

弹性悬链线方程参数变换法及其工程应用¹⁾

范会渠²⁾

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要 建立了弹性锚泊线模型, 该模型根据微段垂向力学平衡关系, 通过引进一个变换参数 u ($\sinh u = dy/dx$), 得到了弹性悬链线的参数方程. 结合工程实际, 将该模型用于海洋工程中的锚泊线, 给出锚泊线拉力公式, 与求解算法. 该算法简单有效, 易于编程实现.

关键词 弹性悬链线, 参数方程, 锚泊线

中图分类号: O29 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2010)02-032-04

THE PARAMETER TRANSFORMATION METHOD FOR ELASTIC CATENARY EQUATION AND ITS APPLICATION IN ENGINEERING¹⁾

FAN Huiqu²⁾

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract In this letter, the model of elastic catenary is established by introducing a transformation parameter u ($\sinh u = dy/dx$), and the corresponding parametric equation is obtained. The tension of the mooring line in ocean engineering can be calculated by the model. The algorithm is simple and effective, and easy to program in computer language.

Key words elastic catenary, parameter equation, mooring line

在海上进行诸如钻井、采油等生产或工程作业时, 都须使船舶或海洋平台在海上保持一个比较固定的位置, 为满足工作要求, 必须对其进行定位. 锚泊定位由于结构简单、工作安全、可靠、经济性好等优点, 成为移动式海洋结构物在海洋中定位的主要形式^[1]. 传统的锚泊线模型一般采用经典悬链线模型, 但是当锚泊线很长或拉力很大时, 必须考虑锚泊线本身的弹性. 本模型引入一个参数 u (其中 $\sinh u = dy/dx$)^[2]. 通过参数变换, 推导出弹性悬链线的参数方程, 并得到力和锚泊线几何尺寸之间的关系. 该模型的特点是思路清晰, 推导简单, 物理意义明确.

1 参数变换法

1.1 弹性锚泊线参数方程

如图 1 所示, 锚泊线两端固定, 上端点处锚泊线受到拉力为 T , 其水平分量为 H , 竖直分量为 V .

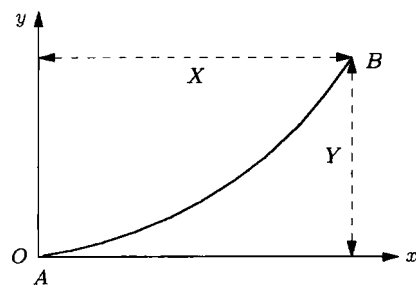


图 1 锚泊线示意图

微段竖直方向的平衡 (图 2) 可得

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = W \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (1)$$

式中, H 为拉力的水平分量, W 为锚泊线重度 (单位为 N/m).

2007-05-17 收到第 1 稿, 2008-03-16 收到修改稿.

1) 中科院知识创新工程 (KJ9X-YW-L02) 以及 863 计划 (2006AA09A103-4) 资助项目.

2) E-mail: fanhuiqu@126.com

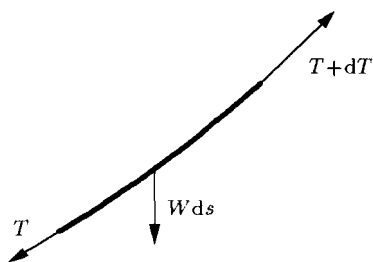


图 2 锚泊线微段受力示意图

假设在不受力状态下的横截面积为 \$A_0\$, 沿弧长的线重度为 \$W_0\$. 在受拉后, 截面积变为 \$A\$, 线重度变为 \$W\$. 设 \$E\$ 为轴向弹性模量, \$T\$ 为张力. 由 Hooke 定理和根据质量守恒, 受力前后质量不变, 有

$$W = W_0 / [1 + T / (EA_0)] \tag{2}$$

再根据拉力 \$T\$ 与水平分量间的几何关系

$$T = H\sqrt{1 + y'^2} \tag{3}$$

整理上式得到

$$Hy'' = \frac{W_0\sqrt{1 + y'^2}}{1 + T / (EA_0)} \tag{4}$$

引进如下变换

$$\epsilon = \frac{H}{EA_0}, \quad a = \frac{W_0}{H}, \quad \frac{dy}{dx} = \sinh u \tag{5}$$

将式 (5) 代入式 (4), 化简整理后得到

$$\cosh u du = \frac{a \cosh u}{1 + \epsilon \cosh u} dx \tag{6}$$

用 \$du\$ 表达 \$dx\$, 并对 \$u\$ 积分得到

$$x = \frac{1}{a}(u + \epsilon \sinh u) + C_1 \tag{7}$$

同理可以得到

$$y = \frac{1}{a} \left(\cosh u + \frac{1}{2} \epsilon \cosh^2 u \right) + C_2 \tag{8}$$

由以上推导可得弹性锚泊线的参数方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{a}(u + \epsilon \sinh u) + C_1 \\ y &= \frac{1}{a} \left(\cosh u + \frac{1}{2} \epsilon \cosh^2 u \right) + C_2 \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

从该参数方程可以看出: 如果 \$\epsilon \to 0\$, 则该方程蜕化为经典的悬链线方程. 无量纲数 \$\epsilon\$ 的物理意义为: 锚泊线上端拉力水平分量 \$H\$ 与锚泊线轴向弹性刚度 \$EA_0\$ 之比值, 是弹性模型区别经典悬链线方程

的关键因素, 是考虑弹性后对经典悬链线方程的弹性修正参数.

2 锚泊线端点受力

2.1 锚泊线拉力方程

当锚泊线在两点间悬挂 (图 1), 设在水平方向的投影长度为 \$X\$, 竖直方向的投影长度为 \$Y\$, 上端点处拉力 \$T\$ 的水平分量为 \$H\$, 竖直分量为 \$V\$. 则有

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{a} [(u_1 + \epsilon \sinh u_1) - (u_0 + \epsilon \sinh u_0)] \\ Y &= \frac{1}{a} \left[\left(\cosh u_1 + \frac{1}{2} \epsilon \cosh^2 u_1 \right) - \left(\cosh u_0 + \frac{1}{2} \epsilon \cosh^2 u_0 \right) \right] \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

其中 \$u_1, u_0\$ 分别为参数 \$u\$ 在上端点、下端点的值.

由式 (5) 可得

$$\sinh u_1 = \frac{V}{H}, \quad \sinh u_0 = \frac{V - G}{H} \tag{11}$$

其中, \$G\$ 为锚泊线的重量. 整理前面结果得^[3]

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{HL_0}{EA_0} + \frac{H}{W_0} \left[\sinh^{-1} \frac{V}{H} - \sinh^{-1} \frac{V - G}{H} \right] \\ Y &= \frac{L_0}{EA_0} \left(V - \frac{G}{2} \right) + \frac{H}{W_0} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V - G}{H} \right)^2} \right] \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

其中, \$L_0\$ 为锚泊线未拉伸时的长度. 因此对于已知锚泊线的线重度 \$W_0\$, 重量 \$G\$, 原长 \$L_0\$ 和悬挂位置, 即可用数值方法^[4,5] 求出 \$H, V\$.

式 (12) 的物理意义:

(1) 锚泊线在水平方向的投影长度由两部分组成:

- 1) 原始长度为 \$L_0\$ 的锚泊线在两端受到 \$H\$ 的拉力后的弹性伸长;
- 2) 按照经典悬链线方程求得锚泊线在水平方向的投影长度.

(2) 锚泊线在竖直方向的投影长度由两部分组成:

- 1) 原始长度为 \$L_0\$ 的锚泊线在重力场中受到上端拉力为 \$V\$, 下端拉力为 \$V - G\$ 后的弹性伸长;
- 2) 按照经典悬链线方程求得锚泊线在竖直方向的投影长度.

从方程的上述特性可以看出, 弹性变形和悬链线的几何特征都得到明确体现.

2.2 锚泊线拉力求解

式 (12) 虽然只有两个式子, 在其他参数已知的情况下, 求出 H, V 就能得到锚泊线的拉力. 但是, 由于方程中含有反双曲正弦函数, 方程的非线性很强, 作者要从方程组的物理性质出发, 设计一种简单、高效、收敛性好的算法. 设计出了计算程序流程. 该算法流程的核心是 H, V 的调整方案, 如果方案合理, 则能够获得很好的收敛效果. 根据计算经验, 给出如下调整方案:

引入 $\Delta X, \Delta Y$, 调整系数 ω , 其中 $\Delta X, \Delta Y$ 的定义为

$$\Delta X = X_{\text{new}} - X, \quad \Delta Y = Y_{\text{new}} - Y \quad (13)$$

当 $|\Delta X| > \varepsilon$ 或 $|\Delta Y| > \varepsilon$ 时 (ε 为容许误差), 按照下步进行调整 H, V

$$\left. \begin{aligned} H_{\text{new}} &= H \left[1.0 - \omega \left(\frac{\Delta X}{X} \right) \right] \\ V_{\text{new}} &= V \left[1.0 - \omega \left(\frac{\Delta Y}{Y} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

直到 H 和 V 的值收敛. 根据计算经验, ω 取值在 (0,1] 能够较好收敛, ω 取值较小, 收敛速度慢, 取 1 比较合适.

3 算例及分析

三成份锚泊线 (图 3), 第 1 段、第 3 段为无档锚泊线, 第 2 段为螺旋钢缆. 具体参数如表 1 (数据来源: 中海油概念设计 [6]).

表 1

名称	直径 / 单位	长度 / m	水下重 / $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})$	轴向弹性刚度 / (10^6N)	破断拉力 / (10^3N)
无档锚泊线	137	150	326	/	16942
螺旋钢缆	128	1300	69.8	1429	15730

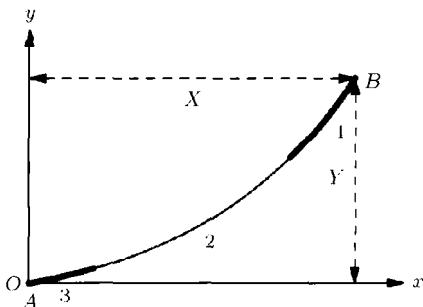


图 3 三成份锚泊线示意图

锚泊线初始悬挂于 (0,0) 和 (1265,925) 两点之间 (坐标单位为 m), 该位置为设计配置, 锚泊线下端

固定, 上端位置随平台缓慢变化, 考虑如下两种情况:

(1) 锚泊线上端随平台只作水平移动, 垂向坐标不变. 锚泊线拉力 - 位移关系如图 4 所示.

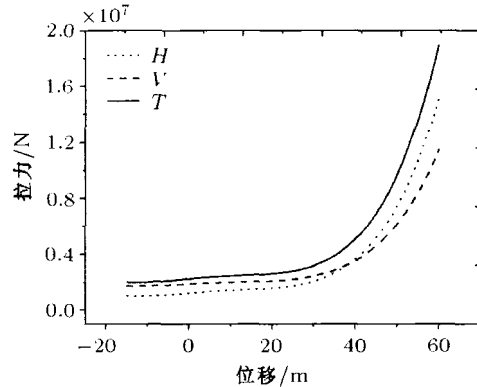


图 4 锚泊线拉力 - 位移关系

(2) 锚泊线上端随平台只作垂向移动, 水平坐标不变. 锚泊线拉力 - 位移关系如图 5 所示.

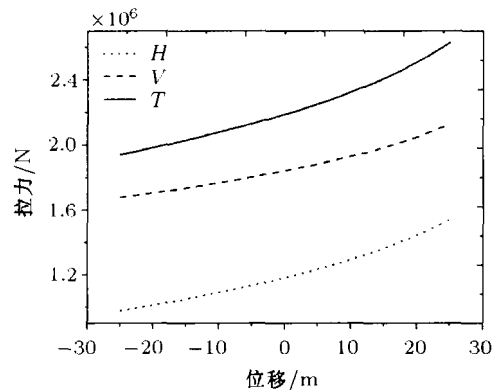


图 5 锚泊线拉力 - 位移关系图

在锚泊线两端点间距离小于锚泊线原始长度, 锚泊线上端所受力的大小随两端点间距离变大而变大, 但是变化缓慢; 当两端点间距离大于锚泊线原始长度时, 锚泊线上端所受力迅速增大, 锚泊线的弹性占主导地位; 锚泊线随平台水平运动时, 锚泊线拉力的变化幅度大于锚固点仅随平台垂向运动, 即就是说锚泊线对平台的水平约束作用大于垂向约束. 当得到拉力 - 位移关系后, 可以将锚泊线看作非线性弹簧, 用来分析平台的耦合运动 [7~9].

4 结 论

深海锚泊线不能忽略材料弹性的影响, 本文建立

(下转第 15 页)

- Hydraulic Engineering*, 2006, 37(9): 1044~1050(in Chinese))
- 8 Morgan IL, et al. Examination of concrete by computerized tomography. *ACI Journal*, 1980, 77(1): 23~27
 - 9 Oral Buyukozturk. Imaging of concrete structures. *NDT&E. International*, 1998, 31 (4): 233~243
 - 10 Stock SR, Naik NK, Wilkinson AP, et al. X-ray micro tomography (microCT) of the progression of sulfate attack of cement paste. *Cement and Concrete Research*, 2002, 32(10): 1673~1675
 - 11 Chotard TJ, Boncoeur-Martel MP, Smith A, et al. Application of X-ray computed tomography to characterize the early hydration of calcium aluminates cement. *Cement & Concrete Composites*, 2003, 25(1): 145~152
 - 12 John SL, Denis TK, Surendra PS. Measuring three-dimensional damage in concrete under compression. *ACI Materials Journal*, 2001, 98(6): 465~475
 - 13 陈厚群, 丁卫华, 党发宁等. 混凝土 CT 图像中等效裂纹区域的定量分析. 中国水利水电科学研究院学报, 2006, 4(1): 1~7 (Chen Houqun, Ding Weihua, Dang Faning, et al. Quantitative analysis of equivalent crack region in CT images of concrete. *Institute of Water Resources and Hydropower Research*, 2006, 4(1): 1~7(in Chinese))
 - 14 陈厚群. 混凝土大坝抗震中的力学问题. 力学与实践, 2006, 28(2): 1~8 (Chen Houqun. *Mechanics problems of seismic study on concrete large dams. Mechanics in Engineering*, 2006, 28(2): 1~8 (in Chinese))
 - 15 丁卫华, 陈厚群, 张建军等. 高应变率作用下混凝土破裂过程的 X 射线 CT 观测. 建筑结构学报, 2006, 27(增刊 2): 758~762 (Ding Weihua, Chen Houqun, Zhang Jianjun, et al. X-ray CT detecting on concrete fracture process under high strain rate. *Journal of Building Structures*, 2006, 27(Supp2): 758~762(in Chinese))
 - 16 田威, 党发宁, 梁昕宇等. 混凝土细观破裂过程的 CT 图像分析. 武汉大学学报, 2008, 41(2): 69~72 (Tian Wei, Dang Faning, Liang Xinyu, et al. CT image analysis of meso-fracture process of concrete. *Engineering Journal of Wuhan University*, 2008, 41(2): 69~72(in Chinese))
 - 17 党发宁, 刘彦文, 丁卫华等. 基于破损演化理论的混凝土 CT 图像定量分析. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(8): 1588~1594 (Dang Faning, Liu Yanwen, Ding Weihua, et al. Quantitative analysis of concrete CT image based on damage-fracture evolution theory. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(8): 1588~1594(in Chinese))
 - 18 党发宁. 岩土破损演化理论 (I): 破损空间. 岩土力学, 2005, 26(4): 513~519 (Dang Faning. *Damage-fracture evolution theory of rock and soil(I): Damage-fracture space. Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(4): 513~519(in Chinese))
 - 19 田威, 党发宁, 刘彦文等. 支持向量机在混凝土 CT 图像分析中的应用. 水利学报, 2008, 39(7): 889~894(Tian Wei, Dang Faning, Liu Yanwen, et al. Application of support vector machine to concrete CT image analysis. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2008, 39(7): 889~894(in Chinese))
 - 20 党发宁, 尹小涛, 丁卫华等. 基于 CT 试验的岩体分区破损本构模型, 岩石力学与工程学报. 2005, 24(22): 4004~4010 (Dang Faning, Yin Xiaotao, Ding Weihua, et al. Sub area breakage constitutive model of rock mass based on CT test. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(22): 4004~4010(in Chinese))
 - 21 田威, 党发宁, 梁昕宇等. 混凝土细观损伤特性的 CT 研究. 实验力学, 2009, 24(3): 184~190 (Tian Wei, Dang Faning, Liang Xinyu, et al. CT real-time observation of the meso-damage process for concrete material under uniaxial compression. *Journal of Experiment Mechanics*, 2009, 24(3): 184~190(in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

(上接第 34 页)

了弹性悬链线的模型, 得到了其参数方程. 根据方程的物理意义, 提出了求解锚泊线拉力的算法, 该算法的收敛性好、简单、高效, 易于编程, 可用于海洋平台耦合运动的分析中.

参 考 文 献

- 1 Subrata Chakrabarti. *Handbook of Offshore Engineering*. Elsevier Ocean Engineering Series, Elsevier Ltd. Oxford, UK, 2005
- 2 张志国, 邹振祝, 赵玉成等. 悬索桥主缆线形解析方程解及应用. 工程力学, 2005(22): 172~176 (Zhang Zhiguo, Zou Zhenzhu, Zhao Yucheng, et al. Solution of main cable shape equations of a suspension bridge and its application. *Engineering Mechanics*, 2005(22): 172~176(in Chinese))
- 3 Irvine HM. *Cable Structure*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1981
- 4 李庆扬. 非线性方程组的数值解法. 北京: 科学出版社, 1987
- 5 《现代应用数学手册》编委会. 现代应用数学手册计算与数值分析卷. 北京: 清华大学出版社, 2005
- 6 中海石油研究中心. 中国南海深水油气田开发的典型深水平台概念设计研究. 北京, 2004
- 7 Agarwal AK, Jain AK. Dynamic behavior of offshore spar platforms under regular sea waves. *Ocean Engineering*, 2003(30): 487~516
- 8 Agarwal AK, Jain AK. Nonlinear coupled dynamic response of offshore Spar platforms under regular sea waves. *Ocean Engineering*, 2003(30): 517~551
- 9 马志良, 罗德涛. 近海移动式平台. 北京: 海洋出版社, 1993

(责任编辑: 刘俊丽)