



## 论文

## 细长轴对称体的水弹性振动特性分析

陈伟民<sup>①</sup>, 李敏<sup>②\*</sup>, 郑仲钦<sup>①</sup>, 张立武<sup>①</sup><sup>①</sup> 中国科学院力学研究所环境力学重点实验室, 北京 100190;<sup>②</sup> 北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191

\* 联系人, E-mail: limin@buaa.edu.cn

收稿日期: 2009-12-10; 接受日期: 2010-04-21

国家自然科学基金(批准号: 10772183), 中国科学院方向性项目(批准号: KJCX2-YW-L07)和国家高技术研究发展计划(批准号: 2006AA09A103-4)资助项目

**摘要** 以在水中做纵向平面内运动的细长轴对称体为研究对象. 在建立描述流体-结构耦合振动系统的计算模型时, 对固体采用位移(包括刚体运动位移和弹性 Euler 梁振动位移), 对流体采用压力作为基本变量, 首先建立了考虑流体作用力的结构动力学方程, 推导了考虑结构运动的流体压力表达式, 分析了水动力载荷的特征: 包括水动力压力的来源、组成、分布形式与影响范围等. 在此基础上给出了描述水中运动物体的位移(结构)-压力(流体)格式的流固耦合系统模型. 然后利用有限元数值方法(FEM)对方程进行了求解, 克服了解析解对研究对象外形的限制, 同时避免了流固耦合直接数值模拟中 CFD+FEM 的复杂性, 对于典型的工程结构非常适用. 最后, 通过算例给出了水中运动物体的水弹性频率和模态, 并将计算结果与试验结果进行了对比, 证明了本文计算模型的有效性.

**关键词** 水弹性, 附加质量, 振动, 频率, 模态**PACS:** 02.70.Dh, 46.40.Jj, 46.40.Ff, 47.15.km

水弹性理论是把液体和固体弹性系统作为一个统一的动力系统来研究它们之间相互作用的理论<sup>[1-4]</sup>. 在水弹性作用过程中, 流体动力作用于弹性系统, 其大小取决于弹性系统运动的位移、速度和加速度; 但液体动力作用又会改变弹性系统运动的位移、速度和加速度. 这种相互作用的物理性质表现为液体对弹性系统在惯性、阻尼和弹性诸方面的耦合现象. 由惯性耦合, 弹性系统产生附加质量; 在有流速场存在的条件下, 由阻尼耦合, 弹性系统产生附加阻尼; 由弹性耦合, 弹性系统产生附加刚度. 它们取决于流场条件及液体与弹性系统的边界连接条件, 求解相当复杂. 用实验或理论方法求解这些附加参量是水弹性

问题中研究的重要课题.

水中运动物体例如潜射导弹等在水下发射时经历出筒、水中、出水等过程, 会遇到流固耦合响应、水弹性发散/颤振、出水运动稳定性等问题, 需要在设计阶段对结构的静态和动态强度进行准确的校核; 同时为了提高结构的性能例如增加航程、加强攻击力度, 需要对结构进行动态优化设计, 这也需要给出准确的结构水弹性振动特性, 即水中运动物体的频率和模态. 结构在流体中振动特性的计算方法可以分为两类: 一类是简化计算方法<sup>[5-8]</sup>, 即将流体对结构的影响简化考虑成附加质量的影响, 而且对于一些理想形状例如无限长圆柱和圆球, 利用势流理论可

以解析求得附加质量系数(圆柱的附加质量系数为 1、圆球的为 1/2); 另一类是对流体-结构耦合振动系统进行数值计算<sup>[9-14]</sup>, 例如借助 CFD 和(或)结构有限元方法(FEM)进行大规模的直接数值模拟, 或采用有限元方法对结构和流体采用位移作为基本变量, 并将流体等效为固体, 从而将固体力学的各种方法拓展到整个流固耦合系统<sup>[15]</sup>. 简化计算方法只能适用于某些理想形状的结构, 而工程结构多为复杂几何外形. 结合 CFD 和结构有限元方法的直接数值模拟, 由于涉及流体、固体两种计算软件之间的接口和计算网格的匹配/插值等问题, 就目前的计算技术水平而言, 其占用的计算资源量比较大, 在工程实际中的应用还在推进中. 而直接使用有限元方法对流体采用位移进行描述时, 理想流体可以认为是一种剪切刚度为零的固体, 在位移格式中会造成虚假的零能模态<sup>[16]</sup>, 需要花费大量的精力去消除这些零能模态.

本文研究对象为在水中运动的轴对称细长体. 给出了描述水中运动物体的位移(结构)-压力(流体)格式的流固耦合系统模型. 在建立计算模型时, 对固体采用位移(包括刚体运动位移和结构弹性振动位移), 对流体采用压力作为基本变量, 建立了考虑流体作用力的结构运动学和动力学方程, 并推导了考虑结构运动影响的流体压力表达式. 本方法在理论上分析了水动力载荷的特征: 包括水动压力的来源、组成、分布形式与影响范围, 并给出了它们的具体表达式. 针对工程实际问题的特点, 按照时间周期对流固耦合方程进行解耦, 对于刚体运动与弹性体振动的耦合分别给出了结论. 利用有限元方法对方程进行了数值求解, 克服了以往解析解方法对研究模型的条件限制(通常为理想形状), 同时避免了流固耦合直接数值模拟中 CFD+FEM 的复杂性, 对于典型的工程结构非常适用. 最后, 通过算例给出了水中运动物体的水弹性频率和模态, 并将计算结果与试验结果进行了对比, 结果表明二者吻合, 证明本文的计算模型是有效的.

## 1 计算模型

### 1.1 基本方程

假设结构变形满足 Euler 梁的假设条件, 流体占据了无限空间且为理想不可压缩流. 坐标系见图 1, 其中 XYZ 是惯性坐标系, xyz 是固定于运动物体的相

对坐标(原点是物体的质心), 且 x-z 平面平行于 X-Z 平面.

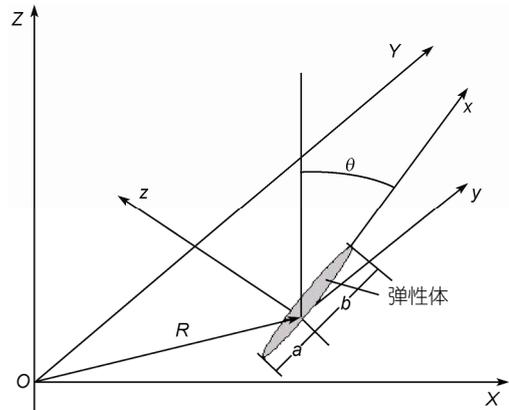


图 1 总体与局部坐标系示意图

考虑物体在 X-Z 平面内做平面运动. X, Z 表示质心在惯性坐标系内的平动位移,  $\vartheta$  表示刚体转动角度.  $u$  和  $w$  表示相对于坐标系 xyz 的质点位移,  $u$  为轴向位移,  $w$  为侧向位移. 结构上任一质点  $i$  的坐标  $\vec{r}$  和质点运动速度  $\dot{\vec{r}}$  为

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i, \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i + \dot{\vec{\rho}}_i.$$

其中

$$\vec{R} = (X \sin \vartheta + Z \cos \vartheta) \vec{i} + (-X \cos \vartheta + Z \sin \vartheta) \vec{k},$$

$$\vec{\rho}_i = (x_i + u_i + \alpha z_i) \vec{i} + y_i \vec{j} + (z_i + w_i) \vec{k},$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  分别为沿  $x, y, z$  轴的单位矢量,  $\vec{\omega}$  为刚体转动的角速度,  $\alpha = \partial w / \partial x$ .

系统的动能:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i [\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \\ &\quad + \dot{\vec{\rho}}_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i + 2(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \cdot \dot{\vec{\rho}}_i], \end{aligned}$$

系统的势能:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint E(x, \sqrt{y^2 + z^2}) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 dx dy dz \\ &\quad - \frac{1}{2} \iiint E(x, \sqrt{y^2 + z^2}) \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy dz. \end{aligned}$$

在有重力场的条件下,  $U$  的表达式中还需要增加重力势能,  $-\sum m_i \vec{g} \cdot (\vec{R} + \vec{\rho}_i) = MgZ$ , 其中  $M$  为结构总质量.

物面上任意点的坐标用  $(x, \gamma)$  表示, 其中  $\gamma$  为截面自  $z$  轴沿顺时针方向的转角(图 2). 令  $a(x)$  为  $x$  截面的半径、 $\phi(x)$  为结构物面的斜率(图 3), 作用于面元  $dA = (a(x) / \cos \phi(x)) dx d\gamma$  上的有压力  $p(x, \gamma)$ , 剪应力  $\tau_m(x, \gamma)$  (子午面上的切线方向) 和  $\tau_\gamma(x, \gamma)$  (环向). 令  $\delta u'$  和  $\delta w'$  表示这个面沿  $x$  方向和  $z$  方向的虚位移(图 2). 将虚位移分解为  $dA$  垂直方向和剪切方向并乘以相应的应力便得到外力在这个单元面上所作的虚功:

$$d\delta W = \frac{a(x)}{\cos \phi(x)} dx dy (-p \bar{n} + \tau_\gamma \bar{e}_r + \tau_m \bar{e}_m) \cdot (\delta u' \bar{i} + \delta w' \bar{k}),$$

$\bar{n}, \bar{e}_r, \bar{e}_m$  分别为法线方向、环向和子午面上的单位矢量. 沿圆周积分可得截面上外力所作的虚功.

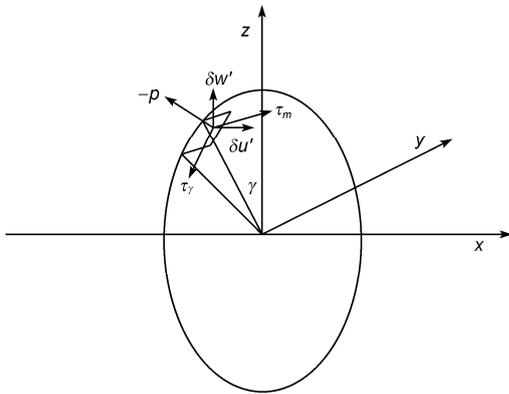


图 2 面元上的作用力和虚位移

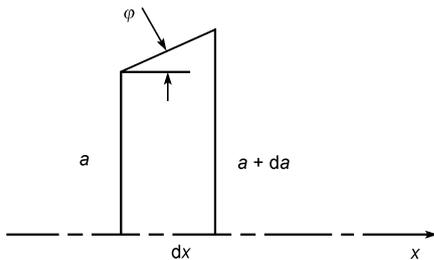


图 3 轴对称体微段示意图

将总动能  $K$ , 弹性变形能  $U$  和外力所做的虚功  $\delta W$  应用到哈密顿原理:

$$\delta \int_0^t (K - U) dt + \int_0^t \delta w dt = 0,$$

由于各变分量  $\delta X, \delta Z, \delta \vartheta, \delta u, \delta w$  都是独立的, 所以可

以得到计入流体作用力(忽略表面剪应力和高阶项)的结构运动和动力方程为

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = \int_{-a}^b a(x) (\sin \vartheta \tan \phi \int_0^{2\pi} p d\gamma + \cos \vartheta \int_0^{2\pi} p \cos \gamma d\gamma) dx, \quad (1a)$$

$$M \frac{d^2 Z}{dt^2} = \int_{-a}^b a(x) (\cos \vartheta \tan \phi \int_0^{2\pi} p d\gamma - \sin \vartheta \int_0^{2\pi} p \cos \gamma d\gamma) dx - Mg, \quad (1b)$$

$$J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \int_{-a}^b a(x) [-a(x) \tan \phi + x] \int_0^{2\pi} p \cos \gamma d\gamma dx + \int_{-a}^b m \left( w \frac{d^2 u}{dt^2} - u \frac{d^2 w}{dt^2} \right) dx, \quad (1c)$$

和

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} = K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} K(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + a(x) \tan \phi \int_0^{2\pi} p d\gamma, \quad (2a)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ H(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - a(x) \int_0^{2\pi} p \cos \gamma d\gamma, \quad (2b)$$

其中,  $J$  为转动惯量,  $m$  为结构单位长度质量,  $H(x) = \iint z^2 E(x, \sqrt{y^2 + z^2}) dy dz$  相当于梁的弯曲刚度,  $K(x) = \iint E(x, \sqrt{y^2 + z^2}) dy dz$  相当于拉伸刚度.

因为流体作用力项  $p(\gamma, x)$  是与结构运动相关, 所以方程组(1)和(2)表现了结构运动与流体压力之间的耦合. 另外, 观察方程(1c)右边第二项以及方程(2a)和(2b)左边第二项, 可以看出结构刚体运动和弹性振动之间也是耦合的. 方程组(1)和(2)是一组微分/积分方程组. 由于结构的运动和流体作用于结构的力是相互耦合的, 不能单独求解, 所以求解只能按时间步长逐步进行. 容易推导出静水压对五个动力方程的贡献分别为:  $0, \rho g V, -\rho g V x_b \sin \vartheta$  和  $-2\pi \rho \times ga(Z_c + x \cos \vartheta) \tan \phi, \pi a^2 \rho g \sin \vartheta$ .  $V$  为物体体积,

$x_b$  为浮力中心在对称轴上相对于质心的坐标,  $Z_c$  为物体质心在惯性坐标系中的  $Z$  方向位置. 在以下讨论中  $p$  只代表动水压力.

### 1.2 流体压力表达式

理想不可压流体的势函数  $\Phi$  满足 Laplace 方程, 由欧拉方程的柯西-拉格朗日积分形式可以得到势函数表达式  $\Phi = -\frac{1}{\rho} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_0^{\delta t} p dt$ . 如果不考虑重力作用, 则有

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \int_S \frac{\dot{\psi}(P)}{r_{PM}} dS_p, \quad (3)$$

$$2\pi \dot{\psi}(M_s) = \int_S \dot{\psi}(P) \frac{\cos(r_{PM_s}, n_{M_s})}{r_{PM_s}^2} dS_p + \dot{V}_n(M_s),$$

$\dot{\psi}(P)$  为物面  $P$  点源强度,  $\dot{V}_n$  为物面法向速度,  $r_{PM}$  为  $P$  点到  $M$  点的距离.

物体的任意垂直断面  $x$  处的任意点  $P$  的速度和加速度的法向分量分别是(设  $U, W$  分别代表刚体运动速度沿  $x$  轴和  $z$  轴的分量):

$$\begin{aligned} V_n = & -[U(t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}] \sin \phi(x) \\ & + [W(t) + \frac{\partial \dot{w}(x,t)}{\partial t}] \cos \phi(x) \cos \gamma \\ & - [a(x) \sin \phi + x \cos \phi(x)] \dot{g}(t) \cos \gamma, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & -\left[ \dot{U}(t) + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right] \sin \phi(x) \\ & + \left[ \dot{W}(t) + \frac{\partial^2 \dot{w}(x,t)}{\partial t^2} \right] \cos \phi(x) \cos \gamma \\ & - [a(x) \sin \phi + x \cos \phi(x)] \ddot{g}(t) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (4b)$$

$V_n$  和  $\dot{V}_n$  实质上由三项组成, 分别表示位于  $x$  处的截面所做的轴向刚体运动、侧向刚体运动和刚体绕  $y$  轴的刚体转动. 因此, 为了求解压力或势函数, 只需三类流场的计算. 在物体  $x_0$  处垂直于对称轴取一个长度为  $dx_0$  的筒体, 令这段筒体分别各做加速度为 1 个单位的平移运动和绕  $y$  轴的转动, 筒体的其他部分则保持不动. 计算这三类运动的源函数再叠加. 物面上任一点  $(x, r, \gamma)$  的源函数为

$$d\psi(x, \gamma, t, x_0) = \left[ \dot{U}(t) + \frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial t^2} \right] \pi_x(x, x_0) dx_0$$

$$\begin{aligned} & + \left[ \dot{W}(t) + \frac{\partial^2 \dot{w}(x_0, t)}{\partial t^2} \right] \pi_z(x, \gamma, x_0) dx_0 \\ & + \ddot{g}(t) \pi_g(x, \gamma, x_0) dx_0, \end{aligned} \quad (5)$$

$\pi_x, \pi_z, \pi_g$  依赖于  $x_0$  处简单单元的几何形状和整个潜体的形状, 分别是以下方程的解:

$$\begin{aligned} 2\pi \pi_x(x, x_0) = & - \int_{-a}^b \frac{\pi_x(x', x_0) a(x')}{\cos \phi(x')} \int_0^{2\pi} \frac{f_1}{f_2} d\gamma' dx' \\ & - \Delta \sin \phi(x_0), \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} 2\pi \pi_z(x, \gamma, x_0) = & - \int_{-a}^b \frac{a(x')}{\cos \phi(x')} \int_0^{2\pi} \frac{\pi_z(x', \gamma', x_0) f_1}{f_2} d\gamma' dx' \\ & + \Delta \cos \phi(x_0) \cos \gamma, \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} 2\pi \pi_g(x, \gamma, x_0) = & - \int_{-a}^b \frac{a(x')}{\cos \phi(x')} \int_0^{2\pi} \frac{\pi_g(x', \gamma', x_0) f_1}{f_2} d\gamma' dx' \\ & - \Delta [a(x_0) \sin \phi(x_0) + x_0 \cos \phi(x_0)] \cos \gamma, \end{aligned} \quad (6c)$$

当  $x_0 - dx_0/2 \leq x \leq x_0 + dx_0/2, \Delta = 1$ , 否则  $\Delta = 0$ .

$f_1, f_2$  分别为

$$\begin{aligned} f_1 = & -(x-x') \sin \phi(x) + a(x) \cos \phi(x) \\ & - a(x') \cos \phi(x) \cos(\gamma-\gamma'), \\ f_2 = & [(x-x')^2 + a^2(x) + a^2(x') \\ & - 2a(x)a(x') \cos(\gamma-\gamma')]^{3/2}. \end{aligned}$$

将(5)式代入压力的表达式(3), 并利用对  $\pi_z, \pi_g$  的分解  $\pi_z(x, \gamma, x_0) = \Pi_z(x, x_0) \cos \gamma$  和  $\pi_g(x, \gamma, x_0) = \Pi_g(x, x_0) \cos \gamma$ , 分别得到由三种类型的运动在物体表面所引起的水动压力:

$$p^x(x) = -\rho \int_{-a}^b \left[ \dot{U}(t) + \frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial t^2} \right] K^x(x, x_0) dx_0, \quad (7)$$

$$p^z(x, \gamma) = -\rho \cos \gamma \int_{-a}^b K^z(x, x_0) \left[ \dot{W}(t) + \frac{\partial^2 \dot{w}(x_0, t)}{\partial t^2} \right] dx_0, \quad (8)$$

$$p^g(x, \gamma) = -\rho \ddot{g} \cos \gamma \int_{-a}^b K^g(x, x_0) dx_0, \quad (9)$$

式(7)~(9)中积分核  $K^x(x, x_0), K^z(x, x_0), K^g(x, x_0)$  的表达式分别为

$$K^x(x, x_0) = \int_{-a}^b \pi_x(x', x_0) \frac{a(x')}{\cos \phi(x')} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma'}{r_{0 \rightarrow}}, \quad (10)$$

$$K^z(x, x_0) = \int_{-a}^b \frac{\Pi_z(x', x_0) a(x')}{\cos \phi(x')} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \gamma' d\gamma'}{r_0} dx', \quad (11)$$

$$K^g(x, x_0) = \int_{-a}^b \frac{\Pi_g(x', x_0) a(x')}{\cos \phi(x')} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \gamma' d\gamma'}{r_0} dx', \quad (12)$$

其中

$$r_{0 \rightarrow} = [(x-x')^2 + a^2(x) + a^2(x') - 2a(x)a(x') \cos(\gamma-\gamma')]^{1/2},$$

$$r_0 = [(x-x')^2 + a^2(x) + a^2(x') - 2a(x)a(x') \cos \gamma']^{1/2},$$

积分(7)~(9)式可得整个压力场。

对于工程中许多水下结构(例如潜射导弹等), 整体运动的加速度比振动的加速度要小得多, 整体运动的特征时间长而振动的周期相对要小得多. 在这种情况下, 把以上表达式代入前三个方程时, 可以把短周期项略去. 相反, 在代入后两个方程时, 要把长周期项忽略.

### 1.3 运动学与动力学方程

经过上述推导并进一步把加速度( $\ddot{X}, \ddot{Z}$ )投影到( $x, z$ )坐标系, 三个运动方程变成:

$$(M + M_x)\dot{U} = -Mg \sin \vartheta, \quad (13)$$

$$(M + M_z)\dot{W} = -Mg \cos \vartheta, \quad (14)$$

$$(J + J_a)\ddot{\theta} - \alpha M_z L \dot{W} = 0, \quad (15)$$

其中, 附加质量:

$$M_x = 2\pi\rho \int_{-a}^b \sin \phi(x) \int_{-a}^b \Gamma^x(x, x_0) dx_0 dx,$$

$$M_z = \pi\rho \int_{-a}^b \cos \phi(x) \int_{-a}^b \Gamma^z(x, x_0) dx_0 dx,$$

$$J_a = \pi\rho \int_{-a}^b a_{ax} \int_{-a}^b \Gamma^g(x, x_0) dx_0.$$

(15)式中的耦合项

$$\alpha M_z L = \pi\rho \int_{-a}^b a_{ax} \int_{-a}^b \Gamma^z(x, x_0) dx_0 dx,$$

$L$  代表结构的总长度. 以上结果表明两个平移运动的方程是解耦的, 旋转运动与侧向运动却是耦合的. 耦合的原因是侧向加速度所引起的水动力合力的作用点与潜体的质心不重合.

水中弹性体的振动方程为

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} = K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} K(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 2\pi\rho \cos \phi(x) \int_{-a}^b \frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial t^2} \Gamma^x(x, x_0) dx_0, \quad (16a)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ H(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \pi\rho \cos \phi(x) \int_{-a}^b \Gamma^z(x, x_0) \frac{\partial^2 \dot{w}(x_0, t)}{\partial t^2} dx_0, \quad (16b)$$

这两个描述振动的方程仍然是以非线性方式耦合的. 根据小变形假设, 还可以进一步线性化.

通过上述推导, 关于水动力载荷和方程的解耦问题我们有以下两点结论. (i) 水动力载荷的特征. 水动压力有下述特点: 水动压力是几种成分的代数和. 第一种是由物体作为刚体的平动和旋转加速度所引起的. 这一种又是三部分之和, 分别来源于物体沿轴向的直线加速度、垂至于轴的侧向加速度和旋转加速度. 第一部分水动压力是轴对称的, 第二和第三部分严格地按  $\cos \gamma$  在圆周方向分布. 第二种水动压力是分别由轴向和侧向振动所引起的, 前者是轴对称的, 后者严格按  $\cos \gamma$  在圆周方向分布. 水动压力的值可以用附加质量和相应的物体表面加速度来表示. 我们给出了它们的表达式. (ii) 方程的解耦问题. 在一般情况下, 水动压力把三种刚体运动和两种振动方程全部都耦合到了一起. 但是如果表征刚体运动的特征时间远大于振动的周期, 那么刚体运动的方程和振动方程就能够解耦了. 运动方程就是根据这个原则得到的. 不过有一个刚体运动方程是耦合的, 这一点应当引起注意.

## 2 算例与分析

### 2.1 计算模型

以顶部为圆锥体的圆柱弹体(有限元模型见图 4)为算例. 模型主要几何参数: 半径  $R = 0.25$  m, 长度  $L = 3.3$  m, 弹体头部外形为圆锥形, 锥顶高  $h = 0.2$  m. 材料参数: 抗弯刚度  $EI = 9.8 \times 10^9$  N m<sup>2</sup>, 泊松比 0.3; 无量纲的结构质量 ( $m_{sta}^i / m_{max}$ ,  $m_{sta}^i$  表示沿弹体轴向第  $i$  个站点处的结构质量,  $m_{max} = 54.7$  kg) 沿弹体轴向的分布见图 5. 流体密度  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>.

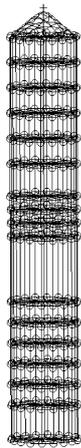


图 4 有限元数值计算模型

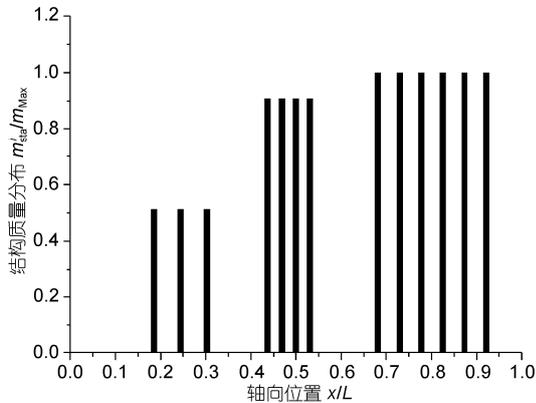


图 5 结构质量分布示意图

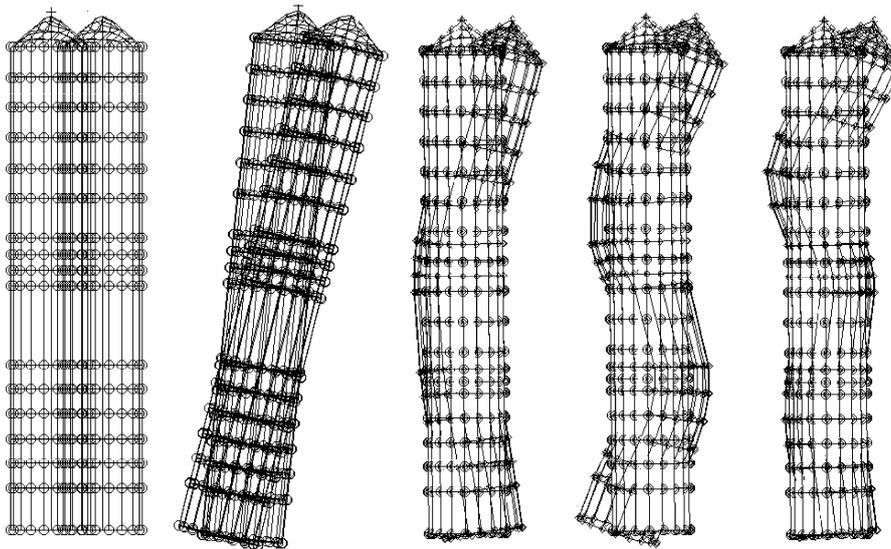


图 6 潜体全部浸水的水弹性模态

由左至右分别为两个刚体模态: 侧向平动、转动; 三个弹性模态: 一弯、二弯和三弯

## 2.2 潜体附加质量及水弹性模态的计算

计算状态分结构全部浸入水中(Case A)、一半(弹体后 1/2 部分)浸入水中(Case B, 不考虑自由面效应)两种状态. 进行了水弹性振动频率以及模态的计算. 为代表性起见这里只给出全部浸水时的模态振型(弹性模态包括前三阶弯曲模态), 见图 6.

表 1 给出了干模态和水弹性模态的频率对比. 由于流体附加质量的影响降低了水弹性模态的频率; 而且 Case B 的频率降低程度比 Case A 要低一些. 以一弯频率为例, Case A 和 Case B 的湿模态的频率分别降低到干模态的 67%和 90%, 这是由于 Case B 的浸水面积小其对应的附加质量也小. 另外, 对于不同模态, 附加质量的影响程度是不一样的, 这反映在两个方面: 一方面, 同一模态的阶次可能会改变, 例如, 二弯模态在干模态系列中排为第 3 阶, 而在湿模态中排为第 2 阶. 这是因为: 干模态中的第 2 阶原为纵向拉伸模态, 其水弹性模态的附加质量很小, 频率基本保持不变(98 Hz); 而二弯模态的附加质量影响显著, 频率降低到 84.6 Hz 小于拉伸模态频率, 其模态阶次由 3 降低到了 2. 另一方面, 三个弯曲模态的频率比(水弹性频率/干频率)数值的不同, 也可以反映出附加质量的不同影响. 这是因为各阶模态的波长不同, 附加质量对各阶模态的影响也不同.

为便于对比, 图 7 给出了弹体中心轴的干/湿模态(均为位移正则化的模态)形状对比. 全部浸水

表 1 干/湿模态频率对比(频率单位: Hz)

模态名称	干模态		水弹性模态全部浸水 (Case A)			水弹性模态部分浸水 (Case B)		
	频率	阶次	频率	阶次	频率比	频率	阶次	频率比
一弯	52.5	1阶	35.0	1阶	0.67	47.3	1阶	0.90
二弯	114.6	3阶	84.6	2阶	0.74	100.8	3阶	0.88
三弯	168.7	5阶	124.8	4阶	0.74	162.0	5阶	0.96
纵向拉伸	98.0	2阶	97.9	3阶	1.00	98.0	2阶	1.00

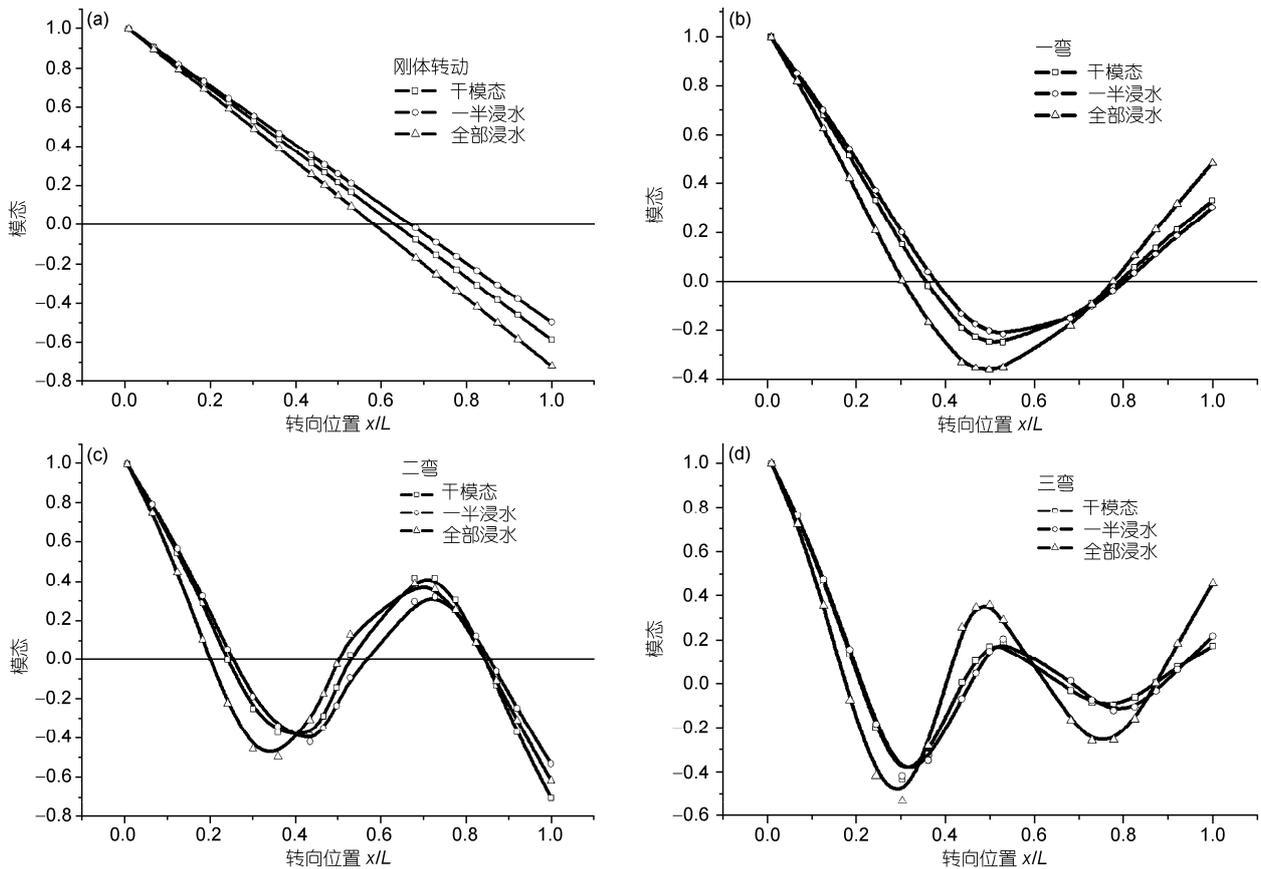


图 7 刚体转动和弹性模态的对比.  
(a) 刚体转动; (b) 一弯; (c) 二弯; (d) 三弯

(Case A)时的水弹性模态与干模态相比, 刚体转动的质心前移, 潜体尾部的振幅增大, 这主要是由于质量分布的改变造成的. 结构本身的质量主要集中在潜体后半部分(见图 5), 所以干模态的尾部振幅相对于头部较小; 而附加质量沿潜体的轴向分布比较均匀, 所以湿模态的总体质量(结构质量+附加质量)分布更趋于均匀, 从而与干模态相比, 其尾部的振幅增大. 而一半浸水时(Case B)的附加质量主要分布在结构的后半部分, 所以总体质量分布更加不均匀(尾部重、头部轻), 从而与干模态相比, 其尾部的会振幅减小.

### 2.3 讨论

#### 2.3.1 与试验结果的对比

工程中常常采用振动频率试验方法获得附加质量. 将结构置于刚度为  $\bar{K}$  的单自由度弹性支持上, 再分别测量系统在空气中和静水中的振动频率和模态. 假设弹性支持系统的刚度  $\bar{K}$  在空气中和在水中保持不变; 水对系统的影响只考虑流体对结构的惯性力的作用, 即附加质量的影响. 因此结构振动频率和质量之间存在如下关系式:

$$\frac{f_{dry}}{f_{wet}} = \frac{\sqrt{\bar{K}/\bar{M}_{dry}}}{\sqrt{\bar{K}/\bar{M}_{wet}}} = \sqrt{\frac{\bar{M}_{wet}}{\bar{M}_{dry}}}, \quad (17)$$

$f_{dry}$ ,  $f_{wet}$  分别为结构在空气中和浸入水中的振动频率,  $\bar{M}_{dry}$  和  $\bar{M}_{wet}$  分别为在空气中和在水中的模态广义质量, 且  $\bar{M}_{wet} = \bar{M}_{dry} + \bar{M}_a$ ,  $\bar{M}_a$  为广义附加质量. 对于位移正则化的刚体模态, 广义质量  $\bar{M}_{dry}$  的值(等于结构质量)是已知的, 而且频率  $f_{dry}$ ,  $f_{wet}$  的值可以通过试验测得. 因此, 利用公式(17)可得附加质量(等于广义附加质量  $\bar{M}_a$ ):

$$\bar{M}_a = \bar{M}_{dry}[(f_{dry}/f_{wet})^2 - 1], \quad (18)$$

定义附加质量系数  $C_a$ :

$$C_a = \bar{M}_a / \bar{M}_{dis}, \quad (19)$$

其中,  $\bar{M}_{dis}$  为排水质量. 表 2 给出了刚体模态的附加质量系数的数值计算和试验结果. 由表可知, 全部浸水的刚体平动模态的附加质量系数为 0.90, 数值计算的附加质量系数为 0.89, 二者吻合较好. 另外, 对比理想圆柱附加质量系数的解析值 1.0, 可知, 采用简单结构的解析解的误差(与数值计算结果相比)分别为 12.4% (全部浸水) 和 19.1% (一半浸水), 均已超过了 10%.

### 2.3.2 弹体端部的影响(三维效应)

从前面的分析可以看出, 工程中的振动频率试验方法只给出了刚体模态的附加质量系数, 不能给出附加质量在结构上的分布情况. 而本文通过数值计算, 给出了一弯、二弯两阶模态对应的附加质量系数沿弹体对称轴长度方向的分布, 见图 8.

由图可见在弹体长度的中间部分, 端部效应的影响比较小, 也就是说可以认为结构是无限长的, 从而采用二维计算模型, 所以附加质量系数的值基本保持为常数. 对于图 8 中的一弯、二弯两阶模态, 在

$x/L = 0.20 \sim 0.79$  区域内, 也就是说约占筒体总长度 59% 的区域, 一弯模态附加质量系数  $C_a$  基本保持为常数 0.98; 二弯模态一弯模态附加质量系数  $C_a$  基本保持为常数 0.95. 而在靠近弹体端部的位置, 附加质量系数偏离常值出现下降, 这主要是因为筒体端部效应的影响. 也就是说将结构当做无限长的二维模型不再适用了, 需要考虑结构形状的三维效应.

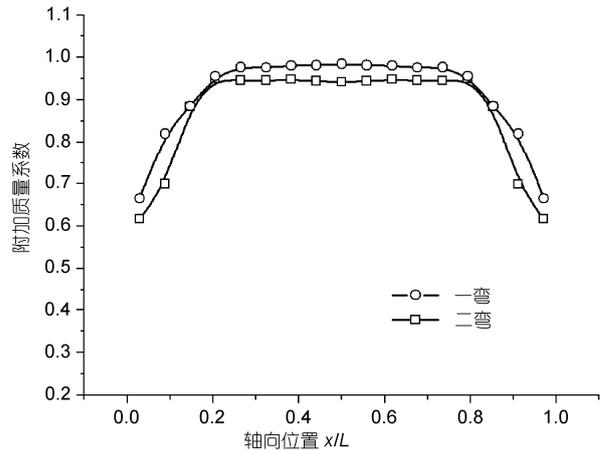


图 8 附加质量分布示意图

## 3 结论

本文建立了水下轴对称细长体的流体-结构耦合系统的动力学计算模型, 并用有限元数值方法进行了方程求解. 分析计算了顶部带圆锥头的圆柱壳体的水弹性振动特性, 附加质量系数的计算结果与试验结果的对比表明, 二者吻合较好. 本文的水弹性理论分析和数值计算结果表明:

(i) 综合考虑结构刚体运动和弹性振动的水动压力包含了两部分. 第一部分由物体的刚体平动和旋转运动引起. 第二部分由弹性体的轴向和侧向振

表 2 附加质量系数的计算和试验结果(质量单位: kg)

振动模态	干模态		全部浸水		一半浸水	
	广义质量 $\bar{M}_{dry}$	广义质量 $\bar{M}_{wet}$	附加质量系数 $C_a$	广义质量 $\bar{M}_{wet}$	附加质量系数 $C_a$	
计算结果 侧向平动(Z方向)	612.5	1164.0	0.89	868.8	0.83	
计算结果 侧向平动(Y方向)	612.5	1164.0	0.89	868.8	0.83	
解析解(理想圆柱)			1.00		1.00	
试验结果			0.90			

动所引起的. 水动压力可以用附加质量和相应的物体表面加速度来表示. 本文给出了它们的表达式.

(ii) 在一般情况下, 水动压力把三种刚体运动和两种振动方程全部都耦合到了一起. 如果表征刚体运动的特征时间远大于振动的周期, 那么刚体运动的方程和振动方程就能够解耦了. 运动方程就是根据这个原则得到的. 不过有一个刚体运动方程是耦合的, 这一点应当引起注意.

(iii) 附加质量的存在降低了水弹性模态的频率,

并且附加质量对各阶模态的影响程度是不一样的. 本算例还显示附件质量沿轴向分布是非均匀的, 即表现出端部效应, 这实质上是由结构端部形状的三维效应引起的.

需要指出的是, 本文为简化问题和代表性起见假设物体在  $X-Z$  平面内做平面运动、物体变形满足 Euler 梁条件、流体为理想且不可压缩的, 今后的工作可进一步考虑更为复杂的物体三维运动以及流体空化、分离、湍流等的影响.

**致谢** 作者对中国科学院力学研究所的郑哲敏和梁乃刚研究员在研究中给予的帮助和指导表示衷心的感谢!

## 参考文献

- 1 Bishop R E D, Price W G. Hydroelasticity of Ships. Cambridge: Cambridge University Press, 1979
- 2 Bishop R E D, Price W G, Wu Y S. A general linear hydroelasticity theory of floating structures moving in a seaway. *Phil Trans Royal Soc London*, 1986, A316: 375—426
- 3 陈徐均, 吴有生, 崔维成. 海洋浮体二阶非线性水弹性力学分析——基本理论. *船舶力学*, 2002, 6(4): 21—33
- 4 白象忠, 郝亚娟. 非线性流体弹性力学研究进展. *力学进展*, 2008, 38(5): 545—560
- 5 李新民, 张景绘. 水下圆柱壳体固有频率的近似计算分析. *应用力学学报*, 2008, 25(2): 326—331
- 6 郑哲敏. 平板在流体作用下的振动. *力学学报*, 1958, 2(1): 11—16
- 7 张效慈, 司马灿. 潜艇舵的低速颤振现象及预报. *船舶力学*, 2001, 5(1): 70—72
- 8 Xia L, Wu W, Wang C, et al. Analysis of fluid-structure-coupled vertical vibration for high-speed ships. *J Ship Mech*, 2000, 4: 43—50
- 9 Gu M X, Wu Y S, Xia J Z. Time domain analysis of non-linear hydroelastic response of ships. In: *Proc. Of 4th PRADS*, Varna, Bulgaria, 1989
- 10 王朝晖, 夏锦祝. 波浪引起的弹性船体响应的时域数值模拟. *中国造船*, 1995, 4(131): 91—96
- 11 顾学康, 段文洋. 船体在波浪中的非线性水动压力. *船舶力学*, 2001, 5(6): 41—47
- 12 Sima C, Zhang X C, Wu Y S. Applications of boundary element method in viscous fluid-structure coupling motion problems. *J Ship Mech*, 2002, 3: 35—39
- 13 陈徐均, 吴有生, 崔维成. 海洋浮体二阶非线性水弹性力学分析——二阶力对浮体振动时间响应的影响. *船舶力学*, 2003, 7(2): 11—20
- 14 Du S X. A general theory for the hydroelastic response of a structure manoeuvring in viscous fluid. *J Ship Mech*, 1999, 3: 21—34
- 15 张雄, 陆明万, 王建军. 任意拉格朗日-欧拉描述法研究进展. *计算力学学报*, 1997, 14(1): 91—102
- 16 徐刚, 任文敏, 张维, 等. 储液容器的三维流固耦合动力特性分析. *力学学报*, 2004, 36(3): 328—335