

对流扩散方程的绝对稳定高阶中心差分格式¹⁾

高 智²⁾

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要 将作者提出的数值摄动算法改进为区分离散单元内上游和下游并分别对通量进行高精度重构的双重数值摄动算法, 与原(单重)摄动算法相比, 双重摄动算法既提高了格式精度又明显扩大了格式的稳定性范围. 利用双重摄动算法, 即分别利用上游和下游基点变量的摄动重构将高阶流体力学关系及迎风机制耦合进二阶中心格式之中, 由此构建了对流扩散方程的对网格 Reynolds 数的任意值均稳定(绝对稳定)高精度(四阶和八阶精度)三基点中心 TVD 差分格式, 通过解析分析以及 3 个算例计算证实了构建格式的优良性能; 3 个算例包括一维线性、非线性(Burgers 方程)和二维变系数对流扩散方程. 数值计算表明: 构建的格式在粗网格下不振荡, 构建格式在粗网格时的最大误差 L_∞ 和均方误差 L_2 与二阶中心格式在细网格时的相应误差一致, 对线性方程, 构建格式在细网格下可达到 L_2 精度阶.

关键词 计算流体力学, 数值摄动算法, 有限差分方法, 对流扩散方程

中图分类号: O35 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2010)05-0811-07

引 言

流体运动 Navier-Stokes 方程组是对流扩散型方程, 计算对流扩散型方程的差分格式有很多, 其中扩散项离散为二阶中心格式, 对流项离散的差分格式有很多. 一阶迎风格式普适性好, 但扩散误差大; 二阶中心格式在精度、简单性、程序维护、鲁棒性和效率综合考虑下, 对工程计算最为可取^[1], 但格式稳定的临界网格 Reynolds 数 (R_{cri}) 只有 2, 容易产生振荡解. 为此人们提出了许多紧致和多基点高精度格式, 例如三阶迎风差分格式、QUICK 格式等^[1-4]; 众所周知, 高阶(精度高于二阶)迎风和中心格式稳定的 R_{cri} 约为 2 的大小, 故均为振荡格式, 它们都难以捕捉间断解. 为此, 近三十多年来构建不振荡格式成为 CFD 格式研究的热点和焦点^[5-11], 人们利用通量限制器、通量修正、通量分裂-耗散修正、人工黏性等迎风和人工光滑技术构建了众多不振荡和本质不振荡格式, 例如 TVD 格式、通量差分分裂(FDS)、通量矢量分裂(FVS)、FDS 和 FVS 杂交的对流迎风分裂方法(AUSM)、本质不振荡(ENO)、加权本质不振荡(WENO)、无波动、无自由参数耗散差分(NND)、统一 ENO(UENO) 格式、人工黏性二阶中

心体积格式等, 在气动计算中得到广泛的应用. 此外, 陈国谦等^[12-14]将迎风数学变换引入对流扩散方程中, 并通过将对流导数系数作为函数取 Taylor 展开到 Δx^2 项, 由此构建了四阶精度摄动显式紧致差分格式, 摄动显式紧致格式不存在常见的隐式紧致格式处理边界条件出现的实质性困难; 隐式紧致格式将待求函数以及待求函数的各阶导数均取作未知量, 因此待求解的方程有改变且需要“设置”比物理边界条件更多的边界条件, 难以弄清多出边界条件的物理意义以及隐式紧致格式到底代表什么物理问题. 摄动显式紧致格式用于计算对流传热问题获得与标准解一致的结果; 但从理论上说, 该法求解的对流项不是 $A \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 而是 $\left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Delta x^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, 故在 Δx 有限的条件下, 实际上改变了对流项的数学物理特性. 作者提出的数值摄动算法^[15]则与此不同, 该法通过对流差商系数和通量的数值摄动重构为步长的幂级数, 由此构建了对流扩散方程和 Navier-Stokes 方程组的高精度数值摄动有限差分有限体积格式, 用于求解顶盖驱动和浮力驱动方腔流动, 获得与标准解一致的数值结果^[16-19]. 已有的迎风摄动差分格式为绝对稳定的高阶不振荡格式,

2009-04-23 收到第 1 稿, 2009-12-17 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目(10872204).

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn

已有的单重数值摄动中心格式与二阶中心格式相比, 精度提高许多但格式稳定的临界网格 Reynolds 数增大不多. 为此, 本文将原先对通量的单重摄动重构, 改进为区分上游和下游基点并对通量的摄动重构分别使用上游基点变量和下游基点变量, 从而将迎风机制引入重构格式之中, 双重摄动重构既提高了摄动格式精度又能够大大扩充格式的稳定性范围.

1 对单重数值摄动重构中心格式的分析

考虑对流扩散方程及其半离散二阶中心差分格式

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + f \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} - \frac{\gamma}{\Delta x^2} [(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) - \frac{u_i \Delta x}{2\gamma} (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) + \frac{f_i \Delta x^2}{\gamma}] = 0 \quad (2)$$

早先的单重摄动重构^[8]利用离散单元内所有基点的变量 $\varphi_{i\pm 1}$ 和 φ_i , 将对流差商系数和源项 f_i 摄动重构为 $u_i G_{ci}$ 和 $f_i G_{si}$

$$G_{ci} = 1 + \sum_{n=1} a_n \Delta x^n, \quad G_{si} = 1 + \sum_{n=1} b_n \Delta x^n \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), $\varphi_{i\pm 1}$ 对 i 基点取 Taylor 展开, 利用冻结对流系数和源项条件下, 由方程(1)空间部分导出的高阶流体力学关系式

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^{n-2} f_i \quad (4)$$

通过消除重构格式修正微分方程截断误差诸项, 即令摄动重构格式修正微分方程中 Δx^n 的系数为零, 求得 a_n, b_n, G_{ci} 和 G_{si}

$$\left. \begin{aligned} a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ a_2 = b_2 = -\frac{2}{4!} \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^2, \quad a_4 = b_4 = \frac{1}{5!} \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^4 \\ a_6 = b_6 = -\frac{4}{7!} \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^5 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{ci} = G_{si} = 1 - \frac{1}{12} R_{\Delta x_i}^2 + \frac{1}{60} R_{\Delta x_i}^4 - \frac{1}{1260} R_{\Delta x_i}^6 \\ R_{\Delta x_i} = \frac{u_i \Delta x}{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由 a_n 的值可知, 截止到 a_{2n} ($n = 1, 2, \dots$), 摄动格式的精度为 $(2N + 1)$ 和 $(2N + 2)$ 阶, 但摄动格式稳定的临界网格 Reynolds 数 R_{cri} 约与二阶中心格式的 2 相当, 如四阶和六阶摄动格式的 R_{cri} 分别

约为 4.2 和 2.6. 对上述情况的解释是: 不失一般性, 考虑 $u_i > 0$ 即 $R_{\Delta x_i} > 0$ 的情况, 对流项差分近似的下游对流反扩散项 $\left(-\frac{1}{2} R_{\Delta x_i} \varphi_{i+1}\right)$ 随摄动重构向上游扩散, 导致上游“生成”对流反扩散项 $\left(-\frac{1}{24} R_{\Delta x_i}^3 \varphi_{i-1}\right)$, 该项随重构向下游扩散, 导致下游“生成”新的对流反扩散项 $\left(-\frac{1}{120} R_{\Delta x_i}^5 \varphi_{i+1}\right)$, 后者随重构向上游扩散, 又导致上游“生成”新的对流反扩散项 $\left(-\frac{1}{2520} R_{\Delta x_i}^7 \varphi_{i-1}\right)$, 对流反扩散这一不稳定信息在上下游之间反复传播, 致使 R_{cri} 难以随精度提高而扩大. 设想若能在摄动重构中切断上下游之间的信息传播, 按理应能提高精度同时扩大 R_{cri} . 为此需要分别利用上游变量 $(\varphi_{i-1}, \varphi_i)$ (对 $u_i > 0$) 和下游变量 $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ 进行摄动重构, 这就是双重摄动重构. 双重摄动重构显然把高阶流体力学关系式(4)和迎风机制耦合进了二阶中心差分格式之中, 从而保证了双重摄动重构格式精度高且稳定性范围大.

2 双重摄动重构中心差分格式

半离散二阶中心格式(2)空间部分的双重摄动重构格式建议为

$$\frac{\gamma}{\Delta x^2} \left\{ \left[\left(1 - \frac{u_i G_i^+}{2\gamma} \Delta x\right) (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \frac{1}{2\gamma} f_i G_{si}^+ \Delta x^2 \right] + \left[\left(1 + \frac{u_i G_i^-}{2\gamma} \Delta x\right) (\varphi_{i-1} - \varphi_i) + \frac{1}{2\gamma} f_i G_{si}^- \Delta x^2 \right] \right\} = 0 \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G_i^+ = 1 + \sum_{n=1} a_n^+ \Delta x^n, \quad G_{si}^+ = 1 + \sum_{n=1} b_n^+ \Delta x^n \\ G_i^- = 1 + \sum_{n=1} a_n^- \Delta x^n, \quad G_{si}^- = 1 + \sum_{n=1} b_n^- \Delta x^n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7), $\varphi_{i\pm 1}$ 对 i -基点取 Taylor 展开, 利用高阶流体力学关系式(4), 通过消除重构格式(7)修正微分方程截断误差诸项, 即令 Δx^n 的上游系数(涉及 φ_{i-1} 和 φ_i)和下游系数(涉及 φ_{i+1} 和 φ_i)分别等于零, 求得

$$a_{2n}^+ = a_{2n}^- = b_{2n}^+ = b_{2n}^- = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9a)$$

$$a_1^+ = b_1^+ = -\frac{1}{3!} \frac{u_i}{\gamma}, \quad a_1^- = b_1^- = -a_1^+ \quad (9b)$$

$$a_3^+ = b_3^+ = \frac{1}{3 \times 5!} \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^3, \quad a_3^- = b_3^- = -a_3^+ \quad (9c)$$

$$a_5^+ = b_5^+ = -\frac{1}{3 \times 7!} \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^5, \quad a_5^- = b_5^- = -a_5^+ \quad (9d)$$

$$a_7^+ = b_7^+ = \frac{3}{5 \times 9!} \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^7, \quad a_7^- = b_7^- = -a_7^+ \quad (9e)$$

$$a_9^+ = b_9^+ = -\frac{5}{3 \times 11!} \left(\frac{u_i}{\gamma}\right)^9, \quad a_9^- = b_9^- = -a_9^+ \quad (9f)$$

$$G_i^+ = G_{si}^+ = 1 - \frac{1}{6}R_{\Delta x_i} + \frac{1}{360}R_{\Delta x_i}^3 - \frac{1}{3 \times 7!}R_{\Delta x_i}^5 + \frac{3}{5 \times 9!}R_{\Delta x_i}^7 - \frac{5}{3 \times 11!}R_{\Delta x_i}^9 \quad (10a)$$

$$G_i^- = G_{si}^- = 1 + \frac{1}{6}R_{\Delta x_i} - \frac{1}{360}R_{\Delta x_i}^3 + \frac{1}{3 \times 7!}R_{\Delta x_i}^5 - \frac{3}{5 \times 9!}R_{\Delta x_i}^7 + \frac{5}{3 \times 11!}R_{\Delta x_i}^9 \quad (10b)$$

将式 (10) 代入式 (7) 获得对流扩散方程的高精度双重摄动中心差分格式 (缩写为 DPCS), DPCS 可以统一写成

$$\frac{\gamma}{\Delta x^2}[C_{i+1}(N)\varphi_{i+1} - C_i(N)\varphi_i + C_{i-1}(N)\varphi_{i-1}] + f_i = 0 \quad (11)$$

并有

$$C_{i+1}(N) + C_{i-1}(N) = C_i(N) \quad (12)$$

$$C_{i\pm 1}(4) = C_{i\pm 1}(3) = 1 \mp \frac{1}{2}R_{\Delta x} + \frac{1}{12}R_{\Delta x}^2 \quad (13a)$$

$$C_{i\pm 1}(6) = C_{i\pm 1}(5) = C_{i\pm 1}(4) - \frac{1}{6!}R_{\Delta x}^4 \quad (13b)$$

$$C_{i\pm 1}(8) = C_{i\pm 1}(7) = C_{i\pm 1}(6) + \frac{1}{6 \times 7!}R_{\Delta x}^6 \quad (13c)$$

$$C_{i\pm 1}(10) = C_{i\pm 1}(9) = C_{i\pm 1}(8) - \frac{3}{10!}R_{\Delta x}^8 \quad (13d)$$

$$C_{i\pm 1}(12) = C_{i\pm 1}(11) = C_{i\pm 1}(10) + \frac{5}{6 \times 11!}R_{\Delta x}^{10} \quad (13e)$$

其中, N 表示 DPCS 的精度阶, $R_{\Delta x} = \frac{u_i}{\gamma}\Delta x$ 为网格 Reynolds 数.

3 双重摄动中心差分格式 (DPCS) 性能分析

对三阶和四阶、七阶和八阶、十一阶和十二阶精度 DPCS, 且对网格 Reynolds 数 $R_{\Delta x_i}$ 的任意值 C_{i+1} 和 C_{i-1} 满足

$$C_{i+1}(N) > 0, \quad C_{i-1}(N) > 0, \quad N = 4, 8, 12 \quad (14)$$

用配平方法推出

$$C_{i\pm 1}(4) = C_{i\pm 1}(3) = \left(1 \mp \frac{1}{4}R_{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{48}R_{\Delta x}^2 \quad (15a)$$

$$C_{i\pm 1}(8) = C_{i\pm 1}(7) = \left(1 \mp \frac{1}{4}R_{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{48}R_{\Delta x}^2 \left(1 - \frac{1}{30}R_{\Delta x}^2\right)^2 + \frac{1}{20 \times 7!}R_{\Delta x}^6 \quad (15b)$$

$$C_{i\pm 1}(12) = C_{i\pm 1}(11) = \left(1 \mp \frac{1}{4}R_{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{48}R_{\Delta x}^2 \left(1 - \frac{1}{30}R_{\Delta x}^2\right)^2 + \frac{1}{20 \times 7!} \left(1 - \frac{1}{24}R_{\Delta x}^2\right)^2 + \frac{37}{4 \times 21!}R_{\Delta x}^{10} \quad (15c)$$

因此式 (14) 正确, 故有

$$\left. \begin{aligned} |C_i(N)| &\geq |C_{i+1}(N)| + |C_{i-1}(N)| \\ N &= 4, 8, 12, R_{\Delta x} \text{ 为任意值} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

可见, 由上述 6 个 DPCS, 即由离散方程 (11) 组建的线性代数方程组的系数矩阵, 对网格 Reynolds 数 $R_{\Delta x}$ 的任意值均为对角占优, 这 6 个 DPCS 绝对稳定, 它们稳定的临界网格 Reynolds 数 R_{cri} 为无穷大. 此外, 离散方程 (11) 无源项 $f_i = 0$ 时的通解为

$$\varphi_i = A + B \left(\frac{C_{i-1}}{C_{i+1}}\right)^i \quad (17)$$

其中 A 和 B 由边界条件确定. 通解 (17) 表明, 上述 6 个 DPCS 不会产生振荡解. 另一方面双重摄动重构的其他精度阶格式, 如五阶和六阶, 九阶和十阶精度, 则为条件稳定格式, 例如五阶和六阶格式稳定的临界网格 Reynolds 数 R_{cri} 约为 4, 它们相当于单重摄动 (SP) 四阶精度中心格式 (参见上节), 因此不再考虑它们. 从精度和简单性等因素的综合考虑, 高于八阶的绝对稳定格式也不再考虑. 表 1 给出诸格式的 R_{cri} .

表 1 2-CDS, SPCS 和 DPCS 诸格式的精度和格式稳定的 R_{cri}

Table 1 Accuracy and stable-scheme's R_{cri} of 2-CDS, SPCS and DPCS

Scheme	2-CDS	SPCS			DPCS		
order	2	3&4	5&6	3&4	5&6	7&8	11&12
R_{cri}	2	4.2	2.6	∞	4	∞	∞

总之, 对流扩散方程的半离散双重摄动中心格式 (DPCS) 的无源 ($f = 0$) 形式可以写成

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\gamma}{\Delta x^2}[C_{i+1}(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + C_{i-1}(\varphi_{i-1} - \varphi_i)] \quad (18)$$

对于三阶和四阶、七阶和八阶 DPCS, $C_{i+1} \geq 0$, $C_{i-1} \geq 0$ 即式 (14) 对网格 Reynolds 数 $R_{\Delta x}$ 的任意值成立, 因此它们为 TVD 格式. TVD 格式的提出者 Harten^[13] 已证明三基点 TVD 格式的精度不会高于二阶, 不过 TVD 格式 (18) 的精度显然超过了

二阶;特别是,已有的 TVD 格式通过在数学基本格式 (MBS) 中添加通量限制器等人为的数值耗散设计而建成^[2,13], 双重摄动中心格式 (DPCS) 以及绝对稳定迎风摄动格式则是通过数值摄动重构把流体动力学效应耦合进 MBS(二阶中心和一阶迎风格式) 中的结果, 它们均不含有任何人为了的数值耗散设计. 此外应指出, 已有高阶(精度高于二阶) 格式稳定的临界网格 Reynolds 数 R_{cri} 约为 2, 粗网格下导致振荡解^[1]; 事实上, 通过扩充模块容易提高格式精度但难以扩大格式的 R_{cri} 值. 而四阶和八阶 DPCS 的 R_{cri} 为无穷大, 即对网格 Reynolds 数的任意值它们均为不振荡格式. 这些都是四阶和八阶 DPCS 具有的突出优点.

4 数值算例

用一维线性(常系数)、非线性和二维变系数对流扩散方程的 3 个算例检验上述绝对稳定 DPCS 的数值性能, 计算结果与二阶中心差分格式 (2CDS) 的结果及精确解作了比较. 非线性 Burgers 方程用时间相关法求解, 时间项用二阶 Runge-Kutta 求解,

时间推进到满足

$$\frac{1}{N} \sum_i^N \frac{|u_i^{(k+1)} - u_i^k|}{\Delta t} \leq 2.0 \times 10^{-5} \quad (19)$$

其中, N 为网格数, k 为时间推进数. 对其他两个算例用 Gauss-Seidel 迭代方法求解, 迭代过程对所有基点重复到

$$\left. \begin{aligned} \max |\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| &< 10^{-8} \\ \max |\varphi_{ij}^{(k+1)} - \varphi_{ij}^{(k)}| &< 10^{-8} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 k 为迭代次数.

算例 1

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (21)$$

方程 (21) 的精确解取为 $\varphi = (e^{xp_e} - 1)/(e^{p_e} - 1)$, 计算中取 $p_e = u/\gamma = 200$, 用均匀网格, 表 2 给出 2-CDS, n -DPCS(n 指精度阶) 诸格式的均方误差 (L_2 error) 及其精度阶 (L_2 order).

表 2 2-CDS, 4-DPCS 和 8-DPCS 计算线性对流扩散方程 (21) 的均方误差 L_2 error 及其精度阶 (order)
Table 2 Mean square error L_2 and accurate order of 2-CDS, 4-DPCS and 8-DPCS solving 1-D linear convective diffusion equation(21)

N	2-CDS		4-DPCS		8-DPCS	
	L_2 error	order	L_2 error	order	L_2 error	order
40	—	—	1.5748×10^{-2}	—	6.0288×10^{-3}	—
80	—	—	1.7906×10^{-3}	3.1367	4.1862×10^{-5}	7.1701
160	—	—	1.2477×10^{-4}	3.8431	1.8111×10^{-7}	7.8526
320	1.1886×10^{-3}	—	7.6455×10^{-6}	4.0285	6.9406×10^{-10}	8.0276
640	2.9035×10^{-4}	2.0334	4.7125×10^{-7}	4.0201	2.6749×10^{-12}	8.0195
1280	7.2112×10^{-5}	2.0095	2.9322×10^{-8}	4.0064	1.0328×10^{-14}	8.0211

表 2 中 N 为网格数, 表 2 说明求解常系数方程, 2-CDS, 4-DPCS 和 8-DPCS 均可达到它们的理论精度, 2-CDS 在网格粗时产生振荡解 (参见图 1), 4-DPCS 和 8-DPCS 在很粗的网格下均稳定不产生振荡解. 4-DPCS 和 8-DPCS 在粗网格下的均方误差 L_2 比 2-CDS 在细网格下的 L_2 还小.

算例 2 定常非线性 Burgers 方程

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad (22)$$

方程 (22) 的精确解取为 $u = \tanh[Re(1-2x)/4]$. 表 3 给出诸格式的最大误差 (L_∞ error) 和均方误差 (L_2 error). 图 2 给出 2-CDS, 4-DPCS 和 8-DPCS 诸格式

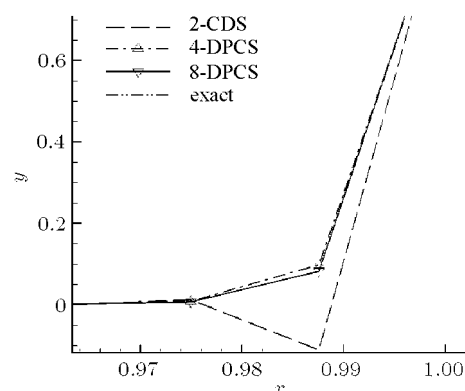


图 1 一维线性对流扩散方程, 诸格式在边界 $x = 1.0$ 附近的解
Fig.1 Solutions near boundary $x = 1.0$ of various schemes solving 1-D linear convective diffusion equation

在中点附近的解. 在粗网格下, 2-CDS 振荡或发散, 而 4-DPCS 和 8-DPCS 不振荡; 且 4-DPCS 和 8-DPCS 在粗网格 ($N = 40, 80$) 时的误差与 2-CDS 在细网格 ($N = 320$) 下的误差相近; 在细网格 ($N = 320, 640$) 下 4-DPCS 和 8-DPCS 的误差虽然有波动, 且 8-DPCS 的误差比 4-DPCS 的误差还大, 这是值得进一步研究的问题, 不过它们的误差仍明显小于 2-CDS 在细网格下的误差; 说明对非线性和间断解问题, 双重摄动重构格式 4-DPCS 和 8-DPCS 比 2-CDS 具有更高的分辨率, 且网格再粗也不产生振荡解, 4-DPCS 和 8-DPCS 的绝对稳定性得到数值证实.

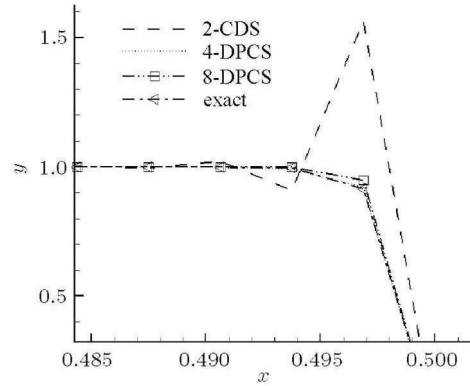


图 2 Burgers 方程计算诸格式在间断位置 ($x = 0.5$) 附近的解
Fig.2 Solutions near discontinuous location ($x = 0.5$) of various schemes solving Burgers equation

表 3 2-CDS, 4-DPCS 和 8-DPCS 计算 Burgers 方程的 L_∞ 和 L_2 误差

Table 3 Maximum error L_∞ and mean square error L_2 of 2-CDS, 4-DPCS and 8-DPCS solving Burgers equation

N	2-CDS		4-DPCS		8-DPCS	
	L_∞ error	L_2 error	L_∞ error	L_2 error	L_∞ error	L_2 error
80	—	—	0.609 425	0.083 58	0.515 178	0.116 082
160	—	—	0.802 481	0.065 131 8	0.869 026	0.069 237 5
320	0.646 67	0.051 544 5	0.004 264 2	0.000 375 375	0.031 535 2	0.002 491 75
640	0.127 819	0.007 805 53	0.040 352 5	0.002 375 91	0.042 226 1	0.002 499 9

算例 3 二维变系数对流扩散方程

$$\left. \begin{aligned} \left(y - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \\ \gamma \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right), \quad 0 \leq x, y \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

方程 (23) 的精确解取为 $\varphi(x, y) = \exp \left[\frac{1}{\gamma} \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right) \right]$. 计算区域 $[0, 1; 0, 1]$ 均匀剖分, $\gamma = 0.025$, 表 4 给出诸格式计算方程 (23) 的 L_∞ 和 L_2 误差, 表 4 说明在二维情况下, 4-DPCS 和 8-DPCS 的误差均比 2-CDS 小很多, 且不会产生振荡解.

表 4 2-CDS, 4-DPCS 和 8-DPCS 计算二维对流扩散方程的 L_∞ 和 L_2 误差

Table 4 Maximum error L_∞ and mean square error L_2 of 2-CDS, 4-DPCS and 8-DPCS solving 2-D convective diffusion equation

$N \times N$	Error	2-CDS	4-DPCS	8-DPCS
50×50	L_∞	28.294 1	$6.166 52 \times 10^{-2}$	6.67173×10^{-7}
	L_2	2.816 77	$5.892 01 \times 10^{-3}$	$6.033 54 \times 10^{-8}$
100×100	L_∞	7.234 46	4.108×10^{-3}	$2.872 18 \times 10^{-9}$
	L_2	0.719 067	$3.801 51 \times 10^{-4}$	$3.133 08 \times 10^{-10}$

5 结束语

本文将作者提出的单重数值摄动算法改进为双重数值摄动算法, 单重摄动算法利用离散单元内所有基点的信息进行高精度重构, 双重摄动考虑到对流项离散的上游和下游基点信息对格式性能有截然不同的影响, 因此双重摄动算法分别对上游和下游进行双重高精度重构, 由此得到一些对网格 Reynolds 数的任意值均稳定 (绝对稳定) 的三基点中心 TVD 格式, 如三和四阶, 七和八阶精度双重摄动中心格式 (DPCS), 且 DPCS 的简单性与二阶中心差分格式 (2-CDS) 相当. 说明摄动重构统一离散对流-扩散项既正确反映了对流-扩散过程的竞争特性, 又合理利用了物理黏性, 从而构建了对流扩散 (CD) 方程的高阶绝对稳定中心差分格式, 构建了一维 CD 方程的高阶绝对稳定中心 TVD 格式, 这就为在中心格式中避免使用人工黏性提供了一条有效途径.

致谢 感谢杨满叶和朱可同学在计算方面的帮助.

参 考 文 献

1 Ferziger JH, Peric M. Computational Methods for Fluid

- Dynamics. 3rd edn. Berlin: Springer, 2002
- 2 陶文铨. 数值传热学. 西安: 西安交通大学出版社, 1988 (Tao Wenquan. Numerical Heat Transfer. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1988 (in Chinese))
 - 3 李新亮, 傅德薰, 马延文等. 高精度复杂流动数值模拟软件 Hoam-OpenCFD 的开发与应用. 高性能计算发展与应用, 2007, 20(3): 52-58 (Li Xinliang, Fu Dexun, Ma Yanwen, et al. *Development and application of high performance computing*, 2007, 20(3): 52-58 (in Chinese))
 - 4 姚征, 陈康民. CFD 通用软件综述. 上海理工大学学报, 2002, 24(2): 137-144 (Yao Zheng, Chen Kangmin. Review on the commercial CFD software. *Journal of University of Shanghai for Science and Technology*, 2002, 24(2): 137-144 (in Chinese))
 - 5 Laney CB. Computational Gasdynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998
 - 6 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J Comput Phys*, 1983, 49: 357-393
 - 7 Liou MS. Ten years in the Making-AUSM Family. AIAA Paper 2001-2521
 - 8 Liu XD, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Jour Comput Phys*, 1994, 115: 200-212
 - 9 Jameson A. Analysis and design of numerical schemes for gasdynamics I: artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effects on accuracy and multigrid convergence. *Int J Comp Fluid Dyn*, 1994, 4: 171-218
 - 10 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式. 空气动力学学报, 1988, 6(2): 143-165 (Zhang Hanxin. Non-fluctuation, non-free parameter dissipation difference schemes. *Acta Aerodynamic Sinica*, 1988, 6(2): 143-165 (in Chinese))
 - 11 Wu HM. UENO-A class of ENO schemes constructed in unified way. In: Proceedings of Beijing Workshop on Computational Fluid Dynamics Vol 6. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, 1994. 171-189
 - 12 陈国谦, 高智. 对流扩散方程的迎风数学变换和差分格式. 力学学报, 1991, 23(5): 542-553 (Chen Guoqian, Gao Zhi. An upwind mathematical transformation and difference scheme for the convective diffusion equation. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 23(5): 542-553 (in Chinese))
 - 13 Chen GQ, Gao Z, Yang ZF. A perturbational h4 exponential finite difference scheme for the convective diffusion equation. *J Comput Phys*, 1993, 104(1): 129-139
 - 14 陈国谦, 杨志峰. 对流扩散方程的指数型摄动差分方法. 计算物理, 1993, 10(2): 197-206 (Chen Guoqian, Yang Zhifeng. An exponential-type perturbational difference method for the convective diffusion equation. *Chinese J Comput Phys*, 1993, 10(2): 197-206 (in Chinese))
 - 15 Gao Zhi. An higher-order accurate upwind compact difference scheme for the convective diffusion equation. In: Proc of Asian Workshop on Computational Fluid Dynamics, Mianyang, China, 1994. 18-24
 - 16 Gao Zhi, Hu Liming. A perturbational exact numerical solution scheme for the convective diffusion equation. In: Proc of 4th Asian Conference on Computational Fluid Dynamics, Mianyang, China, 2000. 554-560
 - 17 高智, 柏威. 对流扩散方程的摄动有限体积方法及其讨论. 力学学报, 2004, 36(1): 88-95 (Gao Zhi, Bai Wei. Perturbational finite volume method for the convective-diffusion equation and discussion. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(1): 88-95 (in Chinese))
 - 18 Gao Zhi, Yang Guowei. Perturbational finite volume method for the convective diffusion integral equation. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 6: 580-590
 - 19 代民果, 高智. 同位网格摄动有限体积格式求解浮力驱动方腔流动. 力学学报, 2006, 38(6): 733-740 (Dai Minguo, Gao Zhi. Perturbational finite volume scheme solving buoyancy-driven cavity flow on collocated meshes. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(6): 733-740 (in Chinese))

(责任编辑: 刘俊丽)

TWO ABSOLUTE STABILITY, HIGHER-ORDER CENTRAL DIFFERENCE SCHEMES FOR THE CONVECTIVE-DIFFUSION EQUATION¹⁾

Gao Zhi²⁾

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

Abstract In this paper the numerical-perturbation algorithm presented by the author is transformed from single perturbation reconstruction into dual one, in which the perturbation reconstruction of flux is performed by using respectively upstream and downstream nodes in a discrete element. Compared with the original single reconstruction using all nodes in the discrete element, dual perturbation reconstruction of flux can cut off propagation of convective anti-diffusion unstable information between upstream and downstream nodes and can couple both the high-order fluid dynamic relations and “upwind biasing” with the second order central difference scheme. Therefore, the accuracies of reconstructed schemes are raised and the stability range of reconstructed scheme is enlarged greatly. Two absolute stability, fourth- and eighth-order accurate central difference schemes (call them DPCS, for brevity) for the convective-diffusion equation are obtained. In the case of one dimension, DPCS are TVD schemes with order higher than second and they are nonoscillatory schemes for any values of grid Reynolds number. DPCS are reconstructed schemes of the classical second order central scheme coupling with both fluid dynamics effects and “upwind biasing” and do not introduce any artificial numerical dissipation. DPCS’s excellent properties are proved by analyses and three computational examples, which include one-dimensional linear and nonlinear and two-dimensional convective-diffusion equations. As to calculation of Burgers equation, the well-known second order central difference scheme (2-CDS) oscillates and diverges on coarse grids, while the fourth- and eighth-order accurate DPCS do not oscillate. Both maximum error L_∞ and mean square error L_2 of fourth- and eighth-order DPCS on coarse grids (grid number $N = 80, 160$) are approximately equal to those of 2CDS on fine grids ($N = 320$). From here we see that the present fourth- and eighth-order DPCS can capture discontinuities with high resolution. As to calculation of one-dimensional linear convective diffusion equation 2-CDS oscillates on coarse grids, while 4-DPCS and 8-DPCS do not oscillate; all 2-CDS, 4-DPCS and 8-DPCS can reach to individual L_2 order-of-accurate on fine grids (grid number $N \geq 320$); L_2 errors of 4-DPCS and 8-DPCS are greatly less than those of 2-CDS on fine grids.

Key words computational fluid dynamics, finite difference method, numerical perturbation algorithm, convective-diffusion equation

Received 23 April 2009, revised 17 December 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10872204).

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn