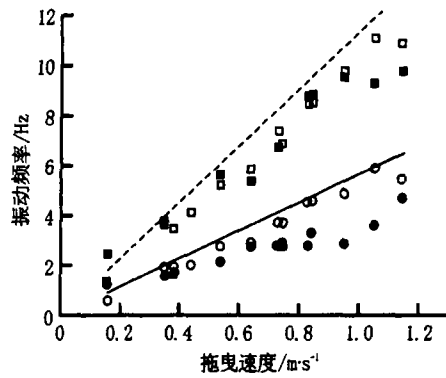


图 7 立管振动频率随流速的变化

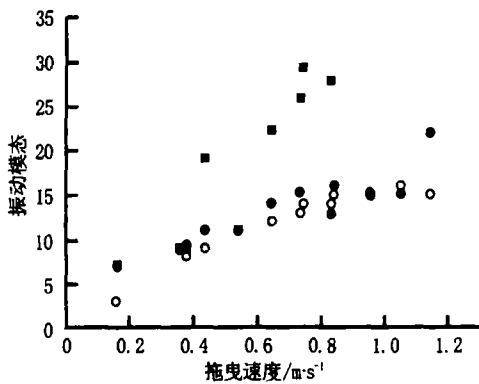


图 8 立管振动模态随流速的变化

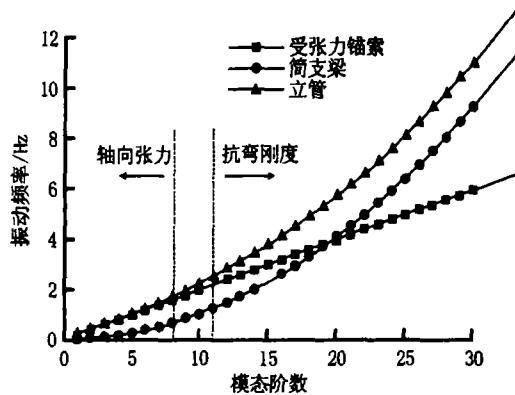


图 9 三种结构自振频率的比较

## 4 结论

基于尾流振子模型,建立了大长细比柱体结构的二维涡激振动模型,在尾流振子中采用结构加速度耦合项,同时考虑了结构顺流向振动与横向振动之间的耦合作用,引入了结构轴向张力及流体力的非线性模型。数值计算结果与实验结果的对比显示,本模型能较好地模拟大长细比柱体结构在剪切流中涡激振动的物理特性,包括振幅、振动频率、横向振动模态、驻波与行波振动等。流体附加质量对结构涡激共振有重要影响,如何更准确地描述附加质量的变化是提高本模型适用性的途径之一。

## 参考文献

1. Srapkaya T. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *J Fluids Struct*, 2004, 19: 389-447.
2. Williamson CHK, Govardhan R. Vortex-induced vibrations. *Annu Rev Fluid Mech*, 2004: 413-455.
3. Gabbai RD, Benaroya H. An review of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders. *J Sound Vib*, 2005, 282: 575-616.
4. Facchinetti ML, de Langre E, Biolley F. Coupling of structure and wake oscillator in vortex-induced vibrations. *J. Fluids Struct*, 2004, 19:123-140.
5. Chaplin JR, Bearman PW, Cheng Y, et al. Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. *J Fluids Struct*, 2005, 21:25-40.
6. Baarholm GS, Larsen CM, Lie H. On fatigue damage accumulation from in-line and cross-flow vortex-induced vibrations on risers. *J Fluids Struct*, 2006, 22: 109-127.
7. Wang XQ, So RMC, Chan KT. A non-linear fluid force model for vortex-induced vibration of an elastic cylinder. *J Sound Vib*, 2003, 260:287-305.
8. Furnes GK, Sorensen K. Flow induced vibrations modeled by coupled non-linear oscillators. *Proceedings of the 17th International Offshore and Polar Engineering Conference*. Lisbon, Portugal, July 1-6, 2007:2781-2787.
9. Ge F, Long X, Wang L, Hong YS. Flow induced vibrations of long circular cylinders modeled by coupled non-linear oscillators. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2009, doi: 10.1007/s11433-009-0128-8.
10. Lie H, Kaasen KE. Modal analysis of measurements from a large-scale VIV model test of a riser in linearly sheared flow. *J Fluids Struct*, 2006, 22: 557-575.
11. Swithenbank SB, Larsen CM. Draft: the importance of mode number on in-line amplitude of vortex-induced vibration of flexible cylinders. *Proceedings of the ASME 27th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Estoril, Portugal, June 15-20, 2008.

## Two-dimensional vortex-induced vibrations of long slender cylinder in shear flow

GE Fei, WANG Lei, LU Wei, HONG You-shi

(State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, CAS, Beijing, 100190.

Email: [gefei@imech.ac.cn](mailto:gefei@imech.ac.cn))

**Abstract:** This paper presents a vortex-induced vibration (VIV) model of long slender cylinder considering the coupling of cross-flow and in-line vibrations. Fluid forces exerting the cylinder due to the vortex shedding is formulated by using wake oscillators. Moreover the nonlinear fluid forces and the influence of cylinder acceleration on the vortex shedding are taken into account as the fluid structure interaction. Dynamic equations are numerically solved using finite difference method. Compared with test data shows that some fundamental characteristic of VIV of long slender cylinder have been reproduced based on the presented model, such as vibration frequency, dominant mode and vibration amplitude. Mixture modes including standing and traveling waves occur due to shear flow profile especially for in-line vibration.

**Key words:** Vortex-induced vibration; Long slender cylinder; Shear flow; Wake oscillator; Finite difference method.