

文章编号: 1000-4750(2010)03-0193-05

# 轴向力作用下埋设于线弹性土壤中的 悬跨管道振动分析

\*邢静忠<sup>1,3</sup>, 柳春图<sup>2</sup>

(1. 天津工业大学机械电子学院, 天津 300160; 2. 中国科学院力学研究所, 北京 100080;

3. 天津市和教育部共建先进纺织复合材料重点实验室, 天津 300160)

**摘 要:** 利用细长梁的小挠度理论, 建立了两端埋设在线弹性土壤中的含轴向力的悬跨管道自由振动方程。基于埋设段的刚度约束特性, 建立了悬跨段管道的边界条件。解析求解得到了悬跨段管道频率方程, 数值求解了不同土壤刚度和轴向力条件下悬跨段管道的固有频率。研究表明: 悬跨段管道振动特性取决于轴向力系数和土壤刚度系数, 工程上推荐使用的简支梁和两端固支梁模型只在几个特殊参数点上适用, 建议采用该方法进行悬跨管道振动分析。

**关键词:** 悬跨管道; 弹性地基梁; 埋设悬跨; 小挠度理论; 固有频率

**中图分类号:** U175.5; TE832 **文献标识码:** A

## VIBRATION ANALYSIS OF SPANNING PIPELINE BURIED IN LINEAR ELASTIC SOIL WITH AXIAL FORCE

\*XING Jing-zhong<sup>1,3</sup>, LIU Chun-tu<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China;

2. Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China;

3. Advanced Composite Key Laboratory of Tianjin Municipality and Education Ministry, Tianjin 300160, China)

**Abstract** The Free vibration equation of a spanning pipeline buried in linear elastic soil is built with small deflection beam theory. Based on the stiffness characteristic of the buried segment, the boundary condition of the spanning segment is presented. The frequency equation of the spanning pipeline is achieved analytically, and the natural frequency of the spanning pipeline under different soil stiffness and axial forces is obtained numerically. The research shows that the vibration characteristic of the spanning pipeline is related to the axial force coefficient and soil stiffness coefficient. A beam of fixed supports at both ends and a simply supported beam model recommended in present rules are available for the spanning pipe only in several special cases. For the vibration analysis of spanning pipelines, the present model is suggested.

**Key words:** spanning pipe; elastic foundation beam; buried spanning pipe; small deflection theory; natural frequency

油气管道经常会铺设在复杂的环境条件下, 当铺设在不平坦地面或海底时, 将导致部分管道悬空<sup>[1]</sup>。在深海区域, 或非常坚硬的海床上, 或由于海流淘蚀<sup>[2]</sup>, 悬跨(Spanning)情况很难避免<sup>[3]</sup>。悬跨

造成管道受力复杂, 同时海流的周期性涡旋释放引发海底管道涡激振动, 造成管道疲劳破坏。海流淘蚀造成的悬跨长度可达几十米, 深度十几米<sup>[4]</sup>。为此 DnV 专门制定了悬跨管道设计的推荐做法<sup>[5]</sup>, 许

收稿日期: 2008-11-03; 修改日期: 2009-06-11

基金项目: 天津工业大学科研开发基金项目(029519); 教育部先进纺织复合材料重点实验室开放基金项目(2007ATC001)

作者简介: \*邢静忠(1966—), 男, 甘肃人, 教授, 博士, 主要从事海洋结构力学分析(E-mail: hsingjzh@tjpu.edu.cn);

柳春图(1935—), 男, 江苏人, 研究员, 学士, 长期从事断裂力学的理论和应用研究。

多海底管道规范对悬跨情况作了相应的规定<sup>[6-7]</sup>。Choi 利用纵横弯曲方程,给出了几种梁模型边界条件下悬跨管道变形的解析解,用能量法给出了固有频率,研究了轴向力对悬跨管道最大允许长度的影响<sup>[8]</sup>。对于发生涡激振动的悬跨管道,在安全评定时需要计算其疲劳寿命<sup>[9-10]</sup>。

国内学者研究了悬跨管道的涡激振动<sup>[11]</sup>和非线性振动<sup>[12-13]</sup>,以及涡激振动引起的疲劳寿命<sup>[14]</sup>。这些研究都使用了两端固支梁,或者简支梁模型。DnV 规范也建议在一般条件下,悬跨管道可以简化为有轴向力影响的两端简支梁或者两端固支梁模型<sup>[5]</sup>。普遍认为,简支梁模型弱化了埋设管道的弹性约束作用,而固支梁模型强化了这种作用,这两种模型是悬跨管道实际状况的两个极端情况。研究认为,弹性支座能更准确地反映两端管道的这种弹性约束作用,Kapuria 将悬跨管道简化为两端由线弹簧和转角弹性支承的梁模型,研究了涡激振动和疲劳寿命<sup>[9]</sup>。

实际埋设悬跨管道两端很长,通常埋在土壤里。当悬跨段管道发生弯曲变形时,两端管道要对悬跨段管道产生影响<sup>[15]</sup>。准确计算两端管道对悬跨段管道变形的约束作用,对悬跨管道的振动分析非常重要。本文研究建立了准确反映埋设段管道刚度约束作用的位移和内力之间的关系,给出了含有轴向力的埋设悬跨管道的振动方程。解析推导了对称振型和反对称振型的频率方程,数值求解给出了不同土壤和不同轴向力条件下管道的振动频率,为悬跨管道频率计算提供了新的方法。

## 1 控制方程及其求解

通常,管道的悬跨长度  $2a$  远远大于管道直径,振动产生的横向挠度  $y_1(x)$  和跨度相比很小,可以用梁的小挠度理论计算悬跨管道弯曲变形。设悬跨管道两端很长,埋设在线刚度为  $k_b$  的线弹性土壤中。管道弯曲刚度  $EI$ , 单位长度质量  $\rho A$ , 管道内有轴向力  $S$  (压力为正), 挠度向下为正, 坐标原点位于悬跨段管道的左端位置(图 1)。

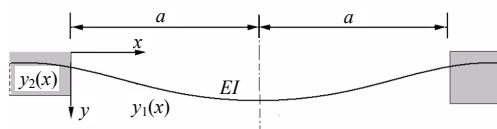


图1 线弹性土壤埋设悬跨管道的计算模型

Fig.1 Model of spanning pipeline in linear elastic soil

### 1.1 悬跨段管道的弯曲振动方程及其求解

根据细长梁小挠度弯曲方程,悬跨段管道振动方程为:

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2a \quad (1)$$

假定管道发生如下形式的自由振动:

$$y_1(x, t) = a Y_1(\xi) \exp(i\omega t)$$

引入无量纲变换:

$$\xi = x/a, \quad 2p = Sa^2/(EI), \quad \alpha^2 = \rho A \omega^2 a^4/(EI)$$

其中:  $p$  是轴向力系数;  $\alpha$  是频率系数,它与弯曲振动梁的频率方程的根  $\lambda_i$  (圆频率  $\omega_i = \lambda_i^2 (EI/(\rho A(2a)^4))^{1/2}$ ) 的定义略有不同。式(1)转化为由无量纲挠度函数  $Y_1(\xi)$  表示的方程:

$$\frac{\partial^4 Y_1}{\partial \xi^4} + 2p \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} - \alpha^2 Y_1(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 2 \quad (2)$$

式(2)的通解可表示为:

$$Y_1(\xi) = C_1 \sin r_1 \xi + C_2 \cos r_1 \xi + C_3 \sinh r_2 \xi + C_4 \cosh r_2 \xi, \quad 0 \leq \xi \leq 2 \quad (3)$$

其中:

$$r_1^2 = \sqrt{p^2 + \alpha^2} + p, \quad r_2^2 = \sqrt{p^2 + \alpha^2} - p$$

### 1.2 埋设段管道端部的刚度系数

为了得到埋设段管道对悬跨段管道的刚度系数,建立左端埋设在线弹性土壤中的无限长管道在  $x=0$  的截面上的剪力、弯矩与该点  $y$  方向的挠度、转角之间的关系。假定埋设段管道发生如图 1 所示的弯曲变形,小挠度弯曲的微分方程:

$$EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + k_b y_2(x) = 0, \quad -\infty \leq x \leq 0 \quad (4)$$

引入无量纲变换:

$$\xi = x/a, \quad Y_2(\xi) = y_2(x)/a, \quad \lambda_0 = \sqrt{k_b a^4/(EI)}$$

其中  $\lambda_0$  是土壤刚度系数。式(4)转化为由无量纲挠度函数  $Y_2(x)$  表示的方程:

$$\frac{\partial^4 Y_2}{\partial \xi^4} + 2p \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \xi^2} + \lambda_0^2 Y_2(\xi) = 0, \quad -\infty \leq \xi \leq 0 \quad (5)$$

式(5)的通解可表示为:

$$Y_2(\xi) = C_1 e^{-r_3 \xi} \sin r_4 \xi + C_2 e^{r_3 \xi} \sin r_4 \xi + C_3 e^{-r_3 \xi} \cos r_4 \xi + C_4 e^{r_3 \xi} \cos r_4 \xi, \quad -\infty \leq \xi \leq 0 \quad (6)$$

其中:

$$r_3 = \sqrt{\frac{\lambda_0 - p}{2}}, \quad r_4 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + p}{2}}.$$

因埋设段管道挠度  $Y_2(\xi)$  在负无穷处的位移有

限, 则通解式(6)的积分常数:

$$C_1 = 0, C_3 = 0 \quad (7)$$

管道挠度  $Y_2(x)$  在  $x=0$  处的内力边界条件:

$$-\frac{EI}{a} Y_2''(0) = M_0, -\frac{EI}{a^2} Y_2'''(0) = Q_0 \quad (8)$$

将通解式(6)代入式(8), 考虑式(7), 求解得到用  $M_0$  和  $Q_0$  表示的积分常数  $C_2$  和  $C_4$ , 将其代入式(6)即可得到挠度函数  $Y_2(x)$ , 则  $\xi=0$  处变形和内力满足式(9)表示的关系。

### 1.3 悬跨段管道的边界条件

埋设段管道在  $\xi=0$  处与悬跨段管道连接, 提供对悬跨段管道刚度约束。悬跨段管道变形和内力与埋设段管道在  $\xi=0$  处连续, 所以悬跨段管道变形和转角满足:

$$Y_1(0) = -Y_1'''(0) \frac{\sqrt{2\lambda_0 - 2p}}{\lambda_0^2} + Y_1''(0) \frac{\lambda_0 - 2p}{\lambda_0^2} \quad (9a)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{r_1^3 \sqrt{2\lambda_0 - 2p}}{\lambda_0^2} & 1 + \frac{r_1^2(\lambda_0 - 2p)}{\lambda_0^2} & \frac{r_2^3 \sqrt{2\lambda_0 - 2p}}{\lambda_0^2} & 1 - \frac{r_2^2(\lambda_0 - 2p)}{\lambda_0^2} \\ r_1 - \frac{r_1^3}{\lambda_0} & \frac{r_1^2 \sqrt{2\lambda_0 - 2p}}{\lambda_0} & r_2 + \frac{r_2^3}{\lambda_0} & -\frac{r_2^2 \sqrt{2\lambda_0 - 2p}}{\lambda_0} \\ \cos(r_1)r_1 & -\sin(r_1)r_1 & \cosh(r_2)r_2 & \sinh(r_2)r_2 \\ -\cos(r_1)r_1^3 & \sin(r_1)r_1^3 & \cosh(r_2)r_2^3 & \sinh(r_2)r_2^3 \end{vmatrix} = 0$$

展开后经化简得到:

$$-2/\lambda_0^2 \{ [c_1 \sin r_1 + (c_2 + c_3)r_1 \cos r_1] \sinh r_2 + [(-c_2 + c_3)r_2 \sin r_1 + c_4 \cos r_1] \cosh r_2 \} = 0 \quad (12)$$

其中:

$$\begin{aligned} c_1 &= 2\sqrt{2\lambda_0 - 2p}\alpha^2(p^2 + \alpha^2), \\ c_2 &= \sqrt{p^2 + \alpha^2}[(\lambda_0^2 + \alpha^2)p - 2\lambda_0(p^2 + \alpha^2)], \\ c_3 &= (p^2 + \alpha^2)(\alpha^2 + 2\lambda_0 p - \lambda_0^2), \\ c_4 &= -2r_1 r_2 \lambda_0 \sqrt{2\lambda_0 - 2p}\alpha^2(p^2 + \alpha^2). \end{aligned}$$

### 2.2 反对称振型情况

将式(3)代入式(9a)、式(9b)和式(11), 同上节方法得到频率方程。展开后经化简得到与式(12)相同的形式, 其中的系数:

$$\begin{aligned} c_1 &= -2\lambda_0 \sqrt{2\lambda_0 - 2p}(p^2 + \alpha^2), \\ c_2 &= -\sqrt{p^2 + \alpha^2}(\alpha^2 - \lambda_0^2 + 2p^2), \\ c_3 &= -2(p^2 + \alpha^2)(\lambda_0 - p), \\ c_4 &= -2r_1 r_2 \sqrt{2\lambda_0 - 2p}(p^2 + \alpha^2). \end{aligned}$$

$$Y_1'(0) = -Y_1'''(0) \frac{1}{\lambda_0} + Y_1''(0) \frac{\sqrt{2\lambda_0 - 2p}}{\lambda_0} \quad (9b)$$

对于对称振动, 跨中有对称条件:

$$Y_1'(1) = 0, Y_1'''(1) = 0 \quad (10)$$

对于反对称振动, 跨中有反对称条件:

$$Y_1(1) = 0, Y_1''(1) = 0 \quad (11)$$

## 2 悬跨管道的频率方程

为了公式推导简洁起见, 下面分对称振型和反对称振型情况分别推导频率公式。

### 2.1 对称振型情况

将式(3)代入式(9a)、式(9b)和式(10), 得到包含四个积分常数的线性代数方程组, 令其系数矩阵的行列式等于零, 可得频率方程:

## 3 固有频率

式(12)给出了不同土壤刚度系数  $\lambda_0$  和轴向压力小于屈曲载荷的轴向力作用下发生弯曲振动的频率方程, 数值求解可得各阶振动频率。

### 3.1 不同土壤刚度和轴向压力对固有频率的影响

图 2 给出了土壤刚度系数  $\lambda_0=0.1$ 、 $\lambda_0=1$ 、 $\lambda_0=3$ 、 $\lambda_0=5$ 、 $\lambda_0=10$ 、 $\lambda_0=50$ 、 $\lambda_0=200$ 、 $\lambda_0=10^3$ 、 $\lambda_0=10^4$ 、 $\lambda_0=10^5$  和  $\lambda_0=\infty$ , 悬跨管道第一阶弯曲振动固有频率系数  $\alpha$  与轴向力系数  $p$  之间的关系。从图 2 看出, 在土壤刚度系数  $\lambda_0$  较小时, 频率系数小, 频率接近零的屈曲载荷轴向力系数  $p$  也小; 随着土壤刚度系数  $\lambda_0$  增大, 悬跨管道的频率系数  $\alpha$  增大, 接近屈曲状态的轴向力系数  $p$  增大; 土壤刚度系数  $\lambda_0$  趋于无穷大时, 悬跨管道在无轴力时的固有频率系数  $\alpha=5.5933$ , 正好等于两端固支梁的第一阶频率系数(对应于  $\lambda_1=4730$ )。令此时频率系数  $\alpha$  趋于零, 可求出轴向力系数  $p=4.9348$ , 对应着两端固支梁的屈曲轴向力系数。

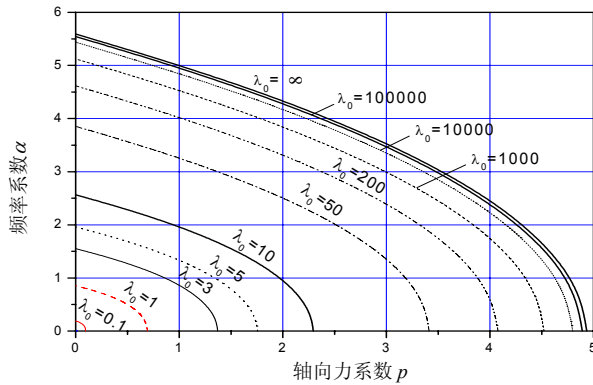


图2 不同土壤刚度下的固有频率系数与轴向力系数的关系  
Fig.2 Relationship between natural frequency coefficient and axial force coefficient under different soil stiffness coefficient

表 1 可以等效为简支梁模型的悬跨管道的土壤刚度系数

Table 1 Soil stiffness coefficient in which spanning pipe equivalent to simply supported beam model

$p / (\pi_0^2 / 8)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\lambda_0$	8.970	8.345	7.715	7.084	6.438	5.799	5.146	4.482	3.811	3.132	2.467

从表 1 看出，当轴向力系数  $p$  较小时，等价于简支梁模型的悬跨管道具有较大的土壤刚度系数  $\lambda_0$ 。轴向力系数  $p$  较大时，土壤刚度系数  $\lambda_0$  较低。说明含有轴向力的简支梁模型只能模拟具有特定土壤刚度系数的悬跨管道。当土壤刚度系数  $\lambda_0$  远离表 1 值时，简支梁模型给出的频率将导致很大偏差。

3.3 刚性土壤条件下的固有频率

当土壤刚度系数  $\lambda_0$  趋于无穷大，取轴向力系数  $p=0$ ，式(12)可以退化为没有轴力的两端固支梁的频率方程，数值求解得到前 5 阶固有频率系数  $\alpha=5.59332$ 、 $\alpha=15.4182$ 、 $\alpha=30.2258$ 、 $\alpha=49.9649$  和  $\alpha=74.6389$ 。与文献[16]公式给出的结果完全一致。

4 结论

本文给出了两端埋设在线弹性土壤中含轴向力的悬跨管道的自由振动频率方程，数值求解了不同轴向力和土壤刚度条件下的固有频率。计算表明土壤刚度系数  $\lambda_0$  和轴向力系数  $p$  对悬跨管道振动产生显著影响。工程中应该准确计算这两种影响，并按照土壤刚度系数  $\lambda_0$  大小来选用工程上推荐采用的简支梁模型或两端固支梁模型。

在多数情况下，只有土壤刚度系数  $\lambda_0$  很大时，两端固支梁模型才可以较好的模拟悬跨管道的振动特性。能够简化为简支梁模型的悬跨管道需要综合考虑轴向力系数  $p$  和土壤刚度系数  $\lambda_0$ ，因为只有特殊的参数点上，悬跨管道的振动频率等于简支梁模型的频率。

本文悬跨管道频率方程，为工程上准确计算埋

3.2 简支梁的固有频率

根据有轴力的简支梁的第一阶频率公式<sup>[16]</sup>，得频率系数  $\alpha$  与轴向力系数  $p$  之间的关系：

$$\alpha = \pi^2 \sqrt{1 - \frac{2p}{\pi^2}} \tag{13}$$

在不同轴向力作用下，简支梁频率只和某一种土壤刚度系数的悬跨管道频率相等。表 1 给出了依据式(12)求解出悬跨管道频率系数和简支梁频率系数相同时的土壤刚度系数  $\lambda_0$ 。

设悬跨管道频率提供理论支持。

参考文献：

- [1] 王维. 确定海底埋设输油管线允许冲刷长度的一种实用方法[J]. 西南石油学院学报, 1996, 18(3): 94—97. Wang Wei. A practical method to determine allowable scour span of buried submarine oil pipeline [J]. Journal of West-south Oil College, 1996, 18(3): 94—97. (in Chinese)
- [2] 王利金, 刘锦昆. 埕岛油田海底管道冲刷悬空机理及对策[J]. 油气储运, 2004, 23(1): 44—48. Wang Lijin, Liu Jinkun. Scour spanning principle and countermeasure for submarine pipeline in Cheng island oil field [J]. Oil Gas Storage and Transportation, 2004, 23(1): 44—48. (in Chinese)
- [3] Park H I, Kim C H. Analytical methods for the determination of allowable free span lengths [C]. Proceedings of the Seventh International Offshore and Polar Engineering Conference. Honolulu, USA, 1997: 377—342.
- [4] 唐友刚, 李长升, 项忠权. 加固前后输油管道固有频率计算[J]. 石油学报, 1997, 18(2): 128—133. Tang Yougang, Li Changsheng, Xiang Zhongquan. Natural frequency calculation of oil pipe before and after reinforcement [J]. Journal of Oil, 1997, 18(2): 128—133. (in Chinese)
- [5] Det Norske Veritas (DnV). Free spanning pipeline [S]. Recommended Practice, RP-F105, 2002.
- [6] Det Norske Veritas (DnV). Submarine pipeline systems [S]. Offshore Standard, OS-F101, 2000.
- [7] Det Norske Veritas (DnV). Environmental conditions and environmental loads [S]. CN 30.5, 2000.
- [8] Choi H S. Free spanning analysis of offshore pipelines [J]. Ocean Engineering, 2001(28): 1325—1338.

- [9] Kapuria S, Salpekar V Y, Sengupta S. Fatigue due to vortex-induced oscillations in free spanning pipelines supported on elastic soil bed [C]. Proceedings of the Ninth International Offshore and Polar Engineering Conference. Brest, France, 1999: 197–203.
- [10] Xu T, Lauridsen B, Bai Y. Wave-induced fatigue of multi-span pipelines [J]. Marine structures 1999, 12: 83–106.
- [11] 曾晓辉, 邢静忠, 柳春图, 吴应湘. 多作业状态下近海油气管道的力学分析及软件[J]. 中国造船, 2002, 43(4): 45–54.  
Zeng Xiaohui, Xing Jingzhong, Liu Chuntu, Wu Yingxiang. Mechanical analysis and software of oil gas offshore pipeline under multiple work states [J]. Ship Manufacture of China, 2002, 43(4): 45–54. (in Chinese)
- [12] 肖锡武, 王海潮. 悬跨管道的参线性自由振动[J]. 海洋工程, 1992, 10(1): 21–34.  
Xiao Xiwu, Wang Haichao. Parametric linear free vibration of spanning pipelines [J]. Ocean Engineering, 1992, 10(1): 21–34. (in Chinese)
- [13] 戴英杰, 宋甲宗. 悬跨段海洋管道非线性自由振动分析[J]. 大连理工大学学报, 1999, 39(6): 756–760.  
Dai Yingjie, Song Jiazong. Nonlinear free vibration of suspended pipelines [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1999, 39(6): 756–760. (in Chinese)
- [14] Angus R, Grytten T, Nystrom P R. Case studies in pipeline free span fatigue [C]. Proceedings of the Tenth International Offshore and Polar Engineering Conference, Seattle, USA, 2000: 275–284.
- [15] Xing Jingzhong, Liu Chuntu, Duan Menglan. Vortex-induced vibration model of span segment of buried submarine pipeline [J]. Proceedings of the Fifteenth International Offshore and Polar Engineering Conference, 2005: 130–134.
- [16] Bishop R E D, Johnson D C. Vibration analysis tables [M]. Cambridge University Press, 1956.

(上接第 173 页)

- [4] 史庆增. 墩(桩)柱上流冰撞击力的研究与试验[J]. 海洋工程, 1994, 12(4): 8–13.  
Shi Qingzeng. A study and test of the impact force of the pack ice on the pier (pile) [J]. The Ocean Engineering, 1994, 12(4): 8–13. (in Chinese)
- [5] 吴龙涛, 吴辉斌, 李万彪. 渤海冰漂移对海面风场、潮流长的响应[J]. 海洋学报, 2005, 27(5): 15–21.  
Wu Longtao, Wu Huiding, Li Wanbiao. Sea ice drifts in response to winds and tide in the Bohai Sea [J]. Acta Oceanologica Sinica, 2005, 27(5): 15–21. (in Chinese)
- [6] Masterson D M, Frederking R. Experience with the Canadian standards association offshore structures code [C]. Proceedings of the Sixteenth (2006) International Offshore and Polar Engineering Conference. The International Society of Offshore and Polar Engineers, California, USA, 2006, 14–19.
- [7] Evers K U, Weihrauch A. Design and model testing of ice barriers for the protection of offshore structures in shallow waters in winter [C]. Proceedings of 17th International Symposium on Ice, International Association of Hydraulic Engineering and Research, Saint Petersburg, 2004, 2: 124–131.
- [8] Løset S, Kanestrøm Ø, Pytte T. Model tests of a submerged turret loading concept in level ice, broken ice and pressure ridges [J]. Cold Regions Science and Technology, 1998, 27(1): 57–73.
- [9] 李志军, 董吉武, 芦志强, 陈际丰, 李广伟. 冰对码头桩结构作用力的物理试验和模拟研究[J]. 工程力学, 2009, 26(3): 212–217.  
Li Zhijun, Dong Jiwu, Lu Zhiqiang, Chen Jifeng, Li Guangwei. Physical experiments and simulation of sea ice force on pile structures in ports [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(3): 212–217. (in Chinese)
- [10] Li Zhijun, Wang Yongxue, Li Guangwei. On the flexural strength of DUT-1 synthetic model ice [J]. Cold Regions Science and Technology, 2002, 35(2): 67–72.
- [11] 白乙拉, 李志军, 卢鹏. 基于试验数据优化辨识孤立冰块的流拖曳系数[J]. 大连理工大学学报, 2007, 47(6): 885–889.  
Bai Yila, Li Zhijun, Lu Peng. Optimization and identification on current drag coefficients of isolated ice floe based on experimental data [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2007, 47(6): 885–889. (in Chinese)
- [12] Lu P, Li Z J, Zhang Z H. Aerial observations of floe size distribution in the marginal ice zone of summer Prydz Bay [J]. Journal of Geophysical Research, 2008, 113(C02011): doi:10.1029/2006JC003965.
- [13] Li Zhijun, Zhang Limin, Li Guangwei. Physical simulation of sea ice effects on coastal and offshore structures [J]. Morskov Vestnik, 2007, 21(1): 81–86.