第53卷第1期 数学学报中文版 Vol.53, No.1
2010年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2010

文章编号: 0583-1431(2010)01-0171-16 文献标识码: A

三维 Boussinesq 方程组大解的全局 L^2 稳定性

李现今

中国科学院力学研究所 北京 100190
首都师范大学数学科学学院 北京 100048
E-mail: vip_manlxj@yahoo.com.cn

酒全森

首都师范大学数学科学学院 北京 100048
E-mail: qsjiumath@gmail.com

摘 要 对三维有界及无界区域上的 Boussinesq 方程的全局 L^2 稳定性进行了讨论. 在解满足适当的条件下, 证明了此解为稳定的, 并得出此稳定性条件的等价性条件, 最后得出了二维 Boussinesq 方程组在三维扰动下的解的全局存在性和稳定性.

关键词 Boussinesq 方程组; 强解; 稳定性
MR(2000) 主题分类 35Q35, 76B03
中图分类 O175.2, O175.21

The Global L^2 Stability of Large Solutions to Three Dimensional Boussinesq Equations

Xian Jin LI

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, *P. R. China*
School of Mathematics Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048, *P. R. China*
E-mail: *vip_manlxj@yahoo.com.cn*

Quan Sen JIU

School of Mathematics Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048, *P. R. China*
E-mail: *qsjiumath@gmail.com*

Abstract In this paper, we mainly study the global L^2 stability for large solutions to the Boussinesq equations in three-dimensional bounded or unbounded domains. Under suitable conditions of the large solutions, it is shown that the large solutions are stable. And we obtain the equivalent condition of this main stability condition. Moreover, the global existence and the stability of two-dimensional Boussinesq equations under three-dimensional perturbations are also established.

Keywords Boussinesq equations; strong solutions; stability
MR(2000) Subject Classification 35Q35, 76B03
Chinese Library Classification O175.2, O175.21

收稿日期: 2007-12-10; 接受日期: 2009-07-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10871133, 10771177)
通讯作者: 酒全森

1 引言

Boussinesq 方程是流体方程中一类重要的数学模型. 它是流体速度场与温度场耦合而成的方程. 该方程在天气预报, 海洋生态等领域都有重要的应用背景. 本文讨论如下 Boussinesq 方程

$$\begin{cases} u_t - \nu\triangle u + (u\cdot\bigtriangledown)u + \bigtriangledown p = \theta f, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \theta_t - \mu\triangle\theta + (u\cdot\bigtriangledown)\theta = 0, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \nabla\cdot u = 0, \\ \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad u|_{t=0} = u_0, \\ \theta|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 Ω 是 R^3 中的区域, 未知向量函数 $u = u(x,t)$ 表示流体速度, $\theta = \theta(x,t)$, $p = p(x,t)$ 分别表示温度与压力函数, $f = f(x,t)$ 为已知外力函数, $u_0 = u_0(x)$, $\theta_0 = \theta_0(x)$ 分别表示初始速度与初始温度, 常数 $\nu \geq 0$, $\mu \geq 0$ 分别表示流体粘性系数和导热系数.

1994 年, Ponce, Racke, Sideris 和 Titi [1] 证明了三维 Navier–Stokes 方程的强解的全局稳定性. 他们在给解加一定的条件下证明了有界区域及无界区域上 Navier–Stokes 方程的强解的全局稳定性, 也得出了三维扰动下非强迫二维强解的全局存在唯一性和稳定性. 三维 MHD 方程组的相应结果见文 [2], 在文 [2] 中考虑解的稳定性时, 给速度场和磁场都加了条件. 三维 Navier–Stokes 方程已有很多的研究. 关于 Navier–Stokes 方程组的衰减性质可见文 [3–11]. 关于解的存在唯一性及正则性可见文 [12–14].

本文将 Navier–Stokes 方程强解的全局稳定性结果推广到 Boussinesq 方程. 由于 Boussinesq 方程组中的第一个方程里含有 θ 与 f 的耦合项, 而这一项不能象 Navier–Stokes 方程那样为了简便, 在某种情况下不妨取作零去处理. 因此 Boussinesq 方程组处理起来要比 Navier–Stokes 方程困难. 与 MHD 方程组得出的结果相比较, 在本文定理 2 中的等价性条件这一结果中, 我们只给速度场加了条件, 没有给温度加条件. 这也印证了这样一个事实, 即 Boussinesq 方程组的正则性主要是由速度场所决定的.

本文假设 $\Omega \subset R^3$ 是边界 $\partial\Omega$ 属于 C^3 的区域. 记 H 是函数类 $\{u \in C_0^\infty(\Omega), \nabla\cdot u = 0\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的完备空间. 运用 Helmholtz 投影算子 $P : L^2(\Omega)| \to H$, 我们将问题 (1.1) 变为 (本文为了方便起见, 不妨取 $\nu = 1$, $\mu = 1$, 且均以 $||\cdot||$ 表示 $||\cdot||_{L^2}$)

$$\begin{cases} u_t + Au + P(u\cdot\bigtriangledown)u = P(\theta f), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \theta_t - \triangle\theta + (u\cdot\bigtriangledown)\theta = 0, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u = Pu, \\ \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad u|_{t=0} = u_0, \\ \theta|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

这里 $A = -P\triangle$ 为 Stokes 算子, $D(A) = H^2(\Omega)\cap V$, 其中 $V = H_0^1 \cap H$. 易知, 若 Ω 为有界区域或在某一方向有界的区域, 下面的 Poincare 不等式成立: 对任意 $g \in H_0^1(\Omega)$ 有

$$||g|| \leq C||\nabla g||, \tag{1.3}$$

其中 C 为常数.

本文第二节将给出主要结果, 其证明将在第三节给出.

2 主要结果

本文主要结果如下:

定理 1 设 $v\in L^\infty_{\rm loc}([0,\infty),V)\cap L^2_{\rm loc}([0,\infty),D(A))$, $\theta_1\in L^\infty_{\rm loc}([0,\infty),H^1_0(\Omega))\cap L^2_{\rm loc}([0,\infty),H^2)$ 为方程 (1.1) 的强解, 设 $v(\cdot,0)=v_0\in V$, $\theta_1(\cdot,0)=\theta_{10}$ 和外力 $f_1(\cdot,t)\in L^\infty(\Omega)$, 且满足

$$\int_0^\infty ||\nabla v(t)||^4+||\nabla\theta_1(t)||^4dt<\infty, \tag{2.1}$$

则有

(i) 设 Ω 是满足 (1.3) 式的区域和 $f_1\in L^4([0,\infty),L^\infty(\Omega))$, 那么存在 $\delta>0$, 使得如果 $u_0\in V$, $f\in L^4([0,\infty),L^\infty(\Omega))$, 并且

$$||\nabla u_0-\nabla v_0||^2+||\nabla\theta_0-\nabla\theta_{10}||^2+\int_0^\infty ||\nabla\theta_1||^2||f-f_1||^2_{L^\infty(\Omega)}dt<\delta, \tag{2.2}$$

则方程 (1.1) 存在唯一以 (u_0,θ_0) 为初值, f 为外力的全局强解, 并且存在一个 $M=M(\delta)$ 满足当 $\delta\to0$ 时, $M(\delta)\to0$, 使得

$$\sup_{t\geq0}(||\nabla u(t)-\nabla v(t)||+||\nabla\theta(t)-\nabla\theta_1(t)||)\leq M(\delta), \tag{2.3}$$

而且如果 $||\nabla v(t)||$, $||\nabla\theta_1(t)||$和 $||f(t)-f_1(t)||_{L^\infty(\Omega)}$ 以指数次幂衰减到零, 那么 $||\nabla u(t)||$, $||\nabla\theta(t)||$ 当 $t\to\infty$ 时也以指数次幂衰减到零;

(ii) 设 $\Omega\subset R^3$ 为一般区域, 假设 $f_1\in L^4([0,\infty),L^\infty(\Omega))$, 那么存在一个 $\delta>0$, 使得如果 $u_0\in V$, $f\in L^1\cap L^4([0,\infty),L^\infty(\Omega))$, 并且满足

$$||u_0-v_0||^2_{H^1}+||\theta_0-\theta_{10}||^2_{H^1}+\int_0^\infty ||\theta_1||\,||f-f_1||_{L^\infty(\Omega)}+||\theta_1||^2||f-f_1||^2_{L^\infty(\Omega)}dt<\delta, \tag{2.4}$$

则方程 (1.1) 存在唯一以 (u_0,θ_0) 为初值, f 为外力的全局强解, 而且还存在 $M=M(\delta)$, 当 $\delta\to0$ 时 $M(\delta)\to0$, 使得

$$\sup_{t\geq0}(||u(t)-v(t)||_{H^1}+||\theta(t)-\theta_1(t)||_{H^1})\leq M(\delta). \tag{2.5}$$

定理 2 假设 Ω 为全空间 R^3 或为满足 (1.3) 式的三维区域, 且外力 $f_1\in L^2\cap L^4([0,\infty,$ $L^\infty(\Omega))$, 则对于方程 (1.1) 的如定理 1 中所描述的强解 (v,θ_1) 来说, 条件

$$\int_0^\infty ||\nabla v(t)||^4+||\nabla\theta_1(t)||^4dt<\infty,$$

与条件

$$v\in L^q([0,\infty),L^p(\Omega))$$

等价, 其中 $\frac{2}{q}+\frac{3}{p}=1$, $3<p\leq\infty$.

定理 3 设 $v_0=(v_{01},v_{02})\in L^1(R^2)\cap H^1(R^2),\theta_{10}=\theta_{10}(x_1,x_2)$, 满足 $\nabla\cdot v_0=0$. 设 $f\in L^1([0,\infty),L^\infty(R^3))\cap L^4([0,\infty),L^2(R^3))$, 则存在一个 $\delta>0$, 使得如果 $w_0\in V(R^3),E_0\in H^1_0(R^3)$, 且

$$||w_0||^2_{H^1(R^3)}+||E_0||^2_{H^1(R^3)}+\int_0^\infty ||f(t)-\tilde f_1(t)||^2dt+\int_0^\infty ||\theta_1(t)||^2_{L^\infty(R^2)}||f(t)-\tilde f_1(t)||^2dt<\delta,$$

那么问题 (1.1) 存在唯一以 $(u_0,\theta_0)=(\tilde v_0+w_0,\,\tilde\theta_{10}+E_0)$ 为初值的全局强解, 这里

$$\begin{aligned}
&\tilde v_0(x_1,x_2,x_3)=(v_{01}(x_1,x_2),v_{02}(x_1,x_2),0),\\
&\tilde\theta_{10}(x_1,x_2,x_3)=\theta_{10}(x_1,x_2),\\
&\tilde f_1(x_1,x_2,x_3)(t)=(f_{11}(x_1,x_2)(t),f_{12}(x_1,x_2)(t),0).
\end{aligned}$$

3 定理的证明

本节给出定理 1– 定理 3 的证明. 在证明定理之前先给出如下常用 Young 不等式: 对 $a>0$, $b>0$ 及 $\varepsilon>0$, 有

$$ab \le \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q, \tag{3.1}$$

其中 $C_\varepsilon = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

定理 1 的证明 在 u_0, θ_0 和 f 的假设条件下, 对某个 $T{=}T(\|\nabla u_0\|, \|\nabla\theta_0\|){>}0$, 方程 (1.1) 存在局部强解 (u,θ), 其中 $u \in L^\infty((0,T),V)\cap L^2((0,T),D(A))$, $\theta \in L^\infty((0,T),H_0^1(\Omega))\cap L^2((0,T), H^2(\Omega))$. 因此, 为了得到解的全局存在性, 只需要在解的局部存在区间上一致控制 $\|\nabla u(t)\|$ 和 $\|\nabla\theta(t)\|$ 即可.

为此目的, 我们设 $w := u - v$, $E := \theta - \theta_1$, 那么 w, E 满足

$$w_t + Aw + P[(w\cdot\nabla)w + (w\cdot\nabla)v + (v\cdot\nabla)w] = P(Ef + \theta_1(f-f_1)), \tag{3.2}$$

$$E_t - \triangle E + (w\cdot\nabla)E + (w\cdot\nabla)\theta_1 + (v\cdot\nabla)E = 0, \tag{3.3}$$

初值分别为 $w_0 = u_0 - v_0$, $E_0 = \theta_0 - \theta_{10}$.

在 (3.2) 式两边同乘以 Aw, 并在 Ω 上进行积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2 + \|Aw\|^2 + \int_\Omega P((w\cdot\nabla)w)Aw + \int_\Omega P((w\cdot\nabla)v)Aw\\ &\quad + \int_\Omega P((v\cdot\nabla)w)Aw = \int_\Omega P(Ef+\theta_1(f-f_1))Aw.\end{aligned} \tag{3.4}$$

在 (3.3) 式两边同乘以 $-\triangle E$, 并在 Ω 上进行积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla E\|^2 + \|\triangle E\|^2 - \int_\Omega (w\cdot\nabla)E\cdot\triangle E - \int_\Omega (w\cdot\nabla)\theta_1\cdot\triangle E - \int_\Omega (v\cdot\nabla)E\cdot\triangle E = 0. \tag{3.5}$$

把 (3.4) 与 (3.5) 两式相加得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla w\|^2 + \|\nabla E\|^2) + (\|Aw\|^2 + \|\triangle E\|^2)\\ &\quad + \underbrace{\int_\Omega P((w\cdot\nabla)w)Aw}_{\mathrm{I}_1} + \underbrace{\int_\Omega P((w\cdot\nabla)v)Aw}_{\mathrm{I}_2} + \underbrace{\int_\Omega P((v\cdot\nabla)w)Aw}_{\mathrm{I}_3}\\ &\quad - \underbrace{\int_\Omega (w\cdot\nabla)E\cdot\triangle E}_{\mathrm{I}_4} - \underbrace{\int_\Omega (w\cdot\nabla)\theta_1\cdot\triangle E}_{\mathrm{I}_5} - \underbrace{\int_\Omega (v\cdot\nabla)E\cdot\triangle E}_{\mathrm{I}_6}\\ &= \underbrace{\int_\Omega P(Ef+\theta_1(f-f_1))Aw}_{\mathrm{I}_7}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

为了估计 I_1–I_7, 我们需要一些与 $g \in D(A)$ 有关的插值不等式. 由文 [15, 引理 1] 知 $\|\partial_{ij}^2 g\| \le C(\|Ag\| + \|\nabla g\|)$. 由分步积分和 Cauchy–Schwarz 不等式, 得

$$\|\nabla g\|^2 = -\int_\Omega \triangle g g = -\int_\Omega P\triangle g g \le \|Ag\|\,\|g\| \le \|Ag\|^2 + \|g\|^2. \tag{3.7}$$

所以, 我们有

$$\|\partial_{ij}^2 g\| \le C(\|Ag\| + \|g\|). \tag{3.8}$$

若 (1.3) 式成立, 从 (3.7) 式容易得出

$$\|g\| + \|\nabla g\| \le C\|Ag\|. \tag{3.9}$$

从而 (3.8) 式可以改进成

$$||\partial_{ij}^2 g|| \le C||Ag||. \tag{3.10}$$

由 Fourier 变换的知识可知, 此不等式对于全空间 R^3 也是成立的.

当 $g \in D(A)$ 时, 我们有 [3]

$$||g||_{L^6} \le C||\nabla g|| \tag{3.11}$$

对于任何三维区域 $\Omega \subset R^3$ 都成立.

对于满足 (1.3) 式的区域, 由 Gagliardo-Nirenberg 不等式及 (3.10) 和 (3.11) 式, 得到

$$||g||_{L^\infty} \le C||g||_{L^6}^{\frac{1}{2}}||\partial_{ij}^2 g||^{\frac{1}{2}} \le C||g||_{L^6}^{\frac{1}{2}}||Ag||^{\frac{1}{2}} \le C||\nabla g||^{\frac{1}{2}}||Ag||^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

于是利用 Calderon 延展定理 [16] 和 (3.8) 式, 得到对于我们考虑的所有区域, 下式都成立

$$||g||_{L^\infty} \le C||g||_{L^6}^{\frac{1}{2}}||g||_{H^2}^{\frac{1}{2}} \le C||g||_{L^6}^{\frac{1}{2}}(||Ag||^{\frac{1}{2}} + ||g||^{\frac{1}{2}}) \le C||\nabla g||^{\frac{1}{2}}(||Ag||^{\frac{1}{2}} + ||g||^{\frac{1}{2}}). \tag{3.13}$$

如果 $\Omega = R^3$ 或是满足 (1.3) 式的区域, 由 Gagliardo–Nirenberg 不等式和 (3.10) 式, 有

$$||\nabla g||_{L^3} \le C||\nabla g||^{\frac{1}{2}}||\partial_{ij}^2 g||^{\frac{1}{2}} \le C||\nabla g||^{\frac{1}{2}}||Ag||^{\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

对于一般的情况, 我们可以利用 Calderon 延展定理和 (3.8) 式得到

$$||\nabla g||_{L^3} \le C||\nabla g||^{\frac{1}{2}}(||Ag||^{\frac{1}{2}} + ||g||^{\frac{1}{2}}). \tag{3.15}$$

(i) 下面继续证明定理 1, 若 (1.3) 式成立, 此时 Ω 是使得 (3.12) 和 (3.14) 式成立的区域. 对 I_1–I_7 估计如下

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_1| &= \left|\int_\Omega P((w\cdot\nabla)w)Aw\right| = \left|\int_\Omega (w\cdot\nabla)w\cdot Aw\right| \le C||w||_{L^6}||\nabla w||_{L^3}||Aw|| \\ &\le C||w||_{L^6}(||\nabla w||^{\frac{1}{2}}||Aw||^{\frac{1}{2}})||Aw|| \le C||\nabla w||^{\frac{3}{2}}||Aw||^{\frac{3}{2}} \\ &\le C_\varepsilon||\nabla w||^6 + \epsilon||Aw||^2,\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_2| &= \left|\int_\Omega P((w\cdot\nabla)v)Aw\right| = \left|\int_\Omega (w\cdot\nabla)v\cdot Aw\right| \\ &\le C||w||_{L^\infty}||\nabla v||\,||Aw|| \le C||\nabla v||\,||\nabla w||^{\frac{1}{2}}||Aw||^{\frac{3}{2}} \\ &\le C_\epsilon||\nabla v||^4||\nabla w||^2 + \varepsilon||Aw||^2,\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_3| &= \left|\int_\Omega P((v\cdot\nabla)w)\cdot Aw\right| = \left|\int_\Omega (v\cdot\nabla)w\cdot Aw\right| \\ &\le ||v||_{L^6}||\nabla w||_{L^3}||Aw|| \le C||\nabla v||\,||\nabla w||^{\frac{1}{2}}||Aw||^{\frac{3}{2}} \\ &\le C_\varepsilon||\nabla v||^4||\nabla w||^2 + \varepsilon||Aw||^2,\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_4| &= \left|\int_\Omega (w\cdot\nabla)E\cdot\triangle E\right| \le c||w||_{L^\infty}||\nabla E||\,||\triangle E|| \\ &\le C||\nabla w||^{\frac{1}{2}}||Aw||^{\frac{1}{2}}||\nabla E||\,||\triangle E|| \\ &\le C_\varepsilon||\nabla E||^4||\nabla w||^2 + \frac{1}{4}||Aw||^2 + \varepsilon||\triangle E||^2,\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_5| &= \left|\int_\Omega (w\cdot\nabla)\theta_1\cdot\triangle E\right| \le C||w||_{L^\infty}||\nabla\theta_1||\,||\triangle E|| \\ &\le C||\nabla w||^{\frac{1}{2}}||Aw||^{\frac{1}{2}}||\nabla\theta_1||\,||\triangle E|| \\ &\le C_\varepsilon||\nabla\theta_1||^4||\nabla w||^2 + \frac{1}{4}||Aw||^2 + \varepsilon||\triangle E||^2,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_6| &= \left|\int_\Omega v\cdot\nabla E\cdot\triangle E\right| \le C||v||_{L^6}||\nabla E||_{L^3}||\triangle E|| \\
&\le C||\nabla v||\,||\nabla E||^{\frac{1}{2}}||\triangle E||^{\frac{3}{2}} \le C_\varepsilon||\nabla v||^4||\nabla E||^2+\varepsilon||\triangle E||^2,
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_7| &= \left|\int_\Omega P(Ef+\theta_1(f-f_1))\cdot Aw\right| \\
&\le \left|\int_\Omega P(Ef)\cdot Aw\right| + \left|\int_\Omega P(\theta_1(f-f_1))\cdot Aw\right| \\
&\le ||P(Ef)||\,||Aw||+||P(\theta_1(f-f_1))||\,||Aw|| \\
&\le C||\nabla E||^{\frac{1}{2}}||\triangle E||^{\frac{1}{2}}||f||\,||Aw||+C||\theta_1||\,||f-f_1||_{L^\infty}||Aw|| \\
&\le C_\varepsilon||f||^4||\nabla E||^2+\frac{1}{4}||\triangle E||^2+\varepsilon||Aw||^2 \\
&\quad +C_\varepsilon||\nabla\theta_1||^2||f-f_1||^2_{L^\infty}+\varepsilon||Aw||^2.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

选取 ε 充分小 (例如不妨取 $\varepsilon=0.01$), 将 (3.16)–(3.22) 代入 (3.6) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)+\tilde{C}_0(||Aw||^2+||\triangle E||^2) \\
&\le C[||\nabla w||^6+||\nabla v||^4||\nabla w||^2+||\nabla E||^4||\nabla w||^2+||\nabla\theta_1||^4||\nabla w||^2 \\
&\quad +||\nabla v||^4||\nabla E||^2+||f||^4||\nabla E||^2+||\nabla\theta_1||^2||f-f_1||^2_{L^\infty}] \\
&\le C[(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)^3+(||\nabla v||^4+||\nabla\theta_1||^4+||f||^4) \\
&\quad \cdot(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)+||\nabla\theta_1||^2||f-f_1||^2_{L^\infty}].
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

令 $h(t)=:||\nabla w(t)||^2+||\nabla E(t)||^2$, 得到

$$
\begin{aligned}
h'(t)+C_0h(t) \le C[&h^3(t)+(||\nabla v(t)||^4+||\nabla\theta_1(t)||^4+||f(t)||^4)h(t) \\
&+||\nabla\theta_1(t)||^2||f(t)-f_1(t)||^2_{L^\infty}].
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

设

$$
\lambda := C\sup_{s\ge 0}\mathrm{e}^{-C_0s/2}\int_0^s \mathrm{e}^{C_0\tau/2}||\nabla\theta_1(\tau)||^2||f(\tau)-f_1(\tau)||^2_{L^\infty}d\tau,
$$

则

$$
\lambda \le C\int_0^\infty ||\nabla\theta_1(\tau)||^2||f(\tau)-f_1(\tau)||^2_{L^\infty}d\tau.
$$

如果

$$
||\nabla w_0||^2+||\nabla E_0||^2+\lambda \le \frac{1}{2\max(1,\mathrm{e}^{C\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4+||f(\tau)||^4d\tau})}\left(\frac{C_0}{2C}\right)^{\frac{1}{2}} \le \delta \tag{3.25}
$$

成立, 则存在 $t_1>0$, 当 $0\le s\le t_1$ 时, 有

$$
||\nabla w(s)||^2+||\nabla E(s)||^2 \le \left(\frac{C_0}{2C}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.26}
$$

因此, (3.24) 式意味着对 $s\le t_1$, 有

$$
h'(s)+\frac{C_0}{2}h(s)\le C[(||\nabla v(s)||^4+||\nabla\theta_1(s)||^4+||f(s)||^4)h(s)+||\nabla\theta_1(s)||^2||f(s)-f_1(s)||^2_{L^\infty}], \tag{3.27}
$$

由 Gronwall 不等式, 对 $0\le s\le t_1$, 有

$$
h(s) \le \mathrm{e}^{-\frac{C_0s}{2}}\left(h(0)+C\int_0^s ||\nabla\theta_1||^2||f-f_1||^2_{L^\infty}\right)\times\mathrm{e}^{C\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4+||f(\tau)||^4d\tau} \tag{3.28}
$$

成立. 进而由 (3.25) 式可以推得, 对所有 $0\le s\le t_1$, 均有 $h(s)\le \frac{1}{2}(\frac{C_0}{2C})^{\frac{1}{2}}$ 成立. 这样推得 (3.26) 式在 $h(t)$ 的整个定义域上成立, 从而 $||\nabla w(t)||+||\nabla E(t)||$ 在解的存在区间内是一致有界的.

另一方面, 以 (v,θ_1) 为解的方程

$$\left\{\begin{array}{ll} v_t+Av+P(v\cdot\bigtriangledown)v=P(\theta_1 f_1), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ \theta_{1t}-\triangle\theta_1+(v\cdot\bigtriangledown)\theta_1=0, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ v=Pv, & \\ \theta_1|_{t=0}=\theta_{10},\quad v|_{t=0}=v_0, & \\ \theta|_{\partial\Omega}=0,\qquad v|_{\partial\Omega}=0. & \end{array}\right. \tag{3.29}$$

在 (3.29) 的第一个方程两边同乘以 Av, 并在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla v||^2+||Av||^2+\int_\Omega P((v\cdot\nabla)v)\cdot Av=\int_\Omega P(\theta_1 f_1)\cdot Av. \tag{3.30}$$

在 (3.29) 的第二个方程两边同乘以 $-\triangle\theta_1$, 并在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\theta_1||^2+||\triangle\theta_1||^2-\int_\Omega(v\cdot\nabla)\theta_1\triangle\theta_1=0. \tag{3.31}$$

将 (3.30) 式和 (3.31) 式相加, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||\nabla v||^2+||\nabla\theta_1||^2)+||Av||^2+||\triangle\theta_1||^2\\ &\quad+\underbrace{\int_\Omega P((v\cdot\nabla)v)\cdot Av}_{\mathrm{J}_1}-\underbrace{\int_\Omega(v\cdot\nabla)\theta_1\triangle\theta_1}_{\mathrm{J}_2}=\underbrace{\int_\Omega P(\theta_1 f_1)\cdot Av}_{\mathrm{J}_3}.\end{aligned}$$

对 J_1–J_3 作如下估计

$$\begin{aligned}|\mathrm{J}_1|&=\left|\int_\Omega P((v\cdot\nabla)v)\cdot Av\right|=\left|\int_\Omega(v\cdot\nabla)v\cdot Av\right|\\ &\le C||v||_{L^6}||\nabla v||_{L^3}||Av||\le C||\nabla v||^{\frac{3}{2}}||Av||^{\frac{3}{2}}\\ &\le C_\varepsilon||\nabla v||^6+\varepsilon||Av||^2,\\ |\mathrm{J}_2|&=\left|\int_\Omega(v\cdot\nabla)\theta_1\triangle\theta_1\right|\le C||v||_{L^\infty}||\nabla\theta_1||\,||\triangle\theta_1||\\ &\le C_\varepsilon||\nabla v||\,||Av||\,||\nabla\theta_1||^2+\varepsilon||\triangle\theta_1||^2\\ &\le C_\varepsilon||\nabla v||^2||\nabla\theta_1||^4+\frac{1}{4}||Av||^2+\varepsilon||\triangle\theta_1||^2,\\ |\mathrm{J}_3|&=\left|\int_\Omega P(\theta_1 f_1)\cdot Av\right|=\left|\int_\Omega(\theta_1 f_1)\cdot Av\right|\\ &\le C||\nabla\theta_1||^{\frac{1}{2}}||\triangle\theta_1||^{\frac{1}{2}}||f_1||\,||Av||\le C_\varepsilon||\nabla\theta_1||\,||f_1||^2||\triangle\theta_1||+\varepsilon||Av||^2\\ &\le C_\varepsilon||f_1||^4||\nabla\theta_1||^2+\frac{1}{4}||\triangle\theta_1||^2+\varepsilon||Av||^2.\end{aligned}$$

选取 ε 充分小 (例如不妨取 $\varepsilon=0.01$), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(||\nabla v||^2+||\nabla\theta_1||^2)+\tilde{C_0}(||Av||^2+||\triangle\theta_1||^2)\\ &\quad\le C(||\nabla v||^4+||\nabla\theta_1||^4+||f_1||^4)(||\nabla v||^2+||\nabla\theta_1||^2).\end{aligned} \tag{3.32}$$

利用 Gronwall 不等式, 有

$$||\nabla v||^2+||\nabla\theta_1||^2\le \mathrm{e}^{C\int_0^t||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4+||f_1(\tau)||^4d\tau}(||\nabla v_0||^2+||\nabla\theta_{10}||^2), \tag{3.33}$$

因此, $||\nabla v(t)||+||\nabla\theta_1(t)||$ 也是一致有界的. 由

$$||\nabla u(t)||+||\nabla\theta(t)||=||\nabla u(t)-\nabla v(t)+\nabla v(t)||+||\nabla\theta(t)-\nabla\theta_1(t)+\nabla\theta_1(t)||$$
$$\leq||\nabla w(t)||+||\nabla E(t)||+||\nabla v(t)||+||\nabla\theta_1(t)|| \tag{3.34}$$

可知 $||\nabla u(t)||+||\nabla\theta(t)||$ 在解的存在区间内一致有界. 由连续性方法知 (1.1) 的解 (u,θ) 在 $(0,\infty)$ 上全局存在. 定理 1 中情形 (i) 余下的结论可由估计 (3.28), (3.33) 及 (3.34) 式得到. 需指出的是, (2.2) 式中的 δ 是根据 (3.25) 式选择的.

现在, 我们来证明情形 (ii), 也就是区域 Ω 满足 (3.14), (3.12) 式的情形. 在 (3.2) 式两边同乘以 w, 并在 Ω 上进行积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w||^2+||\nabla w||^2+\int_\Omega P((w\cdot\nabla)v)\cdot w=\int_\Omega P(Ef+\theta_1(f-f_1))\cdot w, \tag{3.35}$$

这里用到了如下等式

$$\int_\Omega P((w\cdot\nabla)w)\cdot w=\int_\Omega P((v\cdot\nabla)w)\cdot w=0. \tag{3.36}$$

在 (3.3) 式两边同乘以 E, 并在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||E||^2+||\nabla E||^2+\int_\Omega(w\cdot\nabla)\theta_1\cdot E=0, \tag{3.37}$$

这里用到了如下等式

$$\int_\Omega(w\cdot\nabla)E\cdot E=\int_\Omega(v\cdot\nabla)E\cdot E=0. \tag{3.38}$$

(3.35) 式与 (3.37) 式相加, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||w||^2+||E||^2)+||\nabla w||^2+||\nabla E||^2+\underbrace{\int_\Omega P((w\cdot\nabla)v)\cdot w}_{\mathrm{K}_1}+\underbrace{\int_\Omega(w\cdot\nabla)\theta_1\cdot E}_{\mathrm{K}_2}$$
$$=\underbrace{\int_\Omega P(Ef+\theta_1(f-f_1))\cdot w}_{\mathrm{K}_3}. \tag{3.39}$$

对 K_1–K_3 作如下估计

$$|\mathrm{K}_1|\leq\left|\int_\Omega(w\cdot\nabla)v\cdot w\right|\leq C||w||_{L^4}^2||\nabla v||\leq C||w||^{\frac{1}{2}}||w||_{L^6}^{\frac{3}{2}}||\nabla v||$$
$$\leq C||w||^{\frac{1}{2}}||\nabla w||^{\frac{3}{2}}||\nabla v||\leq C_\varepsilon||\nabla v||^4||w||^2+\varepsilon||\nabla w||^2, \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{K}_2|&=\left|\int_\Omega(w\cdot\nabla)\theta_1\cdot E\right|\leq C||w||_{L^4}||\nabla\theta_1||\,||E||_{L^4}\\&\leq C||w||^{\frac{1}{4}}||\nabla w||^{\frac{3}{4}}||\nabla\theta_1||\,||E||^{\frac{1}{4}}||\nabla E||^{\frac{3}{4}}\\&\leq C||w||^{\frac{1}{2}}||\nabla w||^{\frac{3}{2}}||\nabla\theta_1||+C||E||^{\frac{1}{2}}||\nabla E||^{\frac{3}{2}}||\nabla\theta_1||\\&\leq C_\varepsilon||\nabla\theta_1||^4||w||^2+\varepsilon||\nabla w||^2+C_\varepsilon||\nabla\theta||^4||E||^2+\varepsilon||\nabla E||^2,\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{K}_3|&=\left|\int_\Omega P(Ef+\theta_1(f-f_1))\cdot w\right|\\&\leq\left|\int_\Omega Ef\cdot w\right|+\left|\int_\Omega\theta_1(f-f_1)\cdot w\right|\\&\leq C||E||\,||f||_{L^\infty}||w||+||\theta_1||\,||f-f_1||_{L^\infty}||w||\\&\leq C||f||_{L^\infty}(||w||^2+||E||^2)+||\theta_1||\,||f-f_1||_{L^\infty}\sqrt{||w||^2+||E||^2}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

选取 ε 充分小 (例如不妨取 $\varepsilon = 0.01$), 将 (3.40)–(3.42) 带入 (3.39) 式, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||w||^2+||E||^2)+C_0(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)\\&\le C(||\nabla v||^4+||\nabla\theta_1||^4+||f||_{L^\infty})(||w||^2+||E||^2)\\&\quad+||\theta_1||\,||f-f_1||_{L^\infty}\sqrt{||w||^2+||E||^2}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{||w(t)||^2+||E(t)||^2}&\le C(||\nabla v(t)||^4+||\nabla\theta_1(t)||^4+||f(t)||_{L^\infty})\sqrt{||w(t)||^2+||E(t)||^2}\\&\quad+||\theta_1(t)||\,||f(t)-f_1(t)||_{L^\infty}.\end{aligned}\tag{3.44}$$

利用 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned}\sqrt{||w(t)||^2+||E(t)||^2}&\le e^{C\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4+||f(\tau)||_{L^\infty}d\tau}\\&\quad\cdot\left(||w_0||+||E_0||+\int_0^\infty||\theta_1(\tau)||\,||f(\tau)-f_1(\tau)||_{L^\infty}d\tau\right)\end{aligned}\tag{3.45}$$

对所有 $t>0$ 均成立.

对 (3.6) 式, 当 Ω 为一般区域时, 对 I_1–I_7 作如下估计

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_1|&=\left|\int_\Omega P((w\cdot\nabla)w)\cdot Aw\right|=\left|\int_\Omega(w\cdot\nabla)w\cdot Aw\right|\\&\le C||w||_{L^6}[||\nabla w||^{\frac12}(||Aw||^{\frac12}+||w||^{\frac12})]||Aw||\\&\le C_\varepsilon||\nabla w||^6+\epsilon||Aw||^2+C_\varepsilon||\nabla w||^3||w||+\varepsilon||Aw||^2\\&\le C_\varepsilon||\nabla w||^6+\frac{C_\varepsilon}{2}(||\nabla w||^6+||w||^2)+2\varepsilon||Aw||^2\\&\le C(||\nabla w||^6+||w||^2)+2\varepsilon||Aw||^2,\end{aligned}\tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_2|&=\left|\int_\Omega P((w\cdot\nabla)v)\cdot Aw\right|=\left|\int_\Omega(w\cdot\nabla)v\cdot Aw\right|\le C||w||_{L^\infty}||\nabla v||\,||Aw||\\&\le C||\nabla v||[||\nabla w||^{\frac12}(||Aw||^{\frac12}+||w||^{\frac12})]||Aw||\\&\le C_\varepsilon||\nabla v||^4||\nabla w||^2+\varepsilon||Aw||^2+C_\varepsilon||\nabla v||^2||\nabla w||\,||w||+\varepsilon||Aw||^2\\&\le C_\varepsilon||\nabla v||^4||\nabla w||^2+\frac{C_\varepsilon}{2}(||\nabla v||^4||\nabla w||^2+||w||^2)+2\varepsilon||Aw||^2\\&\le C(||\nabla v||^4||\nabla w||^2+||w||^2)+2\varepsilon||Aw||^2,\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_3|&=\left|\int_\Omega P((v\cdot\nabla)w)\cdot Aw\right|=\left|\int_\Omega(v\cdot\nabla)w\cdot Aw\right|\le||v||_{L^6}||\nabla w||_{L^3}||Aw||\\&\le C||\nabla v||[||\nabla w||^{\frac12}(||Aw||^{\frac12}+||w||^{\frac12})]||Aw||\\&\le C(||\nabla v||^4||\nabla w||^2+||w||^2)+2\varepsilon||Aw||^2,\end{aligned}\tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_4|&=\left|\int_\Omega(w\cdot\nabla)E\cdot\triangle E\right|\le C||w||_{L^\infty}||\nabla E||\,||\triangle E||\\&\le C[||\nabla w||^{\frac12}(||Aw||^{\frac12}+||w||^{\frac12})]||\nabla E||\,||\triangle E||\\&\le C_\varepsilon||\nabla E||^2||\nabla w||\,||Aw||+\varepsilon||\triangle E||^2+C_\varepsilon||\nabla E||^2||\nabla w||\,||w||+\varepsilon||\triangle E||^2\\&\le C_\varepsilon||\nabla E||^4||\nabla w||^2+\frac14||Aw||^2+\frac{C_\varepsilon}{2}(||\nabla E||^4||\nabla w||^2+||w^2||)+2\varepsilon||\triangle E||^2\\&\le C(||\nabla E||^4||\nabla w||^2+||w^2||)+\frac14||Aw||^2+2\varepsilon||\triangle E||^2,\end{aligned}\tag{3.49}$$

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_5| &= \left|\int_\Omega (w\cdot\nabla)\theta_1\cdot\triangle E\right| \le C\|w\|_{L^\infty}\|\nabla\theta_1\|\,\|\triangle E\| \\
&\le C[\|\nabla w\|^{\frac12}(\|Aw\|^{\frac12}+\|w\|^{\frac12})]\|\nabla\theta_1\|\,\|\triangle E\| \\
&\le C_\varepsilon\|\nabla\theta_1\|^2\|\nabla w\|\,\|Aw\|+\varepsilon\|\triangle E\|^2+C_\varepsilon\|\nabla\theta_1\|^2\|\nabla w\|\,\|w\|+\varepsilon\|\triangle E\|^2 \\
&\le C_\varepsilon\|\nabla\theta_1\|^4\|\nabla w\|^2+\frac14\|Aw\|^2+\frac{C_\varepsilon}{2}(\|\nabla\theta_1\|^4\|\nabla w\|^2+\|w\|^2)+2\varepsilon\|\triangle E\|^2 \\
&\le C(\|\nabla\theta_1\|^4\|\nabla w\|^2+\|w\|^2)+\frac14\|Aw\|^2+2\varepsilon\|\triangle E\|^2, \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_6| &= \left|\int_\Omega v\cdot\nabla E\cdot\triangle E\right| \le \|v\|_{L^6}\|\nabla E\|_{L^3}\|\triangle E\| \\
&\le C\|\nabla v\|[\|\nabla E\|^{\frac12}(\|\triangle E\|^{\frac12}+\|E\|^{\frac12})]\|\triangle E\| \\
&\le C_\varepsilon\|\nabla v\|^4\|\nabla E\|^2+\varepsilon\|\triangle E\|^2+C_\varepsilon\|\nabla v\|^2\|\nabla E\|\,\|E\|+\varepsilon\|\triangle E\|^2 \\
&\le C(\|\nabla v\|^4\|\nabla E\|^2+\|E\|^2)+2\varepsilon\|\triangle E\|^2, \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_7| &= \left|\int_\Omega P(Ef+\theta_1(f-f_1))\cdot Aw\right| \\
&\le \left|\int_\Omega P(Ef)\cdot Aw\right|+\left|\int_\Omega P(\theta_1(f-f_1))\cdot Aw\right| \\
&\le \left|\int_\Omega Ef\cdot Aw\right|+\left|\int_\Omega \theta_1(f-f_1)\cdot Aw\right| \\
&\le C\|E\|_{L^\infty}\|f\|\,\|Aw\|+C\|\theta_1\|\,\|f-f_1\|_{L^\infty}\|Aw\| \\
&\le C[\|\nabla E\|^{\frac12}(\|\triangle E\|^{\frac12}+\|E\|^{\frac12})]\|f\|\,\|Aw\|+C\|\theta_1\|\,\|f-f_1\|_{L^\infty}\|Aw\| \\
&\le C_\varepsilon\|\nabla E\|\,\|f\|^2\|\triangle E\|+\varepsilon\|Aw\|^2+C_\varepsilon\|\nabla E\|\,\|E\|\,\|f\|^2 \\
&\quad +\varepsilon\|Aw\|^2+C_\varepsilon\|\theta_1\|^2\|f-f_1\|_{L^\infty}^2+\varepsilon\|Aw\|^2 \\
&\le C_\varepsilon\|f\|^4\|\nabla E\|^2+\frac14\|\triangle E\|^2+\frac{C_\varepsilon}{2}(\|f\|^4\|\nabla E\|^2+\|E\|^2) \\
&\quad +C_\varepsilon\|\theta_1\|^2\|f-f_1\|_{L^\infty}^2+3\varepsilon\|Aw\|^2 \\
&\le C(\|f\|^4\|\nabla E\|^2+\|\theta_1\|^2\|f-f_1\|_{L^\infty}^2)+\frac14\|\triangle E\|^2+3\varepsilon\|Aw\|^2. \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

选取 ε 充分的小 (例如不妨取 $\varepsilon=0.01$), 将 (3.46)–(3.52) 式代入 (3.6) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\nabla w\|^2+\|\nabla E\|^2)+C_0(\|Aw\|^2+\|\triangle E\|^2) \\
&\quad\le C[\|\nabla w\|^6+\|\nabla v\|^4\|\nabla w\|^2+\|\nabla E\|^4\|\nabla w\|^2+\|\nabla\theta_1\|^4\|\nabla w\|^2 \\
&\qquad +\|\nabla v\|^4\|\nabla E\|^2+\|f\|^4\|\nabla E\|^2+\|w\|^2+\|E\|^2+\|\theta_1\|^2\|f-f_1\|_{L^\infty}^2] \\
&\quad\le C[(\|\nabla w\|^2+\|\nabla E\|^2)^3+(\|\nabla v\|^4+\|\nabla\theta_1\|^4+\|f\|^4) \\
&\qquad \cdot(\|\nabla w\|^2+\|\nabla E\|^2)+\|w\|^2+\|E\|^2+\|\theta_1\|^2\|f-f_1\|_{L^\infty}^2]. \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

由于

$$
\|\nabla w\|^2+\|\nabla E\|^2\le C(\|Aw\|^2+\|w\|^2+\|\triangle E\|^2+\|E\|^2), \qquad (3.54)
$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)+C_0(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)\\&\le C[(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)^3+(||\nabla v||^4+||\nabla\theta_1||^4+||f||^4)\\&\cdot(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)+||w||^2+||E||^2+||\theta_1||^2||f-f_1||^2_{L^\infty}].\end{aligned}\tag{3.55}$$

记 $h(t):=||\nabla w(t)||^2+||\nabla E(t)||^2$, $M:=\mathrm{e}^{C\int_0^\infty||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4+||f(\tau)||_{L^\infty}d\tau}$. 由 (2.4), (3.55) 式, 得到

$$\begin{aligned}h'(t)+\tilde{C}_0h(t)\le C[&h^3(t)+(||\nabla v(t)||^4+||\nabla\theta_1(t)||^4+||f(t)||^4)h(t)\\&+||\theta_1(t)||^2||f(t)-f_1(t)||^2_{L^\infty}+(\delta M)^2].\end{aligned}\tag{3.56}$$

选取 δ 充分的小, 与定理 1 (i) 的证明类似, 可得定理 1 (ii) 的证明. 定理 1 证毕.

定理 2 的证明 我们先假设 $\int_0^\infty||\nabla v(t)||^4+||\nabla\theta_1(t)||^4dt<\infty$ 成立. 类似于定理 1 的证明, 得到 (3.32) 式. 对 (3.32) 式两边从 0 到 t 积分, 得

$$\begin{aligned}&(||\nabla v(t)||^2+||\nabla\theta_1(t)||^2)-(||\nabla v_0||^2+||\nabla\theta_{10}||^2)+\tilde{C}_0\int_0^t||Av(\tau)||^2+||\triangle\theta_1(\tau)||^2d\tau\\&\le C\int_0^t(||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4+||f_1(\tau)||^4)(||\nabla v(\tau)||^2+||\nabla\theta_1(\tau)||^2)d\tau\\&\le\sup_{t\ge0}(||\nabla v(t)||^2+||\nabla\theta_1(t)||^2)\int_0^\infty||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4+||f_1(\tau)||^4d\tau.\end{aligned}\tag{3.57}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty||Av(\tau)||^2+||\triangle\theta_1(\tau)||^2d\tau\\&\le\sup_{t\ge0}(||\nabla v(t)||^2+||\nabla\theta_1(t)||^2)\int_0^\infty||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4+||f_1(\tau)||^4d\tau<\infty.\end{aligned}\tag{3.58}$$

注意到 (v,θ_1) 满足方程 (1.2), 由通常的能量估计, 得

$$\frac{d}{dt}(||v(t)||^2+||\theta_1(t)||^2)+2(||\nabla v(t)||^2+||\nabla\theta_1(t)||^2)\le2C_\varepsilon||\theta_1||^2||f_1||^2_{L^\infty}+2\varepsilon||\nabla v||^2.$$

取 $\varepsilon=1/4$, 利用 Gronwall 不等式, 得

$$\begin{aligned}&||v(t)||^2+||\theta_1(t)||^2+C\int_0^t||\nabla v(\tau)||^2+||\nabla\theta_1(\tau)||^2d\tau\\&\le\int_0^t||f_1(\tau)||^2_{L^\infty}(||v(\tau)||^2+||\theta_1(\tau)||^2)d\tau+||v_0||^2+||\theta_{10}||^2\\&\le\sup_{t\ge0}(||v(t)||^2+||\theta_1(t)||^2)\int_0^\infty||f_1(\tau)||^2_{L^\infty}d\tau+||v_0||^2+||\theta_{10}||^2\\&\le\left[\mathrm{e}^{\int_0^\infty||f_1(\tau)||^2_{L^\infty}d\tau}\int_0^\infty||f_1(\tau)||^2_{L^\infty}d\tau+1\right](||v_0||^2+||\theta_{10}||^2).\end{aligned}\tag{3.59}$$

当 $p\ge6$, $\frac{2}{q}+\frac{3}{p}=1$ 时, 由 Gagliardo–Nirenberg 不等式, (3.11) 及 Hölder 不等式, 有

$$||v(\tau)||_{L^p}\le C||\partial^2_{ij}v(\tau)||^{\frac12-\frac3p}||v(\tau)||^{\frac12+\frac3p}_{L^6}\le C||\nabla v(\tau)||^{\frac12+\frac3p}||Av(\tau)||^{\frac12-\frac3p},$$

以及

$$\int_0^\infty ||v(\tau)||_{L^p}^q d\tau \le C\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^{q(\frac{1}{2}+\frac{3}{p})}||Av(\tau)||^{q(\frac{1}{2}-\frac{3}{p})}d\tau$$
$$\le C\Big(\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^{\alpha q(\frac{1}{2}+\frac{3}{p})}d\tau\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big(\int_0^\infty ||Av(\tau)||^2 d\tau\Big)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad (3.60)$$

这里 $\alpha=\frac{4}{q}$, 且 $2\le\alpha q(\frac{1}{2}+\frac{3}{p})\le 4$. 由 (3.59) 式及定理条件知

$$\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^2 d\tau<\infty, \quad \int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^4 d\tau<\infty.$$

从而由内插不等式可得

$$\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^{\alpha q(\frac{1}{2}+\frac{3}{p})}d\tau<\infty,$$

再利用估计 (3.58), 得

$$\int_0^\infty ||v(\tau)||_{L^p}^q d\tau<\infty. \qquad (3.61)$$

当 $p<6$, $\frac{2}{q}+\frac{3}{p}=1$ 时, 利用 (3.57), (3.59) 式易证

$$\int_0^\infty ||v(\tau)||_{L^p}^q d\tau \le C\int_0^\infty ||v(\tau)||^{\frac{q}{2}-2}||\nabla v(\tau)||^{\frac{q}{2}+2}d\tau$$
$$\le C\Big(\sup_{t\ge0}||v(t)||\Big)^{\frac{q}{2}-2}\Big(\sup_{t\ge0}||\nabla v(t)||\Big)^{\frac{q}{2}-2}\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^4 d\tau<\infty. \qquad (3.62)$$

反过来, 如果 $v\in L^q([0,\infty),L^p(\Omega))$, $\frac{2}{q}+\frac{3}{p}=1$. 我们将证

$$\int_0^\infty ||\nabla v(\tau)||^4+||\nabla\theta_1(\tau)||^4 d\tau<\infty. \qquad (3.63)$$

首先, 在方程

$$v_t-\triangle v+(v\cdot\bigtriangledown)v+\bigtriangledown p=\theta_1 f_1 \qquad (3.64)$$

两边关于 x_i 求导, 然后作用 Helmholtz 投影算子 P 于其上, 再在两边同乘以 $\partial_i v$, 并在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\partial_i v||^2+||\nabla\partial_i v||^2=-\int_\Omega(\partial_i v\cdot\nabla)v\cdot\partial_i v+\int_\Omega P(\partial_i(\theta_1 f_1))\cdot\partial_i v. \qquad (3.65)$$

类似地, 由如下方程

$$\theta_{1t}-\triangle\theta_1+(v\cdot\bigtriangledown)\theta_1=0,$$

有估计

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\partial_i\theta_1||^2+||\nabla\partial_i\theta_1||^2=-\int_\Omega(\partial_i v\cdot\nabla)\theta_1\cdot\partial_i\theta_1. \qquad (3.66)$$

将 (3.65) 与 (3.66) 式相加, 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||\partial_i v||^2+||\partial_i\theta_1||^2)+||\nabla\partial_i v||^2+||\nabla\partial_i\theta_1||^2$$
$$=\underbrace{-\int_\Omega(\partial_i v\cdot\nabla)v\cdot\partial_i v}_{\mathrm{L_1}}\underbrace{-\int_\Omega(\partial_i v\cdot\nabla)\theta_1\cdot\partial_i\theta_1}_{\mathrm{L_2}}+\underbrace{\int_\Omega P(\partial_i(\theta_1 f_1))\cdot\partial_i v}_{\mathrm{L_3}}. \qquad (3.67)$$

通过分步积分和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}|\mathrm{L}_1| &= \left|-\int_\Omega(\partial_i v\cdot\nabla)v\cdot\partial_i v\right| \le \left|\int_\Omega(v\cdot\nabla)\partial_i v\cdot\partial_i v\right| + \left|\int_\Omega(v\cdot\nabla)v\cdot\partial_i\partial_i v\right| \\ &\le C\|v\|_{L^p}\|\nabla v\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}}\|D^2v\|.\end{aligned}\tag{3.68}$$

再通过 Gargliardö–Nirenberg 不等式 $\|\nabla v\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \le C\|D^2v\|^{\frac{3}{p}}\|\nabla v\|^{1-\frac{3}{p}}$ 和 Young 不等式, 得

$$|\mathrm{L}_1| \le \varepsilon\|D^2v\|^2 + C_\varepsilon\|v\|_{L^p}^q\|\nabla v\|^2.\tag{3.69}$$

相类似地, 有

$$|\mathrm{L}_2| = \left|-\int_\Omega(\partial_i v\cdot\nabla)\theta_1\cdot\partial_i\theta_1\right| \le \varepsilon\|D^2\theta_1\|^2 + C_\varepsilon\|v\|_{L^p}^q\|\nabla\theta_1\|^2,\tag{3.70}$$

及

$$\begin{aligned}|\mathrm{L}_3| &= \left|\int_\Omega P(\partial_i(\theta_1 f_1))\cdot\partial_i v\right| = \left|\int_\Omega(\partial_i(\theta_1 f_1))\cdot\partial_i v\right| = \left|\int_\Omega(\theta_1 f_1)\cdot\partial_i\partial_i v\right| \\ &\le C\|\theta_1\|\,\|f_1\|_{L^\infty}\|D^2v\| \le C_\varepsilon\|\nabla\theta_1\|^2\|f_1\|_{L^\infty}^2 + \varepsilon\|D^2v\|^2.\end{aligned}$$

选取 ε 适当小, 将以上估计代入 (3.67) 式中并关于 i 从 1 到 3 作和, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\nabla v(t)\|^2 + \|\nabla\theta_1(t)\|^2) + C_0(\|D^2v\|^2 + \|D^2\theta_1\|^2) \\ &\le C(\|v\|_{L^p}^q + \|f_1\|_{L^\infty}^2)(\|\nabla v\|^2 + \|\nabla\theta_1\|^2),\end{aligned}\tag{3.71}$$

利用 Gronwall 不等式, 有

$$\|\nabla v(t)\|^2 + \|\nabla\theta_1(t)\|^2 \le C(\|\nabla v_0\|^2 + \|\nabla\theta_{10}\|^2)\mathrm{e}^{\int_0^t \|v(\tau)\|_{L^p}^q + \|f_1(\tau)\|_{L^\infty}^2 d\tau}.\tag{3.72}$$

由此得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \|\nabla v(\tau)\|^4 + \|\nabla\theta_1(\tau)\|^4 d\tau \\ &\le \sup_{t\ge0}\|\nabla v(t)\|^2\int_0^\infty \|\nabla v(\tau)\|^2 d\tau + \sup_{t\ge0}\|\nabla\theta_1(t)\|^2\int_0^\infty \|\nabla\theta_1(\tau)\|^2 d\tau < \infty.\end{aligned}\tag{3.73}$$

定理 2 证毕.

定理 3 的证明　设 $v=(v_1,v_2)$, θ_1 为二维 Boussinesq 方程组在初值为

$$v_0=(v_{01},v_{02})\in V(R^2)\cap L^1(R^2),\quad \theta_{10}\in H_0^1(R^2)\cap L^1(R^2)$$

和外力为 $\tilde f_1(x_1,x_2,x_3)(t)=(f_{11}(x_1,x_2)(t),\ f_{12}(x_1,x_2)(t),0)\in L^2(R^2)$ 条件下的强解, 那么有

$$\begin{aligned}&v\in L^\infty([0,\infty);V)\cap L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);D(A)),\\ &\theta_1\in L^\infty([0,\infty);H_0^1(R^2))\cap L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);H^2(R^2)).\end{aligned}$$

通过 Boussinesq 方程组的光滑性质可知, 对所有 $t>0$, 都有 $\triangle v(t)\in L^2(R^2)$, $\triangle\theta_1(t)\in L^2(R^2)$. 我们还知道 $\int_0^\infty\|\triangle v(\tau)\|^2d\tau<\infty$, $\int_0^\infty\|\triangle\theta_1(\tau)\|^2d\tau<\infty$. 并利用这些估计和解的衰减性质 [10], 得到

$$\|\partial_x^j v(t)\|_{L^p(R^2)} \le C(1+t)^{-d},\quad \|\partial_x^j\theta_1(t)\|_{L^p(R^2)} \le C(1+t)^{-d},$$

其中

$$d=\min\left\{1,\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}+\frac{j}{2}\right\},\quad p\in[2,\infty],\quad \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1,\quad j=0,1,$$

于是有

$$\int_0^\infty ||\nabla v(s)||_{L^4(R^2)}^4 ds < \infty, \quad \int_0^\infty ||\nabla \theta_1(s)||_{L^4(R^2)}^4 ds < \infty \tag{3.74}$$

和

$$\int_0^\infty ||v(s)||_{L^\infty(R^2)}^2 ds < \infty, \quad \int_0^\infty ||\theta_1(s)||_{L^\infty(R^2)}^2 ds < \infty. \tag{3.75}$$

下面将建立形如 $u = \tilde{v} + w$, $\theta = \tilde{\theta}_1 + E$ 的全局强解, 这里 $\tilde{v} = (v_1, v_2, 0)$, $\tilde{\theta}_1 = \theta_1$, 并且 w 在 $V(R^3)$ 中很小, E 在 $H_0^1(R^3)$ 中很小. 那么 w 和 E 满足以下方程

$$w_t + Aw + P[(w\cdot\nabla)w + (w\cdot\nabla)\tilde{v} + (\tilde{v}\cdot\nabla)w] = P(Ef + \tilde{\theta}_1(f - \tilde{f}_1)), \tag{3.76}$$

$$E_t - \triangle E + (w\cdot\nabla)E + (w\cdot\nabla)\tilde{\theta}_1 + (\tilde{v}\cdot\nabla)E = 0. \tag{3.77}$$

注意到在方程 (3.76) 中 $w(t) \in V(R^3)$, $(w\cdot\nabla)w, (w\cdot\nabla)\tilde{v}$, $(\tilde{v}\cdot\nabla)w$ 及 $Ef + \tilde{\theta}_1(f - \tilde{f}_1)$ 当 $t > 0$ 时都属于 $L^2(R^3)$. 因此将 Helmholtz 投影算子作用在它们上有意义. 应用 Hölder不等式得

$$||(\tilde{v}\cdot\nabla)w|| \le ||v||_{L^\infty(R^2)}||\nabla w||, \quad ||(\tilde{v}\cdot\nabla)E|| \le ||v||_{L^\infty(R^2)}||\nabla E||.$$

对于项 $(w\cdot\nabla)\tilde{v}$ 和项 $(w\cdot\nabla)\tilde{\theta}_1$ 的估计过程中, 我们将把 x_1, x_2 和 x_3 分开考虑, 得

$$||(w\cdot\nabla)\tilde{v}||_{L^2(R^2)}^2 \le ||w(\cdot, x_3)||_{L^4(R^2)}^2 ||\nabla v||_{L^4(R^2)}^2,$$

$$||(w\cdot\nabla)\tilde{\theta}_1||_{L^2(R^2)}^2 \le ||w(\cdot, x_3)||_{L^4(R^2)}^2 ||\nabla \theta_1||_{L^4(R^2)}^2.$$

由二维的 Gagliardo–Nirenberg 不等式, 得到

$$||w(\cdot, x_3)||_{L^4(R^2)}^2 \le ||\nabla_{x_1,x_2} w(\cdot, x_3)|| ||w(\cdot, x_3)||_{L^2(R^2)},$$

此时关于 x_3 积分并利用 Cauchy–Schwarz 不等式可得

$$||(w\cdot\nabla)\tilde{v}|| \le ||\nabla w||^{\frac{1}{2}} ||w||^{\frac{1}{2}} ||\nabla v||_{L^4(R^2)}, \quad ||(w\cdot\nabla)\tilde{\theta}_1|| \le ||\nabla w||^{1/2}||w||^{1/2}||\nabla\theta_1||_{L^4(R^2)}.$$

由于 w 满足的方程 (3.76) 在 $V(R^3)$ 中是局部可解的, E 满足的方程 (3.77) 在 $H_0^1(R^3)$ 中是局部可解的, 我们只需得到 $||w(t)||_{H^1(R^3)}$ 和 $||E(t)||_{H^1(R^3)}$ 的先验估计即可证明定理.

在 (3.76) 方程式两边乘以 w, 在 (3.77) 方程式两边乘以 E, 然后在 R^3 上积分, 把它们所得的结果相加, 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||w||^2 + ||E||^2) + ||\nabla w||^2 + ||\nabla E||^2 + \int_{R^3} P((w\cdot\nabla)\tilde{v})\cdot w + \int_{R^3}(w\cdot\nabla)\tilde{\theta}_1\cdot E \\ = P(Ef + \tilde{\theta}_1(f - \tilde{f}_1))\cdot w,\end{aligned} \tag{3.78}$$

注意到

$$\begin{aligned}\left|\int_{R^3} P((w\cdot\nabla)\tilde{v})\cdot w dx\right| &= \left|\int_{R^3} P((w\cdot\nabla)w)\cdot\tilde{v} dx\right| \\ &\le ||v||_{L^\infty(R^2)}||w|| \, ||\nabla w|| \le C||v||_{L^\infty(R^2)}^2||w||^2 + \varepsilon||\nabla w||^2,\end{aligned}$$

以及

$$\left|\int_{R^3}(w\cdot\nabla)\tilde{\theta}_1\cdot E dx\right| \le C||\theta_1||_{L^\infty}^2||w||^2 + \varepsilon||\nabla E||^2,$$

$$\begin{aligned}|P(Ef + \tilde{\theta}_1(f - \tilde{f}_1))\cdot w| &\le \left|\int_\Omega (Ef)\cdot w\right| + \left|\int_\Omega \tilde{\theta}_1(f - \tilde{f}_1)\cdot w\right| \\ &\le C||f||_{L^\infty}(||w||^2 + ||E||^2) + C||\tilde{\theta}_1||_{L^\infty(R^2)}||f - \tilde{f}_1|| \, ||w|| \\ &\le C||f||_{L^\infty}(||w||^2 + ||E||^2) + C||\theta_1||_{L^\infty(R^2)}^2||w||^2 + C||f - \tilde{f}_1||^2 \\ &\le C(||f||_{L^\infty} + ||\theta_1||_{L^\infty(R^2)}^2)(||w||^2 + ||E||^2) + C||f - \tilde{f}_1||^2,\end{aligned}$$

选择 ε 充分小 (例如不妨取 $\varepsilon=0.01$), 我们得到以下估计

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(||w||^2+||E||^2)+C_0(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)\\&\le C(||v||^2_{L^\infty(R^2)}+||\theta_1||^2_{L^\infty(R^2)}+||f||_{L^\infty(R^3)})(||w||^2+||E||^2)+C||f-\tilde f_1||^2,\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}||w(t)||^2+||E(t)||^2\le&\left(||w(0)||^2+||E(0)||^2+\int_0^\infty||f(s)-\tilde f_1(s)||^2ds\right)\\&\times e^{C\int_0^\infty||v(s)||^2_{L^\infty(R^2)}+||\theta_1(s)||^2_{L^\infty(R^2)}+||f(s)||_{L^\infty(R^3)}ds}.\end{aligned}\tag{3.79}$$

另一方面, (3.76) 式两边同乘以 $Aw(t)$, 在 (3.77) 式乘以 $-\triangle E(t)$, 然后在 R^3 上积分, 把所得结果相加有

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)+||Aw||^2+||\triangle E||^2+\int_{R^3}P((w\cdot\nabla)w)\cdot Aw\\&\quad+\int_{R^3}P((w\cdot\nabla)\tilde v)\cdot Aw+\int_{R^3}P((\tilde v\cdot\nabla)w)\cdot Aw-\int_\Omega(w\cdot\nabla)E\cdot\triangle E\\&\quad-\int_{R^3}(w\cdot\nabla)\tilde\theta_1\cdot\triangle E-\int_{R^3}(\tilde v\cdot\nabla)E\cdot\triangle E=\int_\Omega P(\tilde\theta_1(f-\tilde f_1))\cdot Aw.\end{aligned}\tag{3.80}$$

我们有如下估计

$$\left|\int_{R^3}P((w\cdot\nabla)w)\cdot Aw\right|\le C||\nabla w||^6+\varepsilon||Aw||^2,\tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{R^3}P((w\cdot\nabla)\tilde v)\cdot Aw\right|\le||\nabla w||^{\frac12}||w||^{\frac12}||\nabla v||_{L^4(R^2)}||Aw||\\&\le C||w||^2+C||\nabla v||^4_{L^4(R^2)}||\nabla w||^2+\varepsilon||Aw||^2,\end{aligned}\tag{3.82}$$

$$\left|\int_{R^3}P((\tilde v\cdot\nabla)w)\cdot Aw\right|\le C||v||^2_{L^\infty(R^2)}||\nabla w||^2+\varepsilon||Aw||^2,\tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega(w\cdot\nabla)E\cdot\triangle E\right|\le c||w||_{L^\infty}||\nabla E||\,||\triangle E||\\&\le C||\nabla w||^{\frac12}||Aw||^{\frac12}||\nabla E||\,||\triangle E||\le C_\varepsilon||\nabla E||^2||\nabla w||\,||Aw||+\varepsilon||\triangle E||^2\\&\le C_\varepsilon||\nabla E||^4||\nabla w||^2+\frac14||Aw||^2+\varepsilon||\triangle E||^2,\end{aligned}\tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{R^3}(w\cdot\nabla)\tilde\theta_1\cdot\triangle E\right|\le||\nabla w||^{\frac12}||w||^{\frac12}||\nabla\theta_1||_{L^4(R^2)}||\triangle E||\\&\le C||w||^2+C||\nabla\theta_1||^4_{L^4(R^2)}||\nabla w||^2+\varepsilon||\triangle E||^2,\end{aligned}\tag{3.85}$$

$$\left|\int_{R^3}(\tilde v\cdot\nabla)E\cdot\triangle E\right|\le||v||^2_{L^\infty(R^2)}||\nabla E||^2+\varepsilon||\triangle E||^2,\tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega P(Ef+\tilde\theta_1(f-\tilde f_1))\cdot Aw\right|\le\left|\int_\Omega P(Ef)\cdot Aw\right|+\left|\int_\Omega P(\tilde\theta_1(f-\tilde f_1))\cdot Aw\right|\\&\le C||\nabla E||^{\frac12}||\triangle E||^{\frac12}||f||\,||Aw||+C_\varepsilon||\theta_1||^2_{L^\infty(R^2)}||f-\tilde f_1||^2+\varepsilon||Aw||^2\\&\le C_\varepsilon||\nabla E||\,||f||^2||\triangle E||+\varepsilon||Aw||^2+C_\varepsilon||\theta_1||^2_{L^\infty(R^2)}||f-\tilde f_1||^2+\varepsilon||Aw||^2\\&\le C_\varepsilon||f||^4||\nabla E||^2+\frac14||\triangle E||^2+C_\varepsilon||\theta_1||^2_{L^\infty(R^2)}||f-\tilde f_1||^2+2\varepsilon||Aw||^2.\end{aligned}\tag{3.87}$$

选择 ε 充分地小 (例如不妨取 $\varepsilon = 0.01$), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)+\tilde{C}_0(||Aw||^2+||\triangle E||^2)\\&\le C[(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)^3+(||v||^2_{L^\infty(R^2)}+||\nabla v||^4_{L^4(R^2)}\\&\quad+||\theta_1||^2_{L^\infty(R^2)}+||\nabla\theta_1||^4_{L^4(R^2)}+||f||^4)(||\nabla w||^2+||\nabla E||^2)+||w||^2+||E||^2].\end{aligned}\tag{3.88}$$

与定理 1(ii) 的证明过程相类似, 如果 $||w_0||_{H^1}+||E_0||_{H^1}$ 充分小, 可得

$$||\nabla w(t)||^2+||\nabla E(t)||^2$$

关于时间 t 一致有界, 从而定理 3 证毕.

参考文献

[1] Ponce G., Racke R., Sideris T. C., Titi E. S, Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier–Stokes Equations, *Commun. Math. Phys.*, 1994, **159**: 329–341.

[2] Zhao C., Li K., On global L^2 stability of Large solutions to the three-dimensional evolution system of MHD type Describing Geophysical Flow, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2001, **44**(6): 961–976.

[3] Ladyzhenskaya O. A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1969.

[4] Schonbek M. E., Lower bounds of rates of decay for solutions to Navier–Stokes equations, *I. Amer. Math. Soc.*, 1991, **4**(3): 423–449.

[5] Schonbek M. E., Asymptotic behavior of solutions to the three-dimensional Navier–Stokes equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 1992, **41**(3): 809–823.

[6] He C., Weighted energy inequalities for nonstationary Navier–Stokes equations, *J. Diff. Eqns.*, 1998, **148**: 422–444.

[7] He C., Xin Z., On the decay properties of solutions to the non-stationary Navier–Stokes equations in R^3, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2001, **131**: 597–619.

[8] Kajikiya R., Miyakawa T., On L^2 decay of weak solutions of the Navier–Stokes equations in R^n, *Math. Z.*, 1986, **192**: 135–148.

[9] Miyakawa T., Schonbek M. E., On optimal decay rates for solutions to the Navier–Stokes equations in R^n, Proceedings of Partial Equations and Applications, *Math. Bohem.*, 2001, **126**(2): 443–455.

[10] Schonbek M., Schonbek T. P., Suli E., The Long Time Behavior of Solutions to MHD Equations, *Math. Annalen*, 1996, **304**: 717–756.

[11] Liu Y., On the L^2 Decay of Weak Solutions to Boussinesq Equations, Master Paper, Beijing: Capital Normal University, 2005.

[12] He C., Xin Z., On the regularity of weak solutions to the Magnetohydrodynamic equations, *J. Diff. Equa.*, 2005, **213**: 235–254.

[13] He C., Xin Z., Partial regularity of suitable weak solutions to the incompressible Magnetohydrodynamic equations, *J. Funct. Anal.*, 2005, **227**: 113–152.

[14] Jiu Q., He C., Remarks on the regularity to3-D ideal Magnetohydynamic equations, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2004, **20**(4): 695–708.

[15] Heywood J. G., The Navier–Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions, *Indiana Univ. Math. J.*, 1980, **29**: 639–681.

[16] Stein E. M., Singular Integrals and Differentiality Properties of Functions, Princeton: Princeton University Press, 1970.

[17] Adams R. A., Sobolev Spaces, New York: Academic Press, 1978.

[18] Friedman A., Partial differential Equations, New York: Holt, Rinehart & Winston, 1969.

[19] Kato T., Strong L^p-solutions of the Navier–Stokes equation in R^m, with applications to weak solutions, *Math. Z.*, 1984, **187**: 471–480.

[20] Chen Y., Wu L., Second Order Elliptic Equation and Equations, Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese).

[21] Li D., Chen Y., Nonlinear Evolutionary Equations, Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese).