

# 平面应力条件下共线双裂纹的拉伸特性

范永波

(中国科学院 力学研究所, 北京 100190)

**摘要:** 为探寻共面双线断续节理岩体平面应力条件下的拉伸特性, 从远场应力角度出发, 基于 Fazil Erdogan (1962) 在任意荷载条件下共线双裂纹的应力场分布思想, 采用 G. C. Sih (1972) 提出的最小应变能密度因子判据 (S 判据), 建立了远场应力与裂纹尖端附近应力场的对应关系, 证明共线双裂纹在拉应力作用下自相似扩展; 裂纹外侧与内侧的应力场分布形式相同, 但数值偏小, 且内侧裂纹先于外侧裂纹扩展; 在材料性质、裂纹间距及长度已知的情况下, 可反推材料破坏时的极限外力大小。

**关键词:** 共线双裂纹; 拉应力; 最小应变能密度因子; 自相似扩展

中图分类号: O 343

文献标识码: A

## Tensile properties about two collinear cracks under plane extension

FAN Yongbo

(Institute of Mechanics (IMECH), Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** In order to deduce the tension properties of intermittent jointed rock with double-line, in terms of far-field stress, this paper establishes a corresponding relationship between a far-field stress and the stress field around the crack tip based on the theory of stress distribution of two collinear cracks under any load (Erdogan, 1962) and the minimum strain energy density factor criterion (Sih, 1972). Furthermore, the paper demonstrates that the two collinear cracks follow self-similar extension under tensile stress; the stress fields on the inside and outside of the crack have the same distribution with some difference in magnitude, and the inside crack extends earlier than that of the outside crack. If the material properties, the spacing and length of the cracks are known, the magnitude of external destructive force can be derived.

**Key words:** two collinear cracks; tensile stress; minimum strain energy density factor; self-similar extension

## 0 引 言

贯通裂纹及完整岩块的抗剪强度机制前人研究的较为充分、系统化<sup>[1-3]</sup>, 断续岩体包含了岩桥及断续分布的裂纹, 单纯依据贯通裂纹或者完整岩块进行研究均是不合适的。

断续节理岩体的破坏关键是岩桥与节理协同作用机制, 最终的破坏模式受其两者共同控制<sup>[4]</sup>。目前, 确定断续节理岩体综合抗剪强度, 应用最广泛的就是面积加权平均法<sup>[5]</sup>, 加权平均法实质上应用的是强度等效思想。通过等效, 将断续节理岩体等效为贯通节理岩体来处理, 虽然简单易行, 但忽略了其力学作用机制的不同, 没有深厚的理论支撑, 在理论分析及结果准确度评价等方面存在诸多困境<sup>[6-7]</sup>。

本文从远场应力角度, 基于 Fazil Erdogan

(1962)<sup>[8]</sup>在任意荷载条件下共线双裂纹的应力场分布思想, 采用 G. C. Sih (1972) 提出的最小应变能密度因子判据 (S 判据)<sup>[9-10]</sup>, 建立了远场应力与裂纹尖端附近应力场的对应关系, 推导了双线共线断续节理岩体纯拉应力条件下的综合强度判据公式, 得出一些规律性认识。

## 1 假 设

节理的抗剪强度主要受到节理面条件、加载条件和环境等因素的影响。我们知道, 现场节理分布及性状是极其复杂和不规则的<sup>[11]</sup>, 本文主要基于以下几点假设:

(1) 节理面是平直光滑, 不存在充填物, 不承受任何剪力;

(2) 不考虑温度、湿度影响;

(3) 双裂纹的应力场是可以叠加的。



图 1 共线双裂纹

Fig. 1 two collinear cracks

共线双裂纹的简化图见下图 2，基于 Fazil Erdogan (1962) 在任意荷载条件下共线双裂纹的应力场分布思想，共线双裂纹尖端应力场如式 (1)~式 (3)，求解出裂纹内外侧应力强度因子如式 (4)、式 (5)。

### 2 理论推导

$$\sigma_x = \frac{A_{1k}}{r^{\frac{1}{2}}} \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} - \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \quad (1)$$

$$\frac{A_{2k}}{r^{\frac{1}{2}}} \left( 4 \sin \frac{\theta}{2} + \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \right) + 0(r^{\frac{1}{2}})$$

$$\sigma_y = \frac{A_{1k}}{r^{\frac{1}{2}}} \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \quad (2)$$

$$\frac{A_{2k}}{r^{\frac{1}{2}}} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} + 0(r^{\frac{1}{2}})$$

$$r_{xy} = \frac{A_{1k}}{r^{\frac{1}{2}}} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} - \quad (3)$$

$$\frac{A_{2k}}{r^{\frac{1}{2}}} \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} - \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) + 0(r^{\frac{1}{2}})$$

$\sigma_x$  为  $x$  方向应力； $\sigma_y$  为  $y$  方向应力； $r_{xy}$  为剪应力； $\theta$  为极角。

在极坐标下，对裂纹内外侧应力强度因子进行了求解，其结果见下式 (4)、式 (5)。

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= \frac{b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2}{4(2a)^{\frac{1}{2}}(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} [N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\beta] \quad (4) \\ A_2(a) &= -\frac{\left( b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2 \right)}{4(2a)^{\frac{1}{2}}(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} (N_1 - N_2) \sin 2\beta \end{aligned} \right\} \text{内}$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(b) &= \frac{b^2 \left( 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right)}{4(2a)^{\frac{1}{2}}(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} [N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\beta] \quad (5) \\ A_2(b) &= -\frac{b^2 \left( 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right)}{4(2a)^{\frac{1}{2}}(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} (N_1 - N_2) \sin 2\beta \end{aligned} \right\} \text{外}$$

其中， $k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ ， $E(k)$ 、 $K(k)$  为一、二类完全椭圆积分

注：整个体系是对称的，当求内侧裂纹尖端的应力场时用  $A_1(a)$ 、 $A_2(a)$ ，当求外侧裂纹尖端的应力场时用  $A_1(b)$ 、 $A_2(b)$ 。

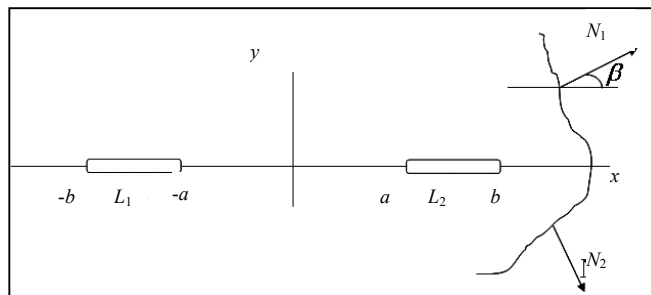


图 2 远场应力与裂隙分布示意图

Fig. 2 sketch map of far-field stress and crack distributing

对于单纯受拉状态， $\beta = 90^\circ$ ， $\sin \beta = 0$ ， $\cos 2\beta = -1$ ，可求出相应的  $A_1(a)$ 、 $A_2(a)$ 、 $A_1(b)$ 、 $A_2(b)$ 。根据 G. C. Sih (1972) 提出的最小应变能密度判据，即 S 判据，对于共线双裂纹，其内外端应变能密度因子如式 6。

$$S = W \times r = \frac{r}{2E} \left[ \begin{aligned} &\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \\ &2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \\ &2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned} \right] \quad (6)$$

因为是平面应力问题,  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , 所以式 6 化简为式 7

$$S = \frac{r}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2 \right] \quad (7)$$

联合式(1)、式(2)、式(3)、式(7)即可求得  $S$

应变能密度因子理论的基本思想是裂纹沿  $S = S_{\min}$  的方向扩展, 即

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \text{ 且 } \frac{\partial^2 S}{\partial^2 \theta} > 0$$

当  $S_{\min}$  达到某一临界值, 裂纹开始扩展, 即:

$$S_{\min} = S(\theta_0) = S_c$$

式中,  $\theta_0$  为裂纹扩展方向,  $S_c$  为待标定的值

### 3 实例验证

本文从远场应力求解裂纹尖端附近的近场应力, 主要探讨共线双裂纹在纯拉状态下裂纹尖端附近的应力场分布规律、裂纹扩展规律, 见图 1, 通过实例来形象化裂纹尖端的应力分布情况。

假定  $a=3$  cm,  $b=5$  cm, 则  $k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = 0.8$ ,

经查数学手册, 完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = 1.2729,$$

$$K(k) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx = 2.003, N=10 \text{ MPa,}$$

通过  $\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$  求解,  $\theta = 0^\circ$ 、 $\theta = 2\pi$ 、 $\theta = \pi$ 、 $\theta = -\pi$

和另外四个值  $2\arctan\left(\frac{\sqrt{(1+\nu)\nu}}{1+\nu}, \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}\right)$ 、

$$2\arctan\left(-\frac{\sqrt{(1+\nu)\nu}}{1+\nu}, \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}\right),$$

$$2\arctan\left(\frac{\sqrt{(1+\nu)\nu}}{1+\nu}, -\frac{1}{\sqrt{1+\nu}}\right),$$

$$2\arctan\left(-\frac{\sqrt{(1+\nu)\nu}}{1+\nu}, -\frac{1}{\sqrt{1+\nu}}\right),$$

将这 8 个值代入二阶求导关系式时, 发现只有  $\theta = 0$ 、 $2\pi$ 、 $\pi$ 、 $-\pi$  时

$\frac{\partial^2 S}{\partial^2 \theta} > 0$  关系式成立, 由此说明了共线双裂纹在

拉应力条件下将沿原有裂纹方向遵循自相似扩展。将这四个值分别代入  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  表达式, 针对裂纹内外侧, 分别展开讨论。

在纯拉应力条件下,  $\beta = 90^\circ$ 、 $A_2(a) = 0$ 、 $A_2(b) = 0$ 。

(1) 对于裂纹内侧

$$A_1(a) = \frac{b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2}{4\sqrt{2a(b^2 - a^2)}} \quad (8)$$

$$[N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\beta] = 0.3515N$$

①  $\theta = 0^\circ$  时

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{2A_1 k}{r^{0.5}}, \tau_{xy} = 0$$

$$S_{\min} =$$

$$\frac{r}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2 \right] = \quad (9)$$

$$\frac{4A_1^2 k^2 (1-\nu)}{E}$$

②  $\theta = 2\pi$  时

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{2A_1 k}{r^{0.5}}, \tau_{xy} = 0$$

$$S_{\min} = \frac{r}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2 \right] =$$

$$\frac{4A_1^2 k^2 (1-\nu)}{E}$$

(10)

③  $\theta = \pi$ 、 $\theta = -\pi$  时 (when  $\theta = \pi$ 、 $\theta = -\pi$ )

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$$S_{\min} = 0$$

(11)

从式(10)、式(11)求解过程可清晰看出  $\theta = 0^\circ$

和  $\theta = 2\pi$  时, 最小应变能密度因子是完全一样的, 并且大于零;  $\theta = \pi$ 、 $\theta = -\pi$  时, 最小应变能密度因子为零。从物理意义上考虑, 裂纹沿内侧扩展,

只能沿  $\theta = 0^\circ$  或  $\theta = 2\pi$  方向扩展, 而  $\theta = \pi$ 、 $\theta = -\pi$  方向为裂纹本身, 其各项应力均为零, 这与

现实是相符的, 所以可求出沿  $\theta = 0^\circ$  或  $\theta = 2\pi$  方向扩展所需的最小外力  $N_1$ , 见下文推导过程。

当沿  $\theta = 0^\circ$  或  $\theta = 2\pi$  扩展时  $\frac{4A^2 k}{E}(1-\nu) = S_c$

$S_c$  为待标定的材料常数，材料临界断裂韧性指标，本文主要考虑拉张破坏，故采用纯拉情况下  $S_c$  表达式如式 (12)

$$S_c = \frac{K_{Ic} [2(1-\nu) - \nu^2]}{12G} \quad (12)$$

$K_{Ic}$  为岩石纯拉断裂韧性值

$$S_c = \frac{N_1^2(1-\nu)}{2E}, \text{ 反解求出 } N_1 = \sqrt{\frac{2S_c E}{1-\nu}}$$

(2) 对于裂纹外侧

$$A_1(b) = \frac{b^2 \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right)}{4\sqrt{2a(b^2 - a^2)}}$$

$$[N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\beta] = 0.465 N_1$$

由  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  表达式可看出，其分布形式与裂纹内侧是相同的，只是数值大小差别。同理求

$$\text{出 } N_1' = \sqrt{\frac{4.625 S_c E}{1-\nu}}$$

$N_1$  为裂纹内侧尖端应力

$N_1'$  为裂纹外侧尖端应力

这里将使裂纹扩展的外力暂且定为极限破坏力，通过两式比较可明显看出  $\frac{N_1'}{N_1} \approx 1.5$ ，表明在

一定外力作用下，裂纹内侧先达到极限破坏，先于外侧开始扩展，故致使裂纹扩展的极限破坏力为

$$N_1 = \sqrt{\frac{2S_c E}{1-\nu}}$$

根据所求应力  $N$  值，便可根据模型受力面积求出外力  $P$  (整个体系外力)。

#### 4 裂纹尖端应力应变分布特征

通过式 (1) ~ 式 (3)，可得知在裂纹尖端附近将呈现应力的极大值，应力集中程度较高，下面几幅图是在假定裂纹长度为 2 cm，间距为 6 cm 的情况下的各应力分布图。

通过图 3 可得，在距离裂纹尖端 0~0.15 cm 范围内，没有应力分布，在 0.15 cm 处，应力已达到无穷大值，并且等值线相当密集，相对集中范围较小，图 4 中  $y$  方向的应力分布与  $x$  方向类似。

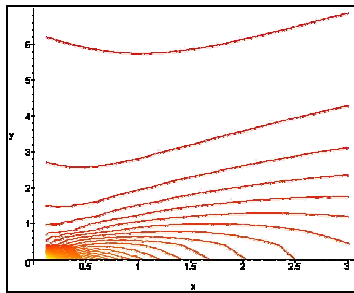


图 3 裂纹之间  $\sigma_x$  等值线图  
Fig. 3 isoline of x-direction stress between two cracks

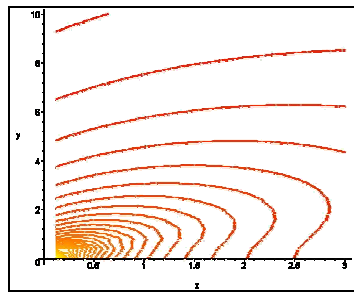


图 4 裂纹之间  $\sigma_y$  等值线图  
Fig. 4 isoline of y-direction stress between two cracks

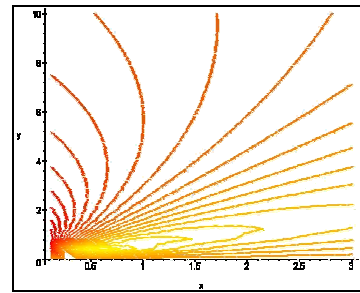


图 5 裂纹之间  $\tau_{xy}$  等值线图  
Fig. 5 isoline of shear stress between two cracks

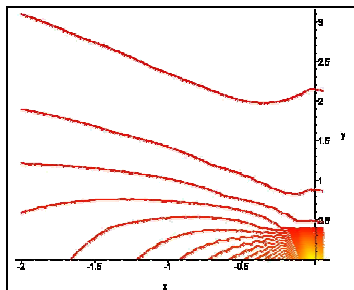


图 6 裂纹外侧  $\sigma_x$  等值线图  
Fig. 6 isoline of x-direction stress outside of crack

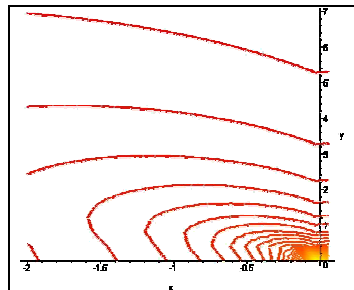


图 7 裂纹外侧  $\sigma_y$  等值线图  
Fig. 7 isoline of y-direction stress outside of crack

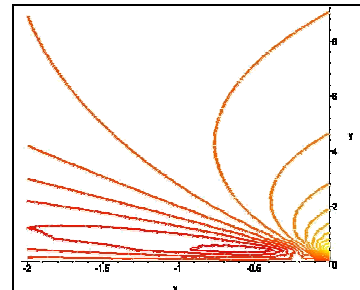


图 8 裂纹外侧  $\tau_{xy}$  等值线图  
Fig. 8 isoline of shear stress outside of crack

通过图 5 可知，在距离裂纹尖端 0~0.15 cm 范围内，没有应力分布，在 0.15 cm 处，应力已达到

无穷大值，0~0.15 cm 范围内等值线均相当密集，相对集中范围较大。

通过图 6~图 8 可知, 裂纹外侧的应力分布与裂纹内侧大致相同, 唯一的区别在于裂纹尖端附近有应力分布, 这说明裂纹外侧的应力集中程度要远远低于裂纹内侧。

### 5 结 论

通过上面的理论推导及实例求解, 我们可得出以下结论:

(1) 证明了共线双裂纹在拉应力作用下自相似扩展, 即沿原裂纹扩展。

(2) 在接近裂纹尖端时,  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  均出现无穷大值, 随距裂纹距离增大而迅速减小, 这与裂纹尖端易出现应力集中的物理意义是一致的; 裂纹外侧与内侧的应力场分布形式相同, 但数值偏小, 且内侧裂纹先于外侧裂纹扩展。

(4) 在材料性质、裂纹间距及长度已知的情况下, 可反推材料破坏时的极限外力大小。

### 参考文献:

[1] 刘东燕,叶晓明,朱凡.断续节理岩体强度评价及承载力预测[J].重庆建筑大学学报,1997, 19(2):21-27.  
Liu dongyan, Ye xiaoming, zhu fan. The strength evaluation and bearing capacity forecast of intermittent jointed rock mass[J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 1997, 19(2):21-27.

[2] Ladanyi B, Archambault G. Simulation of Shear Behaviour of a Jointed

Rock Mass[J], Proc, 11<sup>th</sup> Symp on Rock Mech, 1970(2):105.

[3] Barton N R. The Shear Strength of Rock and Rock Joints[J], Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1976,13:255-279.

[4] Barton N R, choubey V. The Shear Strength of Rock Joints in Theory and practice[J]. Rock Mech,1977,10:1-54.

[5] Stimpson B. Failure of slopes containing discontinuous planar joints [C]/In: Proc. 19th U.S. Symp. on Rock Mechanics. 1978.

[6] Lajtai E Z. Strength of discontinuous rocks in shear Geotechnique[J]. 1969,19(2):218-233.

[7] Pereira J P. Mechanics of Filled Discontinuities, Mechanics of Jointed and Faulted Rock[J]. Balkema, Rotterdam,1990(5): 375-380.

[8] Fazil Erdogan. On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads[J]. Proc 4<sup>th</sup> U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. Vol1. 1962(2): 552-555.

[9] G. C. Sih, G. T. Embley, R. S. Ravera. Impact response of a finite crack in plane extension[J]. International Journal of Solids and Structures, 1972, 8(7): 977-993.

[10] G. C. Sih, E. P. Chen Crack propagation in a strip of material under plane extension International Journal of Engineering Science, Volume 10, Issue 6, June 1972, Pages 537-551.

[11] 孙广忠著.岩体结构力学[M].北京:科学出版社,1988.  
Sun guangzhong. Structural mechanics of rock mass[M]. Beijing: Science Press, 1988.

~~~~~

\*\*\*\*\*  
\*待发表文章\*  
\* 摘要预报 \*  
\*\*\*\*\*

## 影响核电厂取水隧洞抗震性能的几个因素分析

赵 杰, 王桂萱, 裴 强, 张国强

(大连大学土木工程技术研究与开发中心 大连 116622)

**摘要:** 运用动力时程反应分析方法, 针对某百万千瓦级核电厂, 利用 FLAC3D 对其取水隧洞进行了抗震分析, 并绘制衬砌内力包络图。分析地应力、应力释放系数、围岩弹性模量变化对隧洞衬砌内力的影响, 总结其规律, 为隧洞抗震设计提供依据。