

嵌入法求解直井多级抽油杆柱系统 纵向振动问题的频率和振型函数

徐永君¹, 赵清清¹, 于俊波², 张传绪²

(1. 中国科学院力学研究所水动力学与海洋工程重点实验室, 北京 100190; 2. 大庆油田第九采油厂, 大庆, 163853)

摘要 利用振型叠加法进行直井抽油杆柱系统纵向振动分析是理想的方法, 但相应的主频率和振型函数求解比较困难, 这也是长期以来未能在多级抽油杆柱系统中得到推广应用的主要原因之一。直井多级抽油杆柱系统纵向振动问题对应的求解主频率和振型函数是一个特征值和特征函数的求解问题, 由于多级杆柱系统的特征方程无法直接给出, 本文直接从边界条件和交界条件形成的矩阵入手, 采用基于留数定理的嵌入法进行精确有效地求解具有任意级数、不同材料及不同边界条件的完备特征解(主频率)。本文方法在精度、效率、可靠性和通用性等各方面的均有出色表现。

关键词: 直井多级抽油杆柱系统; 振动, 主频率, 振型函数, 振型叠加法, 留数定理, 嵌入法。

COMPLETE EIGEN-SOLUTIONS FOR MULTILEVEL SUCKER ROD VIBRATION SYSTEM IN VERTICAL WELL BY IMBEDDING METHOD

Yongjun Xu¹, Qingqing Zhao¹, Junbo Yu², Chuanxu Zhang²

(1. Key Laboratory for Hydrodynamics and Ocean Engineering, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190, CHINA; 2 The 9th Oil Production Plant of Daqing Oilfield, Daqing, 163853, CHINA)

ABSTRACT: Mode-superposition analysis is an ideal and effective method to solve the axial motion of any dynamic system such as multilevel sucker rod system in vertical well. In these problems of dynamics, the eigen-solutions including eigen-values (main frequencies) and eigen-functions (mode-shapes), play an important role in both theoretical study and numerical applications. Analytical eigen-solutions, however, are not always obtainable, especially for such a general case as arbitrary multilevel sucker rod system, and hence as an alternative approach, numerical solutions are frequently invoked. In this paper, a robust algorithm is proposed to compute accurate and complete eigen-solutions of longitudinal vibrations for multilevel sucker rod system in vertical well. Based on the imbedding method, the general-purpose ODE (Ordinary Differential Equation) solver COLSYS is adopted to compute the complex line integral accurately and efficiently after transforming it into an equivalent ODE form. The searching domain is carefully chosen to be a narrow rectangle along the real axes so that the eigen-values can be computed in an ascending sequence without missing any one between. A number of numerical examples are given to show the excellent accuracy, efficiency and reliability of the proposed approach.

KEYWORDS: Mode-superposition analysis, multilevel sucker rod system in vertical well, eigen-value (main frequency), eigen-function (mode-shape), vibration, embedding method.

1 引言

游梁式抽油系统主要包括抽油机、抽油泵及连接两部分的抽油杆, 结构简单、运行可靠, 得到了普遍使用。疲劳断裂、偏磨是主要破坏形式, 严重时影响油井正常生产, 给油田带来较大的经济损失。抽油杆管柱动力学分析是解决疲劳断裂、偏磨破坏的基础。Gibbs 首次提出了有杆泵抽油系统悬点载荷的预测模型^[1-3], 该模型以抽油杆柱一维振动的有阻尼波动方程为基础, 用有限差分法对偏微分方程进行数值求解。该技术 1965 年被 API 采纳^[4], 得到广泛应用。基于有限差分法数值求解方法, 在一维模型的基础上又发展了同时考虑抽油杆柱和液柱振动的二维预测模型和同时考虑抽油杆柱、液柱以及油管柱振动的三维预测模型^[5-7], 文献[8]利用逆风格式对多级杆柱抽油井三维振动进行了研究, 文献[9]利用有限元法对单级杆柱抽油井二维振动进行了研究。文献[10-11]指出了 API 中给出的模型中强迫振动部分的给出位移边界条件的不合理性。文献[11-13]利用振型叠加法对单级抽油杆柱振动进行了分析, 但文献[11-13]对强迫振动部分采用自由振动的振型进行分析, 振型选取不太合理, 使得结果不能满足方程和边界条件。文献[14]利用一端固定一端带集中质量弹性杆振型^[13]作为主振型进行分析。

作者简介: 徐永君(1964-), 男, 河北人, 副研究员, 主要从事疲劳断裂、海洋工程、计算力学及实验力学研究(E-mail: yjxu@imech.ac.cn)

•III-612•

对于直井多级抽油杆柱系统纵向振动问题，主频率和振型函数的求解就是特征值问题，对应的特征值问题的基本方程和边界条件与求解多材料反平面切口特征值问题^[15-17]相似。所以可以采用相应于多材料反平面切口特征解的一系列方法进行求解^[15-20]。由R. Kalaba, K. Mease, K. Spingarn^[21-22]等人提出基于留数定理的嵌入法并应用于矩阵特征值问题，文[23]进一步将该法应用于矩阵的广义特征值问题。文献[17-18]应用嵌入法对平面断裂问题的特征解进行了研究，并进一步改进与Müller法联合应用于Mindlin-Reissner板断裂问题的特征根的研究^[17, 20]。本文利用高精度、高效、实用、通用的嵌入法依序无漏地求得直井多级抽油杆柱系统纵向振动问题的各阶特征值的完备数值解析解。

2 力学基本问题和数学模型基本方程

直井有杆泵抽油系统中，抽油杆柱的主要动力学响应就是纵向振动，如图1所示，API^[4]抽油杆纵向振动问题分为两部分叠加。第I部分是杆柱顶部受正弦激励，底部自由；第II部分是杆柱顶部固定，底部承受正弦位移，该位移的幅度和相位使泵处的等效力和位移与简化前相等。

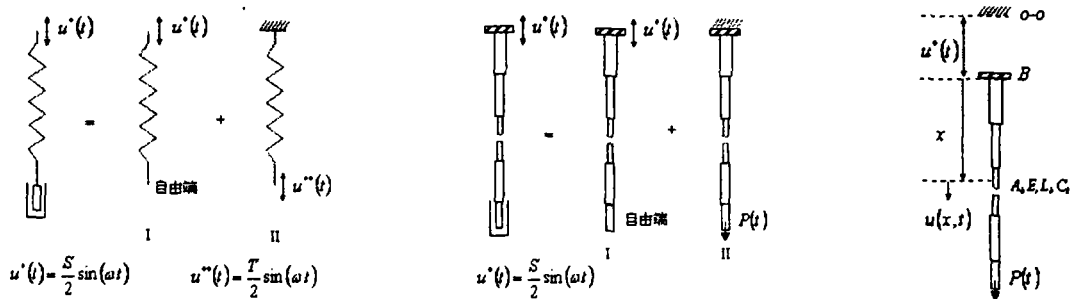


图 1. API 抽油杆柱运动的力学模型 图 2. 多级抽油杆柱运动的力学模型 图 3. 多级抽油杆柱动力学模型

对于直井多级抽油杆柱系统，如图2所示，同样按API抽油杆纵向振动问题分为两部分叠加。在第II部分受迫振动底部边界条件为泵受力 $P(t)$ ， $P(t)$ 可根据实际井况确定。

进一步，简化成如图3所示的动力学模型。图中o-o为抽油机悬点的上死点；B为抽油杆顶部无质量基础，随抽油机悬点在上、下死点间作往复运动 $u^*(t)$ ，既 $u^*(t)$ 为基础B在任意时刻 t 相对于上死点的位移； $u(x, t)$ 为任意截面 x 处相对于基础B在任意时刻 t 的位移，这样抽油杆柱顶部相对于基础B就为固支边界； E 为抽油杆柱材料的弹性模量； A_i, L_i, C_i 分别为从上向下的第 i 级杆柱任意截面 x 处的截面面积、第 i 级杆柱的长度、第 i 级杆柱处的阻尼系数。 $P(t)$ 为作用于泵柱塞上的载荷时间函数。 $i=1, 2, 3, \dots, N, N+1$ ，其中 $N+1$ 为泵柱塞，其余为抽油杆。记 $x_i = \sum_{j=1}^i L_j$ 为第 i 级杆与第 $i+1$ 级杆交界处位置。

不考虑抽油杆接箍的影响，取抽油杆柱微单元进行受力分析，可得抽油杆柱纵向振动微分基本方程为

$$\rho A_i \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} = EA_i \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} - C_i \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} + f_i(t) \quad (1)$$

$$f_i(t) = (\rho - \rho_L) A_i g - \rho A_i \frac{d^2 u^*(t)}{dt^2} - C_i \frac{du^*(t)}{dt}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, N+1$$

其中， ρ 为抽油杆柱材料密度；

ρ_L 为油井液体密度。

直接对式(1)的联立偏微分方程组进行求解是非常复杂且难以实现，将各方程两边除以 ρA_i 。近似地取各级杆柱的阻尼系数与线质量比值为统一常数 $C = C_i / \rho A_i$ ，定义为等效阻尼系数。式(1)的联立偏微分方程组可简化为统一方程

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + f(t), \quad f(t) = \frac{(\rho - \rho_L)}{\rho} g - \frac{d^2 u^*(t)}{dt^2} - C \frac{du^*(t)}{dt} \quad (2)$$

其中 $a = \sqrt{E/\rho}$ 为声波在抽油杆中的传播速度。

第 I 部分：顶部固支，底部自由

对于第 I 部分，考虑顶部随悬点运动，并受外力 $f(t)$ 作用，所对应偏微分方程和边界条件(Boundary Conditions, BCs)、各级杆间交界条件(位移连续和力平衡条件, Connect Conditions, CCs)分别为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + f(t), \quad f(t) = \frac{(\rho - \rho_L)}{\rho} g - \frac{d^2 u^*(t)}{dt^2} - C \frac{du^*(t)}{dt}$$

$$BCs: u(x,t)|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_{N+1}} = 0 \quad (3)$$

$$CCs: (u_i(x,t) - u_{i+1}(x,t))|_{x=x_i}; \quad \left(A_i \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} - A_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

利用分离变量法，不难得到偏微分方程(2)的解形式为

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (3)$$

其中 $X(x)$ 为振型函数，满足常微分方程

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0; \quad \lambda = \frac{\omega}{a} \quad (4)$$

边界条件为

$$X_1(x)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dX_{N+1}(x)}{dx} \right|_{x=x_{N+1}} = 0 \quad (5)$$

交界条件为

$$X_i(x)|_{x=x_i} = X_{i+1}(x)|_{x=x_i}; \quad A_i \left. \frac{dX_i(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = A_{i+1} \left. \frac{dX_{i+1}(x)}{dx} \right|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (6)$$

第 II 部分：顶部固支，底部受迫

对于第 II 部分，考虑顶部固定，抽油杆不受其他外力作用，泵柱塞受强迫力 $P(t)$ 。不考虑泵柱塞本身轴向变形对抽油杆部分动力效应的影响，仅将泵柱塞看成一个质量块，这里暂时用 $P(t)$ 作用于抽油杆底部表示受迫端边界条件。所对应偏微分方程和边界条件(Boundary Conditions, BCs)、各级杆间交界条件(Connect Conditions, CCs)分别为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$BCs: u(x,t)|_{x=0} = 0; \quad A_N \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_N} = P(t) \quad (7)$$

$$CCs: (u_i(x,t) - u_{i+1}(x,t))|_{x=x_i}; \quad \left(A_i \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} - A_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

这里受迫端边界条件不能用于计算振型和方程求解。

对应于偏微分方程式(7)，经分离变量法(3)变换后，其中 $X(x)$ 为振型函数，满足常微分方程(4)，对应于常微分方程式(4)的关于 $T(t)$ 部分的常微分方程为

$$\ddot{T}(t) + C\dot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (8)$$

式(8)相当于振子、弹簧、阻尼系统的自由振动，上点表示对时间的导数。单独考虑该常微分方程的解为

$$T(t) = \alpha e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (9)$$

其中 $\xi = C/2\omega$ 为等效阻尼比， $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega$ 等效阻尼振动频率。 α 和 ϕ 为由初始条件决定的常数。

可以证明 $\xi \ll 1.0$ ，所以在讨论边界条件时近似取 $T(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$ 。假设不考虑泵柱塞本身轴向变形对抽油杆部分动力效应的影响，仅将泵柱塞看成一个质量块 $m_{N+1} = \rho A_{N+1} L_{N+1}$ ，一个单位冲量作用于泵

柱塞上, 相当于单位冲量驱动泵柱塞质量块以速度 $v_0 = 1/m_{N+1}$ 带动抽油杆柱开始运动。质量块运动加速度为 $\ddot{u}_N(x, t)|_{x=x_N}$, 质量块对抽油杆作用力为 $-m_{N+1}\ddot{u}_N(x, t)|_{x=x_N}$, 引起的交界处的应变为 $\partial u_N(x, t)/\partial x|_{x=x_N}$ 。将抽油杆柱与泵柱塞交接处的力平衡条件作为抽油杆柱的杆端边界条件, 这样顶部和底部的边界条件分别为

$$X_1(x)|_{x=0} = 0, \quad EA_N \frac{dX_N(x)}{dx} \Big|_{x=x_N} = m_{N+1}\omega^2 X_N(x)|_{x=x_N} \quad (10)$$

交界条件为

$$X_i(x)|_{x=x_i} = X_{i+1}(x)|_{x=x_i}; \quad A_i \frac{dX_i(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} = A_{i+1} \frac{dX_{i+1}(x)}{dx} \Big|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (11)$$

3 特征值问题及相应的特征方程

统一记第I部分和第II部分 (I: $K = N$, II: $K = N-1$), 常微分方程特征值问题为

$$f_n'' + \lambda^2 f_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (12)$$

该问题的一个主要特性是其特征函数的形式可以显式写出

$$f_n(x) = \alpha_n \cos \lambda x + \beta_n \sin \lambda x, \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (13)$$

各常数 α_n 、 β_n 和特征值 λ 待定。由边界条件和交接条件可知, α_n 和 β_n 中仅有一个待定系数, 若知某一级系数, 则其它级的系数均可由交界条件解得。尽管如此, 对于多级问题 ($N > 1$), 解析地导出特征方程并求解也是十分困难的。

相应的边界条件可表示为

$$x = 0: \quad f_1(0) = 0; \quad \begin{cases} \text{I: } f'_{N+1}(x)|_{x=x_{N+1}} = 0 \\ \text{II: } A_N f'_N(x)|_{x=x_N} = A_{N+1} L_{N+1} \lambda^2 f_N(x)|_{x=x_N} \end{cases} \quad (14a)$$

相应的交界条件为

$$f_n(x_n) = f_{n+1}(x_n), \quad A_n f'_n(x_n) = A_{n+1} f'_{n+1}(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (14b)$$

可得相邻两级杆柱系数间的关系为

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{Bmatrix} = [\Delta_n] \begin{Bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (15)$$

其中

$$[\Delta_n] = \begin{bmatrix} \cos(\lambda x_n) & -\sin(\lambda x_n) \\ \sin(\lambda x_n) & \cos(\lambda x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{A_n}{A_{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\lambda x_n) & \sin(\lambda x_n) \\ -\sin(\lambda x_n) & \cos(\lambda x_n) \end{bmatrix} \quad (16)$$

由于 $|\Delta_n| = A_n/A_{n+1} \neq 0$, 所以相邻两级杆柱间系数是一一对应的。从而可得

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{K+1} \\ \beta_{K+1} \end{Bmatrix} = [\Delta] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix}, \quad [\Delta] = [\Delta_K] \dots [\Delta_2] [\Delta_1] \quad (17)$$

第I部分相对于 $[\alpha_1, \beta_1]^T$ 的特征方程为

$$B(\lambda) = |[M]| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ M_1 & M_2 \end{vmatrix} = M_2(\lambda) = 0 \quad (18)$$

$$[M_1 \quad M_2] = [-\sin(\lambda x_{N+1}) \quad \cos(\lambda x_{N+1})] [\Delta]$$

第II部分相对于 $[\alpha_1, \beta_1]^T$ 的特征方程为

$$B(\lambda) = |[M]| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ M_1 & M_2 \end{vmatrix} = M_2(\lambda) = 0 \quad (19)$$

其中

$$[M_1 \quad M_2] = [-\lambda A_N \sin(\lambda x_N) - V_{N+1} \lambda^2 \cos(\lambda x_N) \quad \lambda A_N \cos(\lambda x_N) - V_{N+1} \lambda^2 \sin(\lambda x_N)] [\Delta]$$

$$V_{N+1} = A_{N+1} L_{N+1}$$

易证明矩阵 $[M]$ 的秩至少为 1, 由此可知特征函数的基础解系最大线性无关个数为 $1(1=2-1)$, 即不存在重根。

4 特征值及特征函数的性质

为表达方便, 定义 $x_0 = 0$, 记

$$f(x) = \{f_n(x) \mid x_{n-1} \leq x \leq x_n, \quad n=1,2,\dots,K+1\} \quad (20)$$

并定义函数内积及其导数内积及相应的导出模分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I: } (f, g) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N+1} A_n L_n} \sum_{n=1}^{N+1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} A_n f_n(x) g_n(x) dx \\ \text{II: } (f, g) = \frac{1}{\sum_{n=1}^N A_n L_n} \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} A_n f_n(x) g_n(x) dx + V_{N+1} f(x_N) g(x_N), \quad \|f\|_M^2 = (f, f) \\ (f', g') = \frac{1}{\sum_{n=1}^K A_n L_n} \sum_{n=1}^{K+1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} A_n f'_n(x) g'_n(x) dx \end{array} \right. \quad (21)$$

将由内积导出的范数记为

$$\|f\|_2^* = \sqrt{(f, f)} \quad (22)$$

与 $L_2[x_0, x_{K+1}]$ 中的范数 $\|\bullet\|_2$ 之间存在如下关系:

$$\frac{1}{\max\{\sqrt{G_n}\}} \|f\|_2^* \leq \|f\|_2 \leq \frac{1}{\min\{\sqrt{G_n}\}} \|f\|_2^*, \quad n=1,2,\dots,K \quad (23)$$

由此可知 $\|\bullet\|_2$ 与 $\|\bullet\|_2^*$ 等价, 从而可知 $\{C[x_0, x_{K+1}], \|\bullet\|_2^*\}$ 也是 Hilbert 空间, 记为 $L_2^*[x_0, x_{K+1}]$ 。

对于满足 $f(\theta) \in L_2^*[x_0, x_{K+1}]$ 及相应的边界条件和交界连续条件的全体函数 $\mathcal{D}(T)$, 定义 $\mathcal{D}(T)$ 到 $L_2^*[x_0, x_{K+1}]$ 上的微分算子 T 如下: 当 $f \in \mathcal{D}(T)$ 时:

$$Tf = -D^2 f(x) = \begin{cases} -f_n''(x) & x \in (x_{n-1}, x_n), \quad n=1,2,\dots,K \end{cases} \quad (24)$$

利用分部积分及边界条件可比较容易地证明 T 是一个自伴正算子。记 T 的特征空间为 $M_\lambda = \text{Span}\{f \mid Tf = \lambda^2 f, f \neq 0\}$, T 的特征值 λ^2 全体为 $\sigma_p(T)$ (称为 T 的点谱)。Hilbert 空间上的任何自伴正算子 T 具有以下 3 条性质:

性质 1: T 的所有特征值 λ^2 为非负实数。

性质 2: 对应于不同特征值的特征函数互相正交。

性质 3: 对应于不同特征值的特征函数导数互相正交。

相应的证明可参考相关的泛函分析书籍。

5 嵌入法基本原理及算法实施

5.1 嵌入法基本原理

对于复变量 λ 的复变函数 $f(\lambda)$, 给定复平面上的一条简单闭曲线 Γ , 若复函数 $f(\lambda)$ 在 Γ 内无奇点, 则有

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda, \quad I^2 = -1 \quad (25)$$

考虑式(18, 19)定义的特征值问题, 亦即求复变函数 $B(\lambda)$ 的零点问题。在给定复平面上的一条简单闭曲线 Γ 内, 若式存在 K 个特征根(重根按重数计算), 对于其中任一零点, 特征方程均可表示为

$$B(\lambda) = \tilde{B}(\lambda) \prod_{i=1}^K (\lambda - \lambda_i)^{\kappa_i} = 0 \quad (26)$$

其中 κ_i 为 λ_i 的重数。利用留数定理(或Cauchy积分公式)可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n \frac{dB(\lambda)/d(\lambda)}{B(\lambda)} d\lambda = \begin{cases} \sum \kappa_i = K, & n=0 \\ \sum \kappa_i \lambda_i^n, & n \neq 0 \end{cases} \quad (27)$$

这样取 K 个不同的 n 值进行积分就可将求复变函数 $B(\lambda)$ 的零点, 问题转化为求解 K 个非线性代数方程问题。

5.2 算法实施

(1) 被积函数的计算:

被积函数涉及 $B(\lambda)$ 及其导数的计算, 若直接应用式(18)和(19)进行计算, 则随着级数的增大直接求导无法实现, 重新利用边界和交界条件对全部系数形成特征方程。

令 $\{c_n\} = \{\alpha_n, \beta_n\}^T$, 则在 $x = x_n$ 交界上位移连续和力平衡条件可表示为如下的矩阵形式

$$[M_{n+1}]\{C_n\} = \{0\} \quad (1 \leq n \leq K) \quad (28)$$

其中

$$[M_{n+1}] = \begin{bmatrix} \cos(\lambda x_n) & \sin(\lambda x_n) & -\cos(\lambda x_n) & -\sin(\lambda x_n) \\ -\mu_n \sin(\lambda x_n) & \mu_n \cos(\lambda x_n) & \sin(\lambda x_n) & -\cos(\lambda x_n) \end{bmatrix}$$

$$\{C_n\} = \left\{ \{c_n\}^T, \{c_{n+1}\}^T \right\}^T, \quad \mu_n = A_n/A_{n+1}$$

对于两边界条件分别为:

$$[M_1]\{c_1\} = \{0\}, \quad [M_{K+2}]\{c_{K+1}\} = \{0\} \quad (29)$$

其中

$$[M_1] = [1 \quad 0]$$

$$\begin{cases} \text{I: } [M_{K+2}] = [-\sin(\lambda x_{N+1}) & \cos(\lambda x_{N+1})] \\ \text{II: } [M_{K+2}] = [-\lambda A_N \sin(\lambda x_N) - V_{N+1} \lambda^2 \cos(\lambda x_N) & \lambda A_N \cos(\lambda x_N) - V_{N+1} \lambda^2 \sin(\lambda x_N)] \end{cases}$$

联立式(28)和(29), 可得

$$[M]\{C\} = \{0\} \quad (30)$$

其中

$$\{C\} = \left\{ \{c_1\}^T, \{c_2\}^T, \dots, \{c_n\}^T, \dots, \{c_{K+1}\}^T \right\}^T$$

而 $[M]$ 是由 $[M_n]$ ($n=1, 2, \dots, K+2$) 组成的一个几乎块状对角矩阵。令特征矩阵 $[M]$ 的行列式为零, 得特征方程如下

$$B(\lambda) = |[M]| = 0 \quad (31)$$

对于几乎块对角矩阵, C. de Boor在[24]中建议了一种列选主元高斯消去法。本文采用该法用复数运算对 $[M]$ 进行三角分解, 进而求得复行列式的值。计算导数时, 依据行列式导数的定义, 同样利用该法依次对 $[M]$ 中一行元素求导的各个新矩阵计算复行列式值, 而后累加即可。进而求出所需的被积函数值。

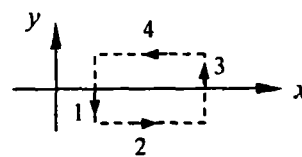


图 4. λ 平面内矩形搜索域

(2) 积分计算:

由于本文问题只存在正实根, 为了能按大小依序地求解特征根, 采用图4所示的矩形域围线 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$) 进行积分, 记

$$F(\lambda) = \lambda^n \frac{dB(\lambda)/d(\lambda)}{B(\lambda)}, \quad \lambda = x + iy$$

则式(27)可写为

$$R_{part} + I \cdot I_{part} = \frac{1}{2\pi} \left(\int F(x + iy) dy - \int F(x + iy) I dx \right) = \begin{cases} \sum k_i = K, & n = 0 \\ \sum k_i \lambda_i^n, & n \neq 0 \end{cases} \quad (32)$$

其中 R_{part} 和 I_{part} 分别为积分值的实部和虚部。由于特征根均为正实数，所以积分的虚部 I_{part} 恒为零，所以仅需考虑实部 R_{part} 。由于无重根可以单根依次搜索。

能否精确计算式(32)的围线积分是嵌入法的关键，本文将式(32)化为等价的常微分方程(ODE)[18-20]，采用高质量的ODE求解器COLSYS[25-27]进行积分计算。

6 数值算例

对于本文所讨论的问题，大量单级和多级杆柱系统的特征值数值计算结果表明本法具有高精度、高效、实用、通用性好等优点。

例：多级杆柱系统

以某一油井为例进行分析，杆柱直径组合为 [25mm, 22mm, 19mm, 38mm]，长度分别为 [496m, 595m, 1307m, 8m]，其中38mm为泵直径。表1给出了两部分前50阶特征根计算结果。

表1 前50阶特征根计算结果

i	Part I (λ_i)	Part II (λ_i)
1	7.363273299681710E-04	7.363275258987930E-04
2	1.940978551085930E-03	1.940980587272780E-03
3	3.268225863428790E-03	3.268236264922450E-03
4	4.440046115798430E-03	4.440067720194410E-03
5	5.806357611749050E-03	5.806420398675910E-03
6	7.164376401255790E-03	7.164466459280860E-03
7	8.419244432335790E-03	8.419415392642900E-03
8	9.729590414196610E-03	9.729793042506960E-03
9	1.089161852941270E-02	1.089196680512240E-02
10	1.233356299413640E-02	1.233403552619980E-02
21	2.666663322032930E-02	2.666995370554630E-02
22	2.784388876028970E-02	2.784695154189700E-02
23	2.917068649380040E-02	2.917465358934090E-02
24	3.037674965541200E-02	3.038052356716120E-02
25	3.177710100367820E-02	3.178241813219420E-02
26	3.312931199607860E-02	3.313365881506670E-02
27	3.436372396739050E-02	3.436937653478150E-02
28	3.565950580670430E-02	3.566436629705250E-02
29	3.687748502745670E-02	3.688419375047590E-02
30	3.834668571958520E-02	3.835330680045150E-02
41	5.272637755097440E-02	5.273727042357750E-02
42	5.385969044346190E-02	5.387033513918330E-02
43	5.523119279146390E-02	5.524357507850930E-02
44	5.645979676358380E-02	5.647168156269540E-02
45	5.790091216415740E-02	5.791566539063620E-02
46	5.918302411404770E-02	5.919417247835350E-02
47	6.043353529056390E-02	6.044826176983840E-02
48	6.171474386174760E-02	6.172703924945090E-02
49	6.301324348716060E-02	6.303000822616720E-02
50	6.446534791468770E-02	6.447971680648400E-02

5 小结

本文从直井多级抽油杆柱系统纵向振动的特征值和特征函数表示特征行列式入手, 得到特征值的特征函数Rayleigh商表达式及特征函数的正交关系式。采用嵌入法研制了通用程序, 大量的数值算例可以看出本算法具有高精度、高效、实用、通用等优点, 并可给出完备的特征值数值解析解。本文从根本上解决了直井多级抽油杆柱系统纵向振动问题的特征值求解。

参考文献:

- [1] S. G. Gibbs, predicting the behavior of sucker rod pumping systems. JPT. July. 1963, pp. 769-778.
- [2] S. G. Gibbs, general method for predicting rod pumping system performance. SPE 6850, 1977, pp. 1-8.
- [3] S. G. Gibbs, a review of methods for design and analysis of rod pumping installations. SPT. December, 1982, pp. 2931-2940.
- [4] API RP 11L, Design calculation of sucker rod pumping systems, American petroleum institute, 1967. (API 标准 RP 11L (第3版), 有杆抽油系统设计计算推荐作法。北京: 石油工业出版社, 1972。)
- [5] Dale Russel Doty, Zelimir Schmidt, an improved model for sucker and pumping, SPE 10249, 1982, pp. 1-7.
- [6] Lea J. F., modeling force on a beam pump system when pumping highly viscous crude, SPE 20672, 1990, pp. 553-564.
- [7] 余国安, 有杆泵抽油井的三维振动, 石油学报, 1989, 10(2), pp. 76-83.
- [8] 余国安, 邬亦炯, 王国源等, 多级杆柱抽油机井的三维振动, 石油机械, 1989, 17(6), pp. 16-21, 50.
- [9] 王凤山, 朱君, 王素玲等, 抽油机井杆柱振动载荷有限元分析, 大庆石油地质开发, 2006, 25(1), pp. 85-87.
- [10] 董世民, 马德坤, 黄秀华, 抽油杆柱的纵向振动特性与共振条件, 石油机械, 2001, 29(5), pp. 22-24.
- [11] 朱炳坤, 用振型叠加法对抽油杆柱纵向振动进行分析, 石油矿场机械, 2005, 34(2), pp. 41-43.
- [12] 董世民, 金仁贤, 崔振华, 预测有杆泵抽油系统参数的新方法, 石油机械, 1996, 24(2), pp. 35-39.
- [13] S. Timoshenko, D. H. Young, W. Weaver, Jr., vibration problems in engineering, 4th ed. John Wiley and Sons, Inc., 1974. (铁摩铎柯等著, 胡人礼译, 工程中的振动问题, 人民铁道出版社, 1978。)
- [14] 李桂喜, 马汝建, 准匀速悬点运动下抽油杆柱的振动分析, 石油矿场机械, 2000, 29(6), pp. 33-36.
- [15] 徐永君, 袁骊, 多材料反平面断裂问题特征根的超逆幂迭代求解, 固体力学学报, 1997, 18(4): 290-294.
- [16] Xu Yongjun, Yuan Si. Complete eigen-solutions for anti-plane notches with multi-materials by super-inverse iteration, ACAT *mechanica solida Sinica*, 1997, 10(2): 157-166.
- [17] 徐永君, 断裂问题特征根的完备求解和基于有限元线法的应力强度因子计算, 清华大学博士学位论文, 1996年12月。
- [18] Xu Yongjun, Yuan Si, Complete Eigen-solutions for Plane Notches with Multi-materials by the Imbedding Method, *International Journal of Fracture*, 1996, 81: 373-381.
- [19] 徐永君, 袁骊, 断裂问题的特征根区间及其二分迭代求解, 工程力学, 1996, 13(4): 28-40.
- [20] 袁骊, 徐永君, 嵌入法和 Müller 法联合求解断裂问题特征根的完备解, 计算力学学报, 1997, 第14卷增刊: 639-642.
- [21] R. Kalaba and K. Mease, An imbedding method for matrix eigenvalue problem, *Computation & Mathematics with Applications*, Vol. 4, No. 1, 1978, pp. 53-59.
- [22] R. Kalaba and K. Spingarn. Numerical approaches to the eigenvalues of Saaty's matrices for Fuzzy Sets, *Computation & Mathematics with Applications*, 4, 1978, pp. 369-375.
- [23] 王卜, 用嵌入法解广义特征值问题, 计算数学, 第2期, 1978, 5, pp. 194-198.
- [24] C. de Boor, A practical guide to splines, Springer-Verlag (New York), 1978.
- [25] 袁骊, 介绍一个常微分方程边值问题求解通用程序—COLSYS, 计算结构力学及其应用, No. 2, 1990.
- [26] U. Ascher, J. Christiansen and R. D. Russell; Collocation software for boundary-value ODEs, *ACM Trans. Math. Software*, Vol. 7, No. 2, 1981, pp. 209-222.
- [27] U. Ascher, J. Christiansen and R. D. Russell: Algorithm 569, COLSYS: Collocation software for boundary-value ODEs[D2], *ACM Trans. Math. Software*, Vol. 7, No. 2, 1981, pp. 223-229.