

风沙两相流中近沙床颗粒应力分析

张宇 杨杰程 刘大有

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要 本文通过计算流体力学和颗粒离散元相结合的方法对某一风沙流场中近沙床颗粒应力的分布进行了二维数值模拟。结果表明, 在高度 7mm 以上颗粒碰撞不必考虑。但是从碰撞开始减少到基本没有碰撞的区域存在一个过渡层。打击颗粒和起跳颗粒都必须穿越过渡层。颗粒“雷诺应力”存在于沙床 250mm 以内。250mm 以上, 只有气相剪切应力存在。

关键词 风沙流, 颗粒应力, 颗粒碰撞

引言

我国沙漠面积广阔, 很多地方还以惊人的速度发生沙漠化, 只有通过风沙运动规律的科学研究才能寻找到防止沙漠化的工程手段。风沙运动的研究已经有上百年的历史, 但是很多风沙流中的基本问题还没有得到有效解决。比如, 人们通过实验和野外观测知道风沙流的运动有三种形式: 蠕移、跃移、悬移[1]。但是, 三种形式该如何划分, 至今没有一个确定的答案。研究风沙运动的方法也有很多, 比如常见的风速廓线的方法, 击溅函数等方法。风速沿高度的对数分布只能表征沙床表面一定高度以上的气流速度分布, 对于沙床附近颗粒运动对速度分布的影响需要通过经验公式来修正。击溅函数则认为沙粒的碰撞只发生在某一高度, 而且这种碰撞近似于颗粒和壁面之间的碰撞。起跳颗粒的速度, 角度概率完全由击打颗粒决定。但是, 传统的击溅函数是在没有风场的条件下给出的, 处于堆积状态[2-5]。在实际风沙流中, 有风场, 还有过渡层存在, 在这种条件下击溅函数是否正确还不能肯定。最近, 有学者通过数值模拟和实验, 在不同风场条件下, 对起跳颗粒速度和角度的分布函数进行了研究。但是研究主要是针对蠕移区域进行的, 对于跃移区域的颗粒运动和风场都做了不同程度的假设[6][7]。因此, 蠕移区和跃移区之间可能存在的过渡层的影响也很难在研究中体现。我们认为, 最好是使用统一的方法研究风沙流中的颗粒运动, 不区分蠕移与跃移, 因而也不排斥过渡层的存在。本文通过自行编制的统一的计算流体力学 (CFD) 与颗粒离散元 (DEM) 相结合的方法对某一风沙流场中近沙床的颗粒运动进行了二维数值模拟。气相湍流采用了 $k-\varepsilon$ 模型, 颗粒的碰撞采用了软球模型[8]。对计算结果的统计发现, 颗粒的碰撞仅存在于沙床上方 7mm 以下, 3-5mm 为过渡层。颗粒雷诺应力存在于沙床上方 250mm 以下, 随着高度的增加, 颗粒雷诺应力急剧下降。在沙床高度 250mm 以上, 只有气相剪切应力起作用。在那里, 虽然颗粒和气相之间仍然有速度差, 但是颗粒的浓度非常低, 产生的单位体积相间曳力 \mathbf{f}_{drag} 很小, 因而不会对气相剪切应力造成影响。

1. 数值模拟

算例描述[8]

本文计算的算例描述如下: 颗粒的运动采用离散颗粒动力学方法模拟, 气体的运动采用流体力学方法, 用 $k-\varepsilon$ 模型模拟湍流, 颗粒-颗粒碰撞采用软球模型。流体计算时间步长为 2.0×10^{-5} s, 颗粒运动计算时间步长为 2.0×10^{-6} s。计算区域为高 0.35m, 长 0.15m 的二维矩形区域, 计算区域示意图见图 1 所示。在进出口边界采用周期性边界条件。在上边界, 气流的边界条件是指定剪应力, 在本算例中

该剪应力为 14.7Pa (与之对应的摩阻速度 $u_* = 3.5\text{m/s}$), 颗粒相采用镜面反射边界条件: 如有颗粒以 (u_p, v_p) 速度离开上边界, 则同时就会有颗粒以 $(u_p, (-v_p))$ 速度从上边界进入计算区域。

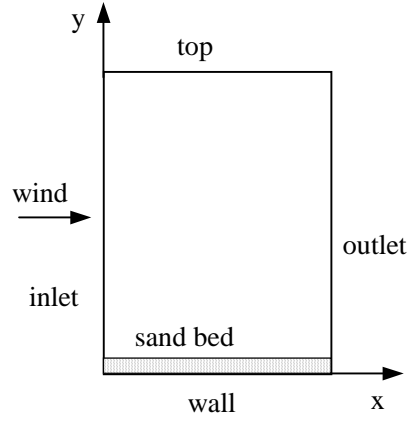


图 1 计算区域示意图

气流密度为 1.2kg/m^3 , 动力粘度为 $1.785 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 颗粒直径为 0.33mm , 密度为 2650kg/m^3 , 颗粒刚度系数为 1500N/m , 阻尼系数取 $0.002 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, 摩擦系数为 0.4 。采用比实际较软的颗粒进行模拟, 是为了可以用比较长的时间步长来计算, 因而可以减少运算的步数。本文选取的颗粒直径大于实际沙粒平均直径, 为带动沙粒, 摩阻速度也接近风沙运动中摩阻速度的上限。这些做法, 都是为了能减少运算时间, 尽快得到收敛的结果, 验证模型和方法。

计算模型

气相输运方程

气体的连续性方程和动量方程表述如下:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f) + \nabla \cdot (\alpha_f \rho_f \mathbf{u}_f) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f \mathbf{u}_f) + \nabla \cdot (\alpha_f \rho_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) = -\alpha_f \nabla p + \nabla \cdot (\alpha_f \boldsymbol{\tau}_f) + \alpha_f \rho_f \mathbf{g} - \mathbf{f}_{drag} \quad (2)$$

其中, ρ_f 是气体的表观密度, \mathbf{u}_f 是气体的速度, p 是气体的压力。 $\boldsymbol{\tau}_f$ 是气体的剪切应力。 α_f 是流体的体积分数。 \mathbf{f}_{drag} 是流体和颗粒之间的曳力。

$\boldsymbol{\tau}_f$, α_f 和 \mathbf{f}_{drag} 可以用下面的公式计算:

$$\boldsymbol{\tau}_f = -\frac{2}{3}(\mu_{eff} \nabla \cdot \mathbf{u}_f) \mathbf{I} + \mu_{eff} [\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T] \quad (3)$$

$$\alpha_f = 1 - \sum_{k=1}^N V_{pk} / \Delta V \quad (4)$$

$$\mathbf{f}_{drag} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{drag,i} \quad (5)$$

μ_{eff} 是流体的涡粘度。 \mathbf{I} 代表了单位张量， ΔV 是一个控制体的体积， V_{pk} 是 k 颗粒的体积。 N 是在控制体里颗粒的数目。

单颗粒受到的曳力，可以表示为：

$$\mathbf{F}_{drag} = \frac{C_{d0}}{8} \pi d_p^2 \rho_f \alpha_f^2 |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \alpha_f^{-\chi} \quad (6)$$

$$\chi = 3.7 - 0.65 \exp[-(1.5 - \log \text{Re}_p)^2 / 2] \quad (7)$$

$$C_{d0} = \begin{cases} 24(1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}) / \text{Re}_p, & \text{Re}_p < 1000 \\ 0.44, & \text{Re}_p \geq 1000 \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{Re}_p = \frac{\alpha_f \rho_f d_p |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p|}{\mu_f} \quad (9)$$

C_{d0} 是阻力系数。 Re_p 是颗粒雷诺数。对于气相湍流，采用标准 $k - \varepsilon$ 模型。

颗粒运动方程

颗粒平动和转动可以用如下方程来描述：

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_{pl}}{dt} = m_p \mathbf{g} + \mathbf{F}_{drag,l} + \sum_{k=1}^{n_c} (\mathbf{f}_{n,lk} + \mathbf{f}_{t,lk}) \quad (9)$$

$$I_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_l}{dt} = \sum_{k=1}^{n_c} \mathbf{T}_{lk} \quad (10)$$

$$I_p = \frac{1}{10} m_p d_p^2 \quad (11)$$

m_p ， \mathbf{u}_p 和 $\boldsymbol{\omega}$ 分别表示 l 颗粒的质量，平动速度和角速度。 $\mathbf{f}_{n,lk}$ 和 $\mathbf{f}_{t,lk}$ 分别表示当 l 颗粒和 k 颗粒碰撞时产生的切向和法向的作用力。 n_c 表示所有和 l 颗粒发生碰撞的颗粒数目， I_p 是颗粒的转动惯量。

颗粒碰撞模型

碰撞模型，我们选取的是软球模型，因为软球模型能够给出当碰撞发生时力的详细变化。模型用下面的公式描述[9][10][11]:

$$\mathbf{f}_{n,lk} = -k_s \boldsymbol{\delta}_n - \eta \mathbf{v}_{n,lk} \quad (12)$$

$$\mathbf{f}_{t,lk} = \begin{cases} -k_s \boldsymbol{\delta}_t - \eta \mathbf{v}_{t,lk}, & |\mathbf{f}_{t,lk}| \leq \mu_s |\mathbf{f}_{n,lk}| \\ -\mu_s |\mathbf{f}_{n,lk}| \mathbf{t}, & |\mathbf{f}_{t,lk}| > \mu_s |\mathbf{f}_{n,lk}| \end{cases} \quad (13)$$

$$\mathbf{v}_{n,lk} = (\mathbf{v}_{lk} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_{t,lk} = \mathbf{v}_{lk} - \mathbf{v}_{n,lk} \quad (15)$$

$$\mathbf{v}_{lk} = \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{R}_l - \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{R}_k \quad (16)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}_l / |\mathbf{R}_l| \quad (17)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{v}_{t,lk} / |\mathbf{v}_{t,lk}| \quad (18)$$

k_s 和 η 是颗粒的刚度和阻尼系数。 μ_s 为摩擦系数， $\boldsymbol{\delta}$ 是颗粒由于碰撞应力产生的应变。 \mathbf{v} 是发生碰撞两个颗粒的相对速度。 \mathbf{R} 是从碰撞颗粒中心到碰撞点的矢量， \mathbf{n} 是单位法矢量， \mathbf{t} 是单位切矢量。

2. 数据处理

颗粒“雷诺应力” R_{ij} 和碰撞应力

以欧拉-欧拉观点看，颗粒相平均速度 \bar{u}_{pi} 和颗粒“雷诺应力” R_{ij} 可以用以下公式表达：

$$\bar{u}_{pi} = \frac{\sum_{k=1}^N u_{pi,k}}{N} \quad (19)$$

$$\overline{u'_{pi} u'_{pj}} = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{pi,k} - \bar{u}_{pi})(u_{pj,k} - \bar{u}_{pj})}{N} \quad (20)$$

$$R_{ij} = -\rho_m \overline{u'_{pi} u'_{pj}} \quad (21)$$

这里 ρ_m 是颗粒表观密度。需要指出的是，这里的“雷诺应力”代表的是由于颗粒进出控制体所造

成的动量输运, 经过推导可以证明, 其表达形式和气相湍流中雷诺应力的表达形式类似, 因而借用“雷诺应力”的名称。当颗粒碰撞发生时, 程序自动记录下每一个碰撞颗粒的受力情况。但在统计颗粒的碰撞应力时, 并不是每一对颗粒-颗粒碰撞都需要考虑。图 2 解释了选择统计颗粒的标注: 即如果统计高度为 h 处的颗粒碰撞, 碰撞颗粒的中心位置必须分别在 h 的上下两侧。图中用阴影标记的颗粒为统计样本。

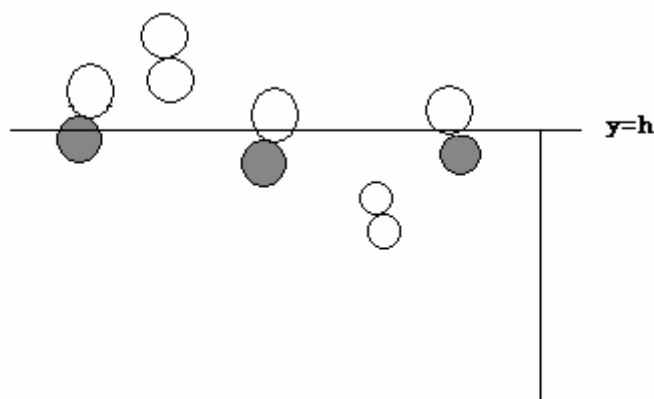


图 2 碰撞颗粒的选择

3. 结果和讨论

颗粒碰撞对数

这里所谓的“碰撞”是广泛意义上的碰撞。在计算区域底部, 颗粒堆积在一起, 颗粒之间的接触在这里也被看作是一种“长时间的碰撞”。图 3 给出了统计平均的颗粒碰撞对数沿高度的变化情况。从中可以看出, 在高于沙床底部 2.3mm 的区域内, 颗粒碰撞的对数超过 3500 对。随着高度的增加, 碰撞对数急剧下降, 当高度达到 7mm 的时候, 碰撞对数几乎为 0。这个结果说明, 颗粒碰撞确实仅仅存在于某高度以内, 超过该高度, 颗粒的碰撞可以完全忽略。但是, 从图 3 还可以看出, 从碰撞发生开始减少的区域到碰撞很少发生的区域存在一个过渡层 (3mm-5mm)。打击颗粒和起跳颗粒都必须穿越这个过渡层。如果颗粒在过渡层发生碰撞, 则这种碰撞是随机发生的, 会破坏起跳颗粒和打击颗粒的相关性。这种影响, 在以往的研究中是较少涉及的。引入激溅函数研究床面过程实际上是忽略了这一过渡层的存在。

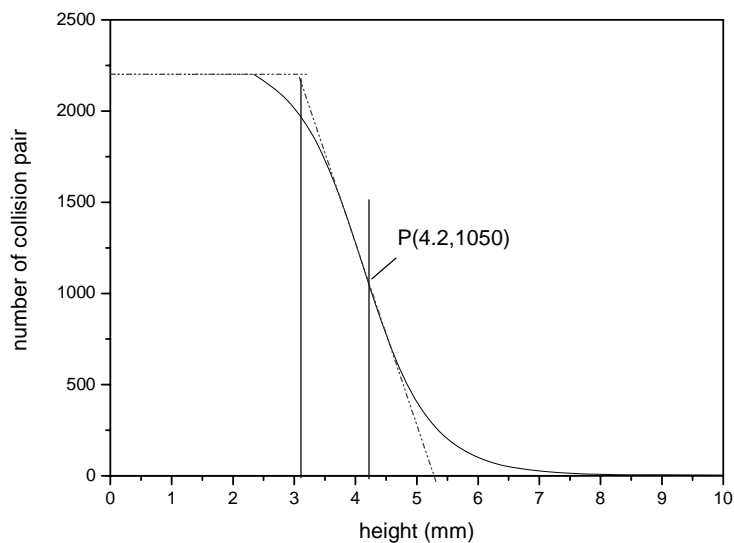
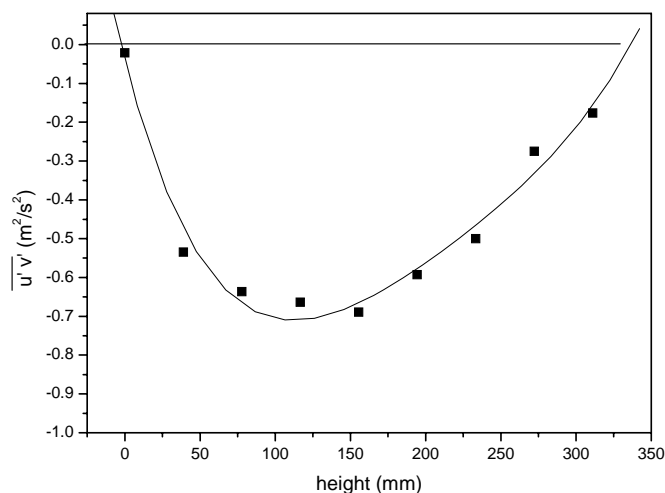


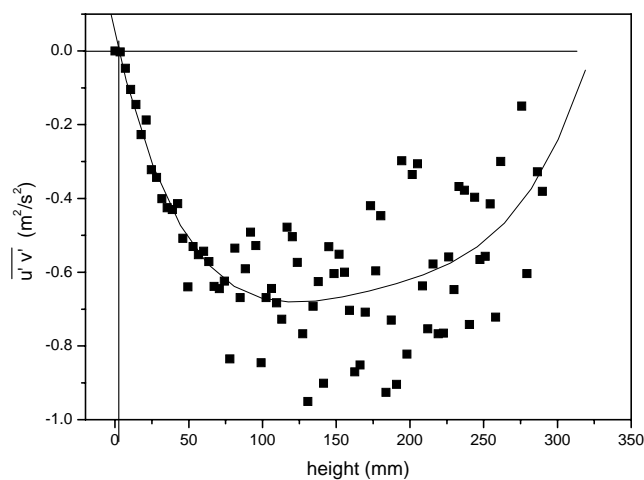
图 3 碰撞对数沿高度的变化

颗粒脉动速度关联

图 4 给出了颗粒 x 和 y 方向脉动速度的关联 $\overline{u'_p v'_p}$ 沿着高度的变化。图 4a 和 4b 的统计方法不同，图 4a 是把整个高度分成 10 个空间来统计的，图 4b 是把整个空间分成 100 份来统计的。从图 4a 中可以看出，随着高度的增加颗粒脉动速度关联的绝对值先增加后减小。图 4b 给出了相同的趋势。但是，显然统计的涨落更大了，这是因为如果把空间分为 100 份，每份空间中的粒子数目都比较少的缘故。尽管如此，图 4a 和 4b 的拟合曲线还是非常近似的。



(A) 沿高度方向分 10 个取样空间



(B) 沿高度方向分 100 个取样空间

图 4 颗粒脉动速度关联沿着高度的变化

雷诺应力

图 5 给出了雷诺应力沿着高度的变化情况。在颗粒堆积区，颗粒雷诺应力为 0，因为此时没有颗粒运动，也就没有所谓的颗粒雷诺应力了。高度稍微增加，颗粒雷诺应力迅速上升，随着高度的增加颗粒雷诺应力随之减少。当高度达到 250mm 以上的时候，雷诺应力几乎为 0。也即，针对本文讨论的工况，颗粒雷诺应力只是在沙床底部以上 250mm 区域以内起作用。

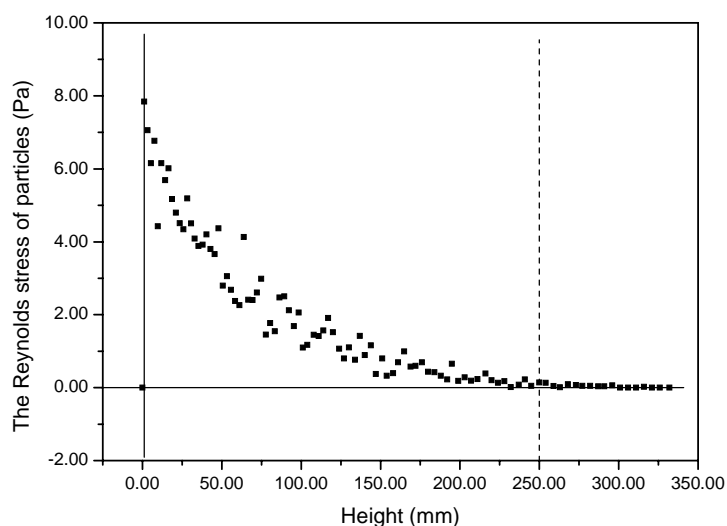


图 5 颗粒雷诺应力沿沿高度方向分 100 个取样空间高度的变化

气体剪切应力和两相间的曳力

在气象学界一般认为，在大气边界层的近地层（高约 10~20 米）内，剪切应力 $\rho_f u_*^2$ 不随高度变化，本例中取 $\rho_f u_*^2 = 14.7\text{Pa}$ 作为计算域上边界的剪切应力边界条件。图 6 给出了气体剪切应力沿高度的变化情况。随着高度的增加，气体的剪切应力随之增加。当高度超过 250mm 的时候，气体剪切应力达到 14.7Pa。这和设置的上边界的气体剪切应力是一致的。14.7Pa 是假设的近地边界层的剪切力，在整个近地边界层，这个剪切力的数值应该处处相等。从图 6 可以看出，250mm 以上的区域为近地边界层的气体主流区域。

还需要指出，在本文的计算区域内是没有压力梯度的。当流动达到稳态的时候，x 方向气体的动量方程可以表示为如下形式：

$$\frac{\partial(\alpha_f \tau_{f,yx})}{\partial y} = f_{drag,x} \quad (22)$$

该式的物理含义表达如下：当运动达到稳态，气体剪切应力的梯度就等于这层气相对颗粒相的总曳力。当高度超过 250mm 时，气体的剪切应力梯度为 0。此时，颗粒仍然被气体的曳力所驱动，只是由于颗粒数目太少，因而总曳力也很小，从而没有引起气体剪切应力的变化。

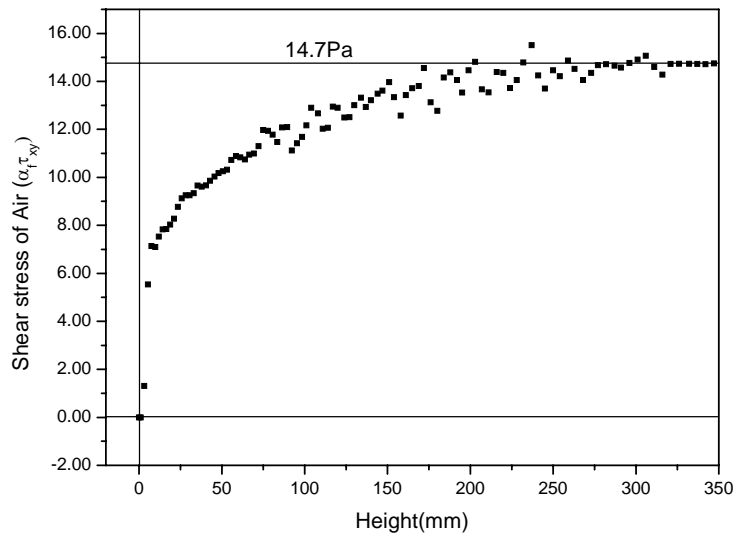


图 6 气体剪切应力沿高度的变化

气体剪切应力和颗粒雷诺应力之和

图 7 给出了气体剪切应力和颗粒雷诺应力之和。从中可以看出，在沙床底部 25mm 以上，合力基本达到 14.7Pa。这说明，在这个区域，气体损失的剪切应力转化为了颗粒的雷诺应力。事实上，在整

个计算区域, 各相的应力之和都应该等于 14.7Pa。然而, 从图 7 可以看出, 当高度小于 25mm 的时候, 气体剪切应力和颗粒雷诺应力之和明显小于 14.7Pa。这说明在这个区域, 除了以上两种应力还应该有其他应力的存在。

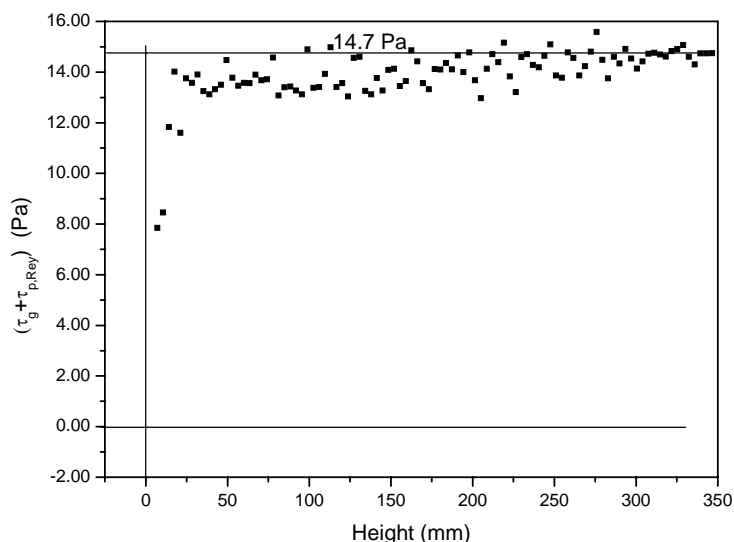


图 7 气体剪切应力和颗粒雷诺应力之和沿高度的变化

广义碰撞应力

图 8 (a) 给出了在 3mm 以下, 3-6.58s 的广义碰撞应力的统计结果。从中可以看出, 在计算区域底部, 碰撞应力达到 13Pa。随着高度的增加, 碰撞应力迅速减少。当高度达到 1mm 以上时, 碰撞应力出现了波动。但这并不是由数据统计涨落造成的, 图中每一个数据点都是至少 500 个统计样本平均得到的。图 8 (b) 给出了更长时间间隔的统计结果 (3s-8.98s), 从中可以看出, 碰撞应力的变化趋势和图 8 (a) 是完全相同的。但是碰撞应力的波动要小得多。这可能是由于, 碰撞应力的波动是由于计算区域底部颗粒的运动没有达到完全稳态造成的。这里颗粒运动速度非常慢, 它们运动达到稳定所需的时间也很长, 8.98s 还不够长。当统计时间间隔小于颗粒物理运动周期的时候, 统计结果也会相应出现波动。

还需要指出的是, 从 3mm 到 25mm 这个区域内的颗粒不足以用来统计颗粒的碰撞应力。对于颗粒雷诺应力, 如果在这个空间细化, 统计样本数也不足。在今后的工作中, 针对这一区域还需要做进一步的研究。

图 9 给出了气体剪切应力, 颗粒雷诺应力和颗粒碰撞应力的作用范围。从中可以看出, 颗粒碰撞仅发生在离沙床底部很近的区域内。

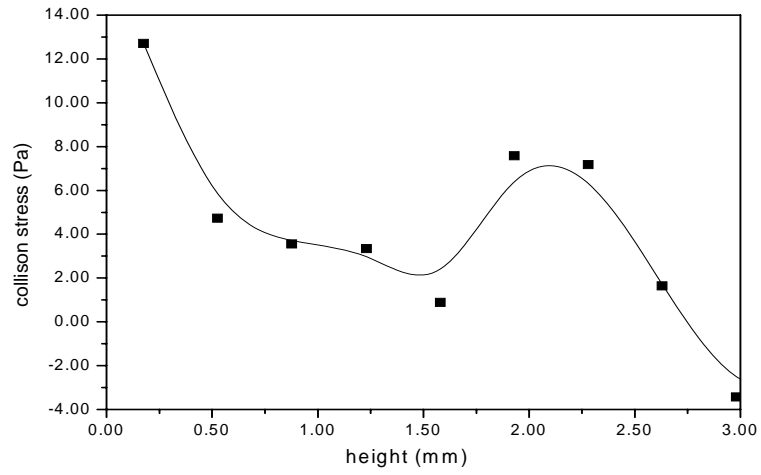


图 8 (a) 颗粒碰撞应力随高度的变化 (3s-6.58s)

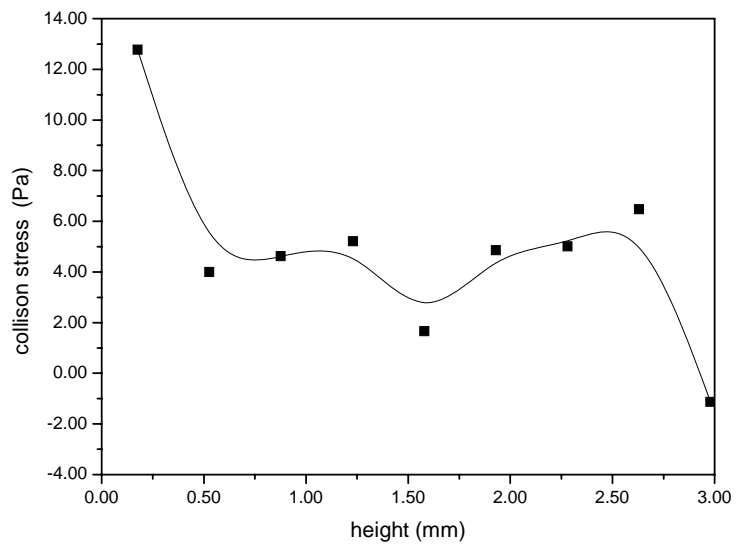


图 8 (b) 颗粒碰撞应力随高度的变化 (3s-8.98s)

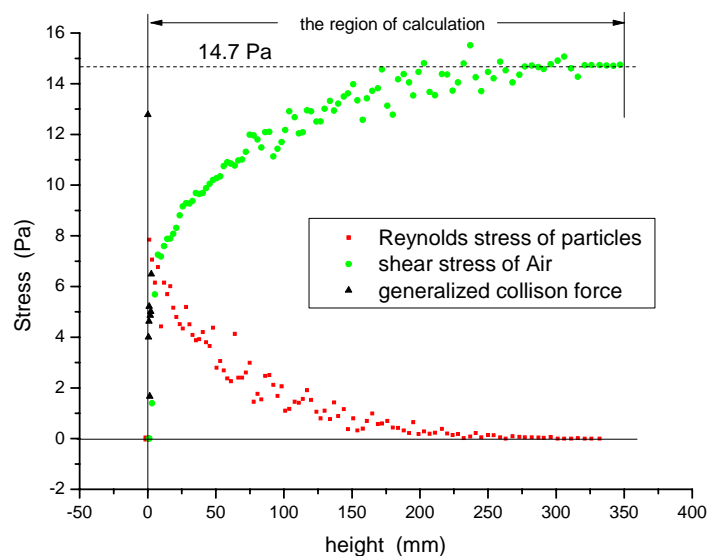


图9 三种应力的作用范围

4. 结论

在以上计算的算例中,当高度高于7mm时,颗粒的碰撞可以忽略。但是,在颗粒碰撞开始减少到颗粒碰撞很少发生的区域之间存在一个过渡区域(3mm-5mm)。无论是起跳颗粒还是碰撞颗粒,都必须经过这个区域。而这个区域中颗粒的碰撞完全是随机的,这种碰撞会破坏打击颗粒和起跳颗粒之间的相关性。当这个过渡区域足够薄的时候,这种影响才可以被忽略,起跳颗粒的速度和角度分布才可以写成由打击颗粒速度和角度决定的概率密度分布函数。

在高于沙床底部25mm-250mm的区域内,气体剪切应力和颗粒雷诺应力同时存在,在此范围内,气体剪切应力随高度增加而颗粒的雷诺应力则随高度减小,两者之和基本保持不变。在低于3mm的范围内,颗粒碰撞应力明显起作用。在3mm-25mm的范围内,由于缺少样本数,没有细化统计其颗粒碰撞应力和颗粒雷诺应力。在今后的工作中,需要做更详细的研究。

致谢

本研究得到自然科学基金重点项目(10532030)和中国科学院知识创新工程领域前沿项目资助。感谢亢力强博士在程序编制方面做的工作。

参考文献

- [1] Yintang Li, Yi Guo(2008). Numerical simulation of aeolian dusty sand transport in a marginal desert region at the early entrainment stage. *Geomorphology*,(100), 335-344.

- [2] Anderson, R.S., Haff P.K.(1991). Wind modification and bed response during saltation of sand in air. *Acta Mechanica*, (suppl.1), 21-51.
- [3] McEwan, I.K., Willetts, B.B.(1991). Numerical model of the saltation cloud, *Acta Mechanica*, (suppl.1), 53-66.
- [4] Anderson, R.S., Haff, P.K. (1988). Simulation of eolian saltation, *Science*, (241), 820-823.
- [5] McEwan, I.K., Willetts, B.B.(1993). Adaptation of the near-surface wind to the development of sand transport. *Journal of Fluid Mechanics*, (252), 99-105.
- [6] Qicheng Sun, Guangqian Wang.(2001). DEM application to Aeolian sediment transport and impact process in saltation. *Particle Science and Technology*, (19), 339-353.
- [7] Xiaojing Zheng, Wei Zhu, Li Xie.(2008). A probability density function of liftoff velocities in mixed-size wind sand flux. *Science in China Series G*, 51(8),976-985
- [8] 亢力强, 博士后出站报告, 中国科学院力学研究所, 2008.
- [9] Liqiang Kang , Liejin Guo, Dayou Liu(2008). Reconstructing the vertical distribution of the aeolian saltation mass flux based on the probability distribution of lift-off velocity. *Geomorphology*, 96, 1-15
- [10] Di Felice, R. (1994). The voidage function for fluid-particle interaction systems. *International Journal of Multiphase Flow*, 20, 153-159.
- [11] Crowe, C.T., Sommerfeld, M., Tsuji, Y. (1998). *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, CRC Press, Boca Raton.

Stress Analysis of the near Ground Particles in an Aeolian Sand Movement

Yu Zhang, Jiecheng Yang, Dayou Liu

(The Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 100190, Beijing)

Abstract: The distribution of particle stresses near the ground was investigated using a method of coupling CFD (Computational Fluid Mechanics) and DEM (Discrete Element Method). Results show that the collision between particles rarely happens over the height of 7mm above the sand bed bottom; however there is still a transition layer between the region with high collision frequency of particles and the region with low collision frequency of particles. Both the impact and the jumping particles have to go across that transition layer. The results also show that the Particle "Reynolds stress" only plays role under the height of 250mm above the sand bed bottom. For the region above that height only air shear stress needed to be considered.

Key words: Aeolian sand; Particle stress; Particle collision