

# 溃坝流的光滑粒子法模拟

杨秀峰<sup>1,2</sup>, 彭世铤<sup>1</sup>

(1. 中国科学院力学研究所高温气体动力重点实验室, 北京 100190; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100190)

**摘 要:** 用光滑粒子法模拟几种情况的溃坝流动, 对坝外无水和有水的情况进行二维模拟, 对坝外有立柱的情况进行三维模拟. 流动控制方程采用雷诺平均方程模拟溃坝流动的湍流效应, 采用混合长度形式的涡粘模式对控制方程进行封闭, 推导其相应的光滑粒子形式的方程. 模拟结果表明, 数值模拟的流动特征与实验结果符合得非常好, 说明发展的光滑粒子法有效.

**关键词:** 溃坝流; 光滑粒子法; 湍流; 自由液面

中图分类号: O35

文献标识码: A

## 0 引言

作为典型的自由面流动现象, 溃坝流一直是验证数值模拟方法的一个经典算例<sup>[1-3]</sup>. 模拟溃坝流的关键在于捕捉流动中的自由液面. 自由液面流在现实生活和工程中非常常见, 其中有些情况具有很大的危害性, 如溃坝流、滑坡流以及海啸等. 研究这些事件的规律, 并进行有效的模拟, 对防治这类危害无疑有很大的帮助.

基于网格的数值方法, 如 Mark and cell (MAC) 方法和 Volume of Fluid (VOF)<sup>[4]</sup> 方法等, 在处理自由液面流动的时候, 需要对网格进行特殊处理. 如 VOF 方法是在自由液面外没有流体的区域也布上网格, 通过确定流体网格和非流体网格的交界面来确定自由液面的位置<sup>[5]</sup>.

光滑粒子法是一种拉格朗日无网格粒子法<sup>[6-9]</sup>. 它利用核函数对物理问题进行近似处理, 把连续的物质空间离散到一系列无序分布的可运动的粒子(通常称为光滑粒子)上, 用离散的粒子代替连续分布的流体. 每个粒子携带其所在位置的流体的各种性质, 如质量、密度、速度、能量等. 光滑粒子法中的粒子是运动的, 可以有效地捕捉液面的位置和运动, 而且不需要在没有流体的区域分布粒子, 计算效率很高, 效果理想.

光滑粒子法最早由 Gingold 和 Monaghan<sup>[6]</sup>以及 Lucy<sup>[7]</sup>相互独立地提出, 用于处理天体物理问题. 经过发展, 光滑粒子法又被应用到激波<sup>[10,11]</sup>、自由液面流以及高速碰撞<sup>[12]</sup>等问题的模拟. 光滑粒子法通常用来模拟简单的流体运动, 不考虑湍流效应<sup>[10]</sup>. 近几年, 随着光滑粒子法的发展和模拟需要, 有些研究者开始尝试在光滑粒子法中加入湍流模型<sup>[11,12]</sup>, 模拟更复杂的流动, 如近岸孤波流和溃坝流等.

为了更好更有效地模拟复杂的流动问题, 本文在光滑粒子方程中引入了雷诺应力项, 给出了相应的雷诺方程的光滑粒子形式, 并对二维和三维溃坝流动进行模拟. 模拟结果与实验结果<sup>[13-15]</sup>符合得很好.

## 1 控制方程

拉格朗日形式的 N-S 方程为

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

其中  $\rho$  为流体密度;  $\mathbf{u}$  为流体速度;  $\mathbf{g}$  为重力加速度;  $p$  为压强;  $\mu$  为动力粘性系数.

对 N-S 方程取雷诺平均, 即可得雷诺平均方程(简称雷诺方程)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{R}), \quad (4)$$

其中  $\mathbf{U}$  和  $P$  分别表示  $\mathbf{u}$  和  $p$  的雷诺平均;  $\mathbf{R}$  为雷诺应力张量. 方程(3)和(4)中的未知量的个数大于方程的个数, 所以雷诺平均方程是不封闭的, 还需要另外的方程才能求解. 我们采用如下的涡粘模式及 Smagorinsky 提出的涡粘系数:

$$R_{ij} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}, \quad (5)$$

$$\nu_t = l^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad (6)$$

其中  $\nu_t$  为涡粘系数,  $S_{ij}$  为平均应变率张量,  $i, j$  表示分量,  $k$  为湍动能,  $l$  为混合长度. 这里取  $l = C_s h$ ,  $C_s$  的取值范围为  $0.1 \sim 0.24$  [11], 本文取  $C_s = 0.12$ . 平均应变率张量  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$ , 湍动能  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ .  $u'_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{U}_i$  为脉动量. 在求解过程中, 不能由此表达式求出湍动能, 因为脉动量是未知的. 根据雷诺应力张量的表达式  $R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}$ , 可知  $k = -\frac{1}{2} R_{ii}$ , 由(5)式得到雷诺应力后, 即可由此式得到湍动能. 这里使用了爱因斯坦求和约定, 即脚标相同时表示对脚标的所有取值进行求和, 如  $R_{ii} = \sum_i R_{ii} = R_{11} + R_{22} + R_{33}$ . 对于二维空间, 取前两项即可. 同样, 对于(6)式,

$$S_{ij}S_{ij} = \sum_i \sum_j S_{ij}S_{ij}.$$

## 2 光滑粒子方程

在光滑粒子法中, 函数  $A(\mathbf{r})$  及其导数的离散形式 [3, 4, 6] 为

$$A_a = \sum_b A_b W_{ab} \frac{m_b}{\rho_b}, \quad (7)$$

$$\nabla_a A_a = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b \nabla_a W_{ab}, \quad (8)$$

其中  $A_a = A(\mathbf{r}_a)$  可以是标量、矢量或张量,  $W_{ab} = W(\mathbf{r}_{ab}, h)$  为核函数,  $h$  为光滑长度,  $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ ,  $\nabla_a W_{ab} = \frac{\mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}} \frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}}$ ,  $r_{ab} = |\mathbf{r}_{ab}|$ , 脚标  $a$  或  $b$  表示对应于粒子  $a$  或  $b$  的量.

对质量方程(3)做变换

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U} = (\nabla \rho) \cdot \mathbf{U} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}), \quad (9)$$

把式(8)代入式(9)即可得光滑粒子形式的质量方程

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \mathbf{U}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (10)$$

其中  $\mathbf{U}_{ab} = \mathbf{U}_a - \mathbf{U}_b$ .

利用光滑粒子法对动量方程(4)右边各项进行离散:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho + \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) = \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (11)$$

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{U} = \sum_b \frac{4m_b (\mu_a + \mu_b) r_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)^2 (r_{ab}^2 + 0.01h^2)} \mathbf{U}_{ab}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{R})_a = \sum_b m_b \left( \frac{(\rho \mathbf{R})_a}{\rho_a^2} + \frac{(\rho \mathbf{R})_b}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla_a W_{ab} = \sum_b m_b \left( \frac{R_a}{\rho_a} + \frac{R_b}{\rho_b} \right) \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (13)$$

$$\frac{DU_a}{Dt} = \mathbf{g} - \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla_a W_{ab} + \sum_b \frac{4m_b (\mu_a + \mu_b) r_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)^2 (r_{ab}^2 + 0.01h^2)} \mathbf{U}_{ab} + \sum_b m_b \left( \frac{R_a}{\rho_a} + \frac{R_b}{\rho_b} \right) \cdot \nabla_a W_{ab}. \tag{14}$$

压强的求解采用人为压缩性方法,也称为微压缩性方法. 本文采用人为状态方程<sup>[10]</sup>

$$P(\rho) = c^2(\rho - \rho_0), \tag{15}$$

其中  $\rho_0$  为参考密度;  $c$  为数值声速. 为了使流体的压缩性在 1% 以内,常取  $c$  值为流体最大速度的十倍以上. 由质量方程(10)、动量方程(14)和状态方程(15),以及前文给出的涡粘模式和下节给出的边界处理,即构成了完整的封闭方程组.

本文使用的核函数为双余弦函数和高斯函数,未指明时使用的是双余弦函数,使用高斯函数时会说明. 双余弦函数

$$W(s, h) = \alpha_d \begin{cases} 4\cos\left(\frac{\pi}{k}s\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{k}s\right) + 3, & 0 \leq s \leq k, \\ 0, & s > k. \end{cases} \tag{16}$$

其中  $s = \frac{r}{h}$ ,  $\alpha_d$  为归一化系数,  $d$  表示空间的维数,  $k$  为参数(本文取  $k = 2$ ). 在一维、二维和三维空间中  $\alpha_d$  的值分别为

$$\alpha_1 = \frac{1}{6kh},$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{(3\pi^2 - 16)(kh)^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{(4\pi^2 - 30)(kh)^3}.$$

高斯函数

$$G(r, h) = e^{-(r/h)^2} / (\sqrt{\pi}h)^d. \tag{17}$$

### 3 边界处理

溃坝流具有两种边界:自由液面和壁面. 在自由液面处,压强为零,不需要做特殊处理,液面可以自由运动,流体运动到哪,粒子也运动到哪,没有流体的地方也没有粒子. 在壁面处,采用无滑移边界条件.

壁面边界的处理有多种方式,一种是用若干层固定的虚粒子代替固壁;一种是用一层固定的虚粒子代替固壁,这层粒子对靠近它们的流体粒子施加额外的排斥力,以防止粒子穿过边界;还有一种是在壁面外添加几层内部粒子的镜像虚粒子,镜像粒子与内部粒子关于壁面对称,包括质量、压强也对称,速度则反向.

本文采用第一种方式. 如图 1 在壁面处添加一层虚粒子,在壁面外添加两层虚粒子. 计算发现,尽管添加了几层虚粒子,仍会有个别流体粒子穿过壁面的现象. 为了防止这种现象的发生,我们对刚刚穿入壁面的粒子做镜面反射处理,即以壁面为对称面,把穿过壁面的流体粒子镜像回来,同时粒子的法向速度取反向,见图 2.

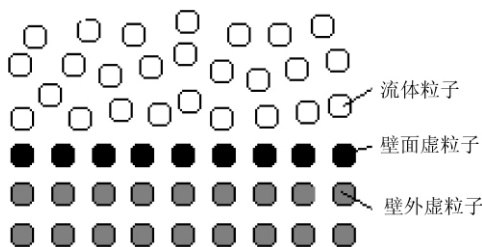


图 1 虚粒子设置

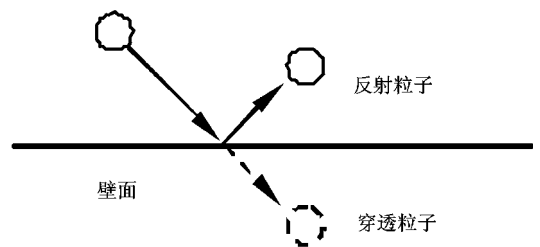


图 2 粒子的镜面反射示意图

### 4 溃坝的模拟

本文模拟的二维溃坝流可以看成是溃坝流冲向空地或浅水区的简化模型,三维溃坝流则是溃坝流冲向建筑物的简化模型. 对于本文所有算例,取  $\rho_0 = 1\ 000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c = 35\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\mu = 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s}$ .

#### 4.1 二维溃坝流

二维溃坝问题的示意图见图 3,  $d_1$  和  $d_2$  分别为闸门两侧水域的初始宽度,  $H_1$  和  $H_2$  分别为两侧水域的初始高度. 当闸门被提起时,由于两侧水位高度不同,在重力的作用下水位高的一侧必然要流向水位低的一侧. 对于不同的初始状态,流动的形态也不同. 为了与实验结果对比,本文选取几种情况进行模拟.

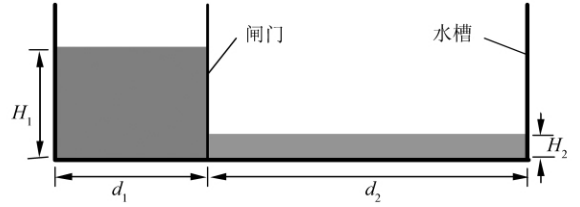


图 3 二维溃坝问题的初始状态

Fig. 3 Initial conditions of 2D dam-break flow

① 坝外无水情况一. 取  $d_1 = 0.1\ \text{m}$ ,  $d_2 = 0.9\ \text{m}$ ,  $H_1 = 0.2\ \text{m}$ ,  $H_2 = 0\ \text{m}$ . 初始粒子均匀分布,粒子间距为  $0.001\ \text{m}$ ,时间步长为  $5 \times 10^{-6}\ \text{s}$ . 当闸门打开后,坝内蓄水迅速冲向坝外无水区域. 水流前沿位置是表征溃坝流的一个重要参数,图 4 为数值模拟和实验结果<sup>[17,18]</sup>中溃坝流前沿位置  $x$  随时间  $t$  的变化,图中结果已无量纲化,  $X = x/d_1$ ,  $T = t \sqrt{\frac{2g}{d_1}}$ . 图 4 表明,模拟结果和实验结果一致.

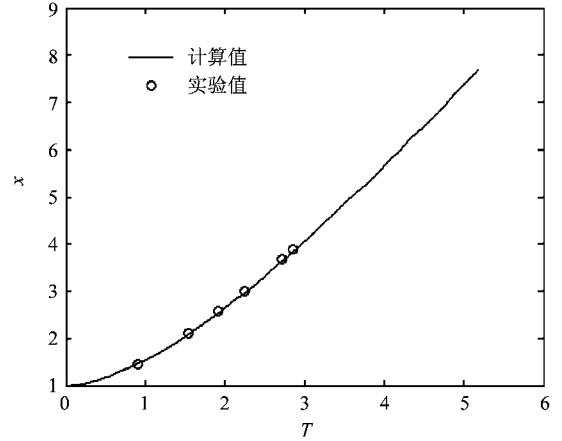
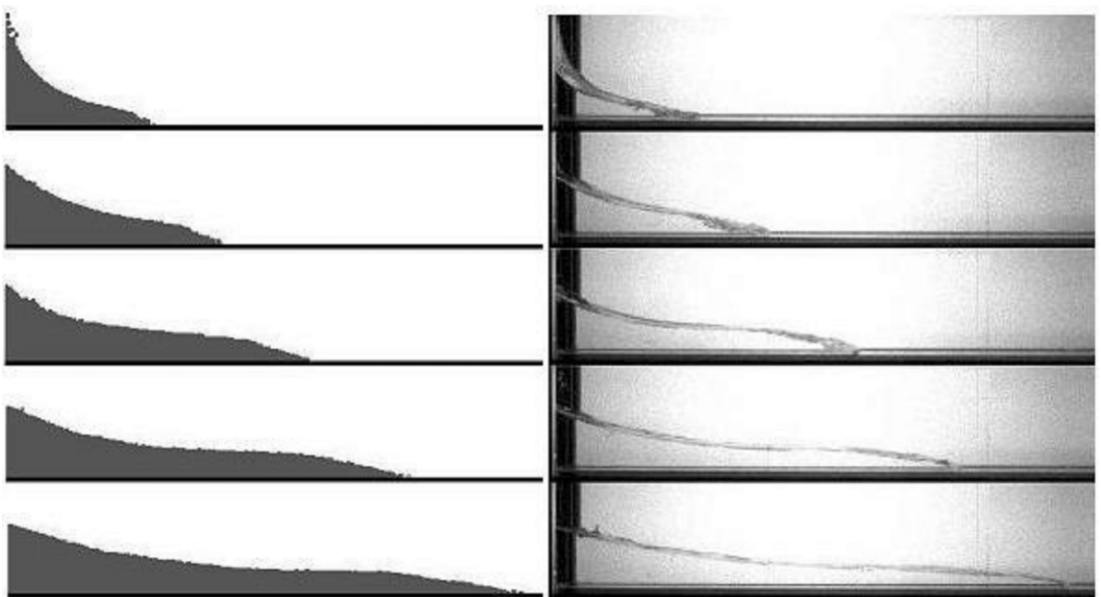


图 4 溃坝流前沿位置前沿随时间的变化

Fig. 4 Time dependent of water front

② 坝外无水情况二. 取  $d_1 = 0.38\ \text{m}$ ,  $d_2 = 0.76\ \text{m}$ ,  $H_1 = 0.15\ \text{m}$ ,  $H_2 = 0$ . 初始粒子均匀分布,粒子间距为  $0.001\ \text{m}$ ,时间步长为  $5 \times 10^{-6}\ \text{s}$ . 计算结果与实验结果<sup>[16]</sup>的对比见图 5.

③ 坝外有水情况. 取  $d_1 = 0.38\ \text{m}$ ,  $d_2 = 0.76\ \text{m}$ ,  $H_1 = 0.15\ \text{m}$ ,  $H_2 = 0.018\ \text{m}$ . 初始粒子均匀分布,粒子间距为  $0.001\ \text{m}$ ,时间步长为  $5 \times 10^{-6}\ \text{s}$ . 这里分别使用



(a) 光滑粒子法模拟

(b) 实验

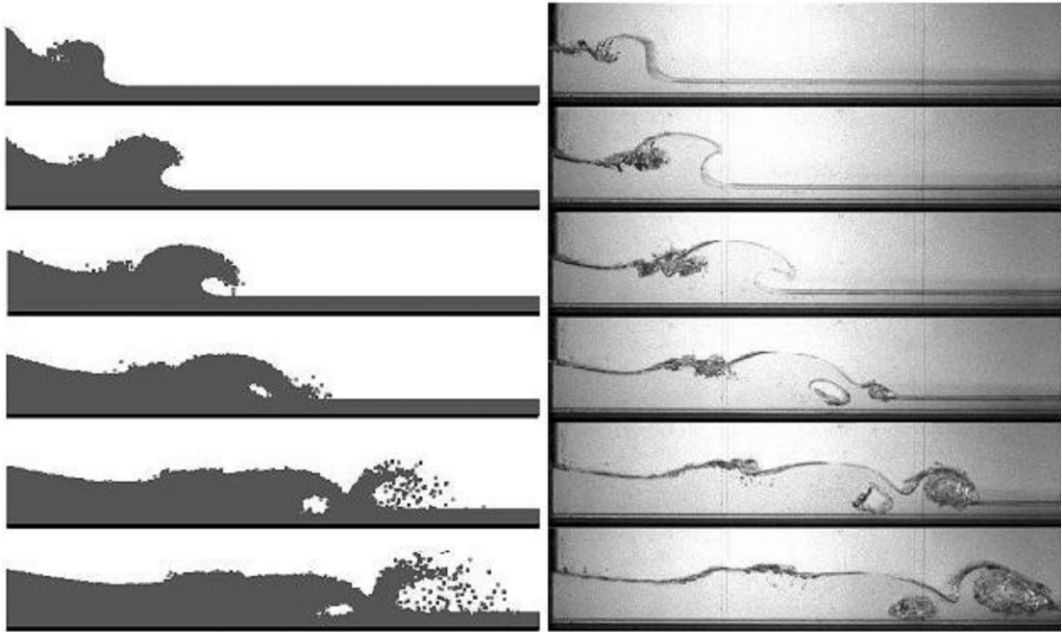
图 5 二维溃坝流 ( $H_2 = 0$ ) 的光滑粒子法模拟与实验结果对比

了双余弦函数和高斯函数作为核函数,计算结果与实验结果的对比见图 6.

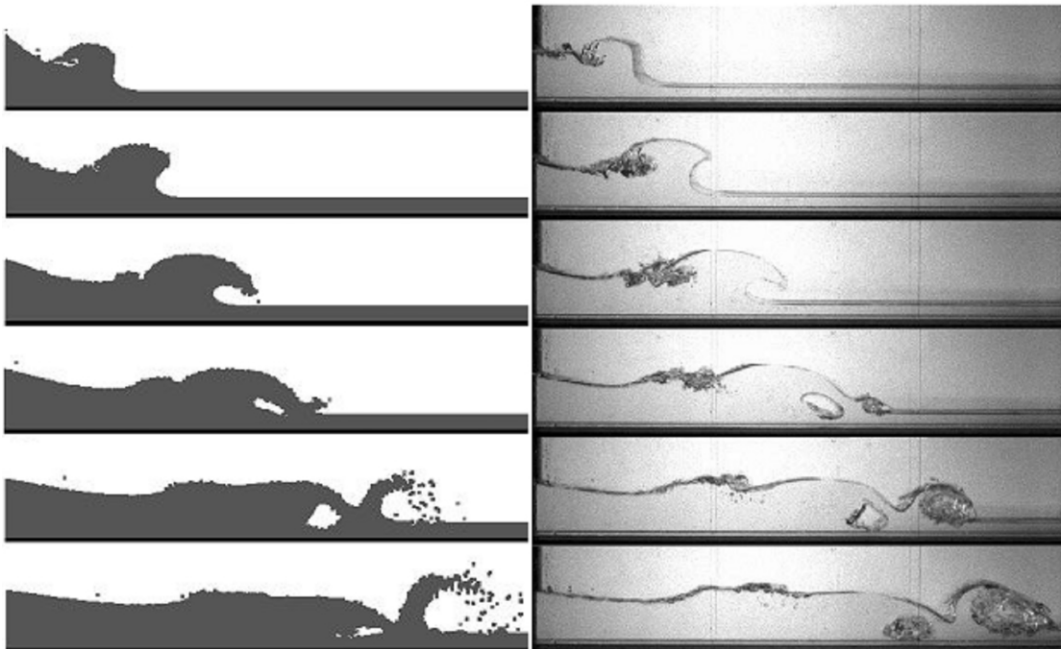
对比图 5 和图 6 可以看出,当溃坝流向平坦的无水区时,水流会沿着地面直向前流,没有卷起的波浪,也没有溅起的水花;而当溃坝流向浅水区时,会冲起浅水区的水,接着前缘水流会卷起.比较图 6(a)和(b),用高斯函数做核函数时,对前缘波的卷起捕捉比用双余弦函数时清晰,但第二次卷起波的高度明显比实验结果高一些.

### 4.2 三维溃坝流

三维溃坝流的初始条件见图 7.  $L$  和  $B$  分别为水槽的长和宽;水闸右侧为蓄水区,初始水深为  $H$ ,长度为



(a) 核函数为双余弦函数



(b) 核函数为高斯函数

图 6 二维溃坝流( $H_2 = 0.018$  m)的光滑粒子法模拟(左)与实验(右)结果对比

$L_1$ ; 立柱的长宽高分别为  $l, b, H$ , 立柱离水闸的距离为  $L_2$ , 离水槽后壁的距离为  $B_1$ . 水闸提起后, 右侧蓄水即冲向左侧无水区域.

本算例给的尺寸为  $L = 1.6 \text{ m}$ ,  $B = 0.6 \text{ m}$ ,  $H = 0.4 \text{ m}$ ,  $l = b = 0.12 \text{ m}$ ,  $L_1 = 0.4 \text{ m}$ ,  $L_2 = 0.5 \text{ m}$ ,  $B_1 = 0.24 \text{ m}$ . 初始粒子均匀分布, 粒子的初始间距为  $0.01 \text{ m}$ , 使用了约  $10^5$  个粒子. 时间步长为  $2.0 \times 10^{-5} \text{ s}$ . 模拟结果见图 8 和 9.

由图 8 和 9 可看出, 在溃坝流动前缘波没有遇到立柱之前, 三维溃坝流的状态和二维情况时相似. 这也说明二维溃坝的简化模型是合理的. 当水流前缘遇到立柱时, 会溅起水花, 并绕立柱两侧流过; 当水流冲到左端壁面时, 两侧的水流汇合, 而后回流再一次冲向立柱.

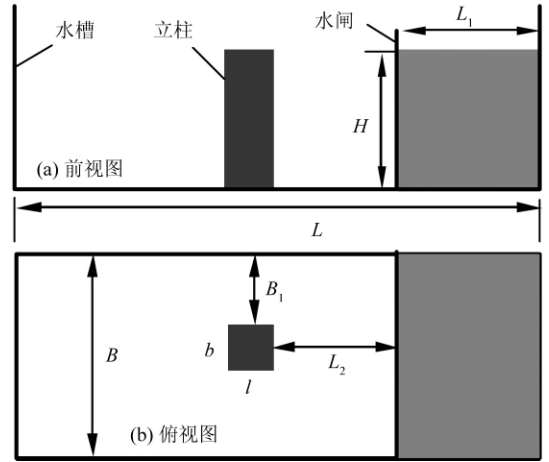


图 7 三维溃坝初始状态的前视图和俯视图  
Fig. 7 Initial conditions of 3D dam-break flow

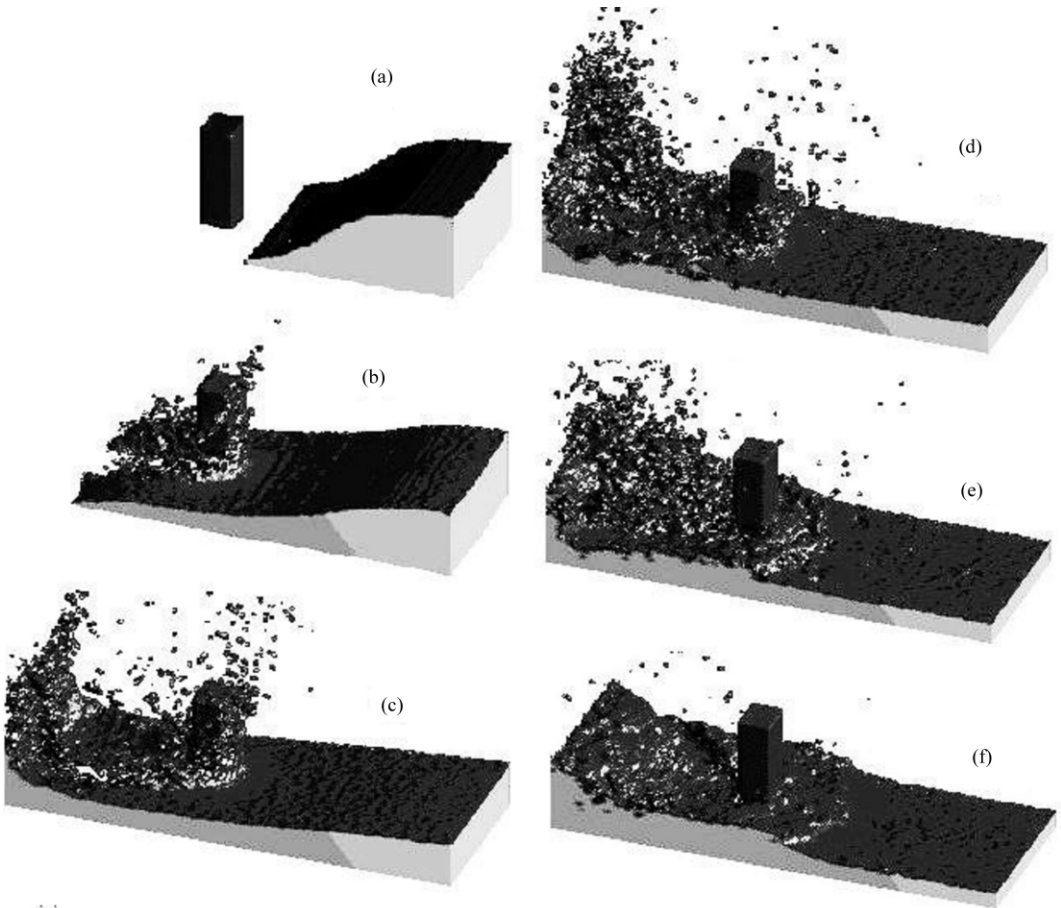


图 8 三维溃坝流的光滑粒子法模拟结果  
Fig. 8 SPH results of 3D dam-break flow

## 5 结语

溃坝流动涉及到自由液面和湍流, 对其进行有效的数值模拟比较困难. 本文利用光滑粒子法对雷诺方程进行离散处理, 得到了相应的光滑粒子形式. 运用该方法, 本文有效地模拟了几种情况的二维和三维溃坝流动. 模拟结果比较理想, 与实验符合得也非常好. 对于更复杂的流动问题的模拟, 有待于进一步研究.

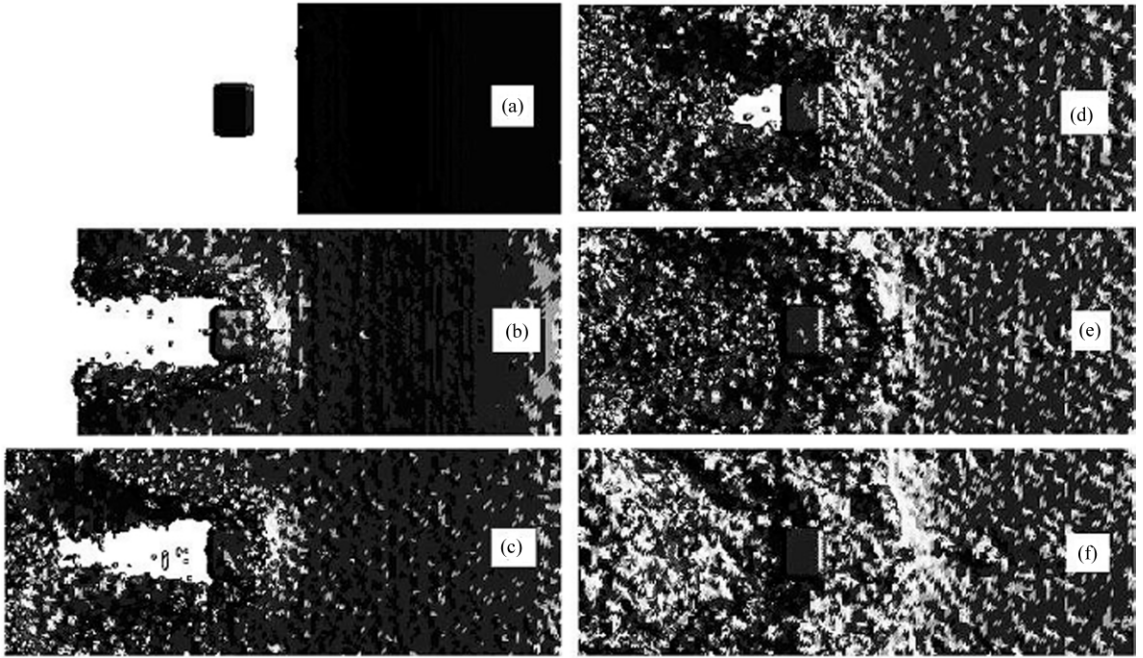


图 9 三维溃坝流的光滑粒子法模拟结果的俯视图

Fig. 9 Platforms of SPH results for 3D dam-break flow

## 参 考 文 献:

- [1] 张陈明,刘瑛琦,李同飞,郑金海. SPH 中的内外单元粒子搜索技术[J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 2008, **23**(3): 275 - 280.
- [2] 张健,陆利蓬,刘恩洲. SPH 方法在溃坝流动模拟中的应用[J]. 自然科学进展, 2006, **16**(10): 1326 - 1330.
- [3] Liu G R, Liu M B. 光滑粒子流体动力学——一种无网格粒子法[M]. 韩旭, 等译. 长沙: 湖南大学出版社, 2005.
- [4] 王志东,汪德劼. VOF 方法中自由液面重构的方法研究[J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 2003, **18**(1): 52 - 56.
- [5] 杜小璐,吴卫,龚凯,刘桦. 二维滑坡涌浪的 SPH 方法数值模拟[J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 2006, **21**(5): 579 - 586.
- [6] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars[J]. Mon Not R Astro Soc, 1977, **181**: 375 - 389.
- [7] Lucy L R. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. The Astron J, 1977, **82**: 1013 - 1024.
- [8] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics[J]. Annu Rev Astron Astrophys, 1992, **30**: 543 - 574.
- [9] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics[J]. Rep Prog Phys, 2005, **68**: 1703 - 1759.
- [10] Xu Li, Sun Jinshan. SPH simulation of one-dimensional shock problems[J]. Chinese J Comput Phys, 2003, **20**(2): 153 - 156.
- [11] Xu Zhihong, Tang Wenhui, Zhang Ruoqi. A modified SPH method based on Riemann solution[J]. Chinese J Comput Phys, 2006, **23**(6): 713 - 716.
- [12] Zhang Gangming, Wang Xiaojun, Wang Yuanbo, Wang Ji, Wang Feng. Smoothed particle hydrodynamics method to numerical simulation of hypervelocity impact[J]. Chinese J Comput Phys, 2003, **20**(5): 447 - 454.
- [13] Morris J P, Fox P J, Zhu Yi. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH[J]. J Comput Phys, 1997, **136**: 214 - 226.
- [14] Lo E Y M, Shao Songdong. Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method[J]. Applied Ocean Research, 2004, **24**: 275 - 286.
- [15] Violeau D, Issa R. Numerical modelling of complex turbulent free-surface flows with the SPH method: an overview[J]. Int J Meth Fluids, 2007, **53**: 277 - 304.
- [16] Jánosi J M, Jan D, Szabó K G, Tóth T. Turbulent drag reduction in dam-break flows[J]. Experiments in Fluids, 2004, **37**: 219 - 229.

- [17] Hirt C W , Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries [J]. J Comput Phys ,1981 ,**39**: 201 – 225.
- [18] Jin Changqiu , Xu Kun. A unified moving grid gas-kinetic method in Eulerian space for viscous flow computation [J]. J Comput Phys ,2007 ,**222**: 155 – 175.

## Simulation of Dam-break Flow with SPH Method

YANG Xiufeng<sup>1,2</sup> , PENG Shiliu<sup>1</sup>

(1. LHD , Institute of Mechanics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100190 , China ;

2. The Graduate University of Chinese Academy of Sciences , Beijing 100190 , China)

**Abstract:** A smoothed particle hydrodynamics (SPH) method for turbulence is used to simulate dam-break flows. Several 2D and 3D dam-break flows are simulated. For turbulent effects , Reynolds-averaged Navier-Stokes equation together with eddy viscosity assumption are used. SPH results are in good agreement with reported experimental results.

**Key words:** Dam-break flow; SPH method; turbulence; free surface flow