

有限单元质量质心集中方法的探讨

段鹏飞* 江增荣† 丁桦*,1)

*(中国科学院力学研究所水动力学与海洋工程重点实验室, 北京 100190)

†(第二炮兵装备研究院第二研究所, 北京 100085)

摘要 提出利用单元质量质心集中方法来优化单元惯性效应表征、改善单元力学效应匹配的思想: 将单元质量质心集中能够建立精确描述单元质点系惯性效应的动力学方程, 进而达到优化单元惯性效应表征以及改善单元惯性和变形两种力学效应匹配的目的. 本文通过一维问题的频散效应分析等对该方法的有效性进行了详细的分析和验证.

关键词 单元质量质心集中, 单元质点系, 惯性效应, 变形效应

中图分类号: O347.4+1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0879(2010)04-058-05

THE METHOD OF CENTROID LUMPED MASS IN THE FINITE ELEMENT

DUAN Pengfei* JIANG Zengrong† DING Hua*,1)

*(Key Laboratory for Hydrodynamics and Ocean Engineering, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

†(The Second Research Department, Equipment Research Institute of PLA's Second Artillery, Beijing 100085, China)

Abstract The lumped mass at the centroid will gives more accurate results for dynamic problems, and also make it possible to optimize the element inertia effect and improve the matching between the element inertia and deformation effects. The detailed analyses of the frequency-dispersion effect for a one-dimensional problem shows the validity of the method.

Key words centroid lumped mass, dynamic problem, inertia effect, deformation effect

引 言

在基于变形修正的模型简化方法基础之上建立的超单元, 其适应性强、计算效率高、计算结果好的特点已经得到验证^[1-3]. 该超单元的实质是: 将单元所覆盖运动同步性区域的内部所有自由度都用单元内部超节点的准刚体模态来代替. 如果进一步将超单元的质量全部集中在单元内部超节点上, 单元边界节点不分配质量, 那么实现简化计算和显式求解的同时, 这一方案的计算结果和相同空间和时间步长下只具有边界节点的结构单元的结果相比, 仍然具有明显高的精确度^[3]. 这说明了在相同空间和时间步长条件下, 单元质量全部集中在内部超节点的方法比单元质量边界节点集中的方法更具合理性.

1 单元质量质心集中

超单元质量内部超节点集中的本质是将单元质量全部置于单元内部质心节点上, 其高效高精度度的求解说明了单元质量质心集中方法的合理有效. 该方法假设单元质量全部集中在单元内部质心节点上, 边界节点没有质量分配. 在该假设下建立的单元质点系动力方程, 表示的是单元质点系在牛顿第二定律描述下的动力平衡, 能够精确描述单元质点系在合外力作用下的运动, 即单元的惯性效应. 由此集合成的整体结构的动力方程表示的就是结构质点系的动力平衡, 同样是在牛顿第二定律描述下, 能够对结构质点系在结构外力作用下的运动, 即惯性效应进行精确描述. 因此该方法能够更进一步逼

2009-10-13 收到第 1 稿, 2009-12-04 收到修改稿.

1) 丁桦, 教授, 主要从事波的传播和相关的反问题, 结构分析与优化控制、结构碰撞等方面研究. E-mail: hding@imech.ac.cn

近单元受力运动的物理过程以及结构整体的动力特性和动力响应。引言中超单元质量的内部超节点集中实质上体现的正是该方法。也正是由于单元质量质心集中优化了单元惯性效应的表征，改善了单元惯性效应和变形效应的匹配，才使得在相同空间和时间步长条件下，质量内部超节点集中超单元的求解精确度明显高于只有边界节点结构单元的。

对于只具有边界节点的结构单元集中质量模型，单元质量只能够分布在边界节点上，使得单元惯性和变形两种力学效应的表征全部依赖于边界节点。首先这不能精确描述单元质点系的惯性效应；此外这势必会夸大相邻单元间边界相互作用的惯性效应。可见这样的质量集中并不是对单元惯性效应的最优表征。

由此，单元质量质心集中方法可以理解为：将有限单元的质量全部集中在单元质心节点上，建立对单元质点系惯性效应精确描述的动力方程，进而达到优化单元惯性效应表征，改善单元惯性效应和变形效应匹配的目的。

本文通过一维杆件的振动特性及振动传播等力学问题的分析对这一方法的有效性进行了探讨，结果表明，该方法能够明显地提高求解的精确度，使结果更趋近于真实解，从而很好地证明了该方法的有效性。

2 单元质量质心集中动力模型

2.1 单元质量质心集中无阻尼动力方程

单元质量质心集中体现在单元质量矩阵上就是将单元质量全部放置在矩阵内部质心节点对应的位置上。按这种方法，单元动力方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{ii}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_b^e \\ u_i^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb}^e & K_{bi}^e \\ K_{ib}^e & K_{ii}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b^e \\ u_i^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_b^e \\ f_i^e \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中标示“i”表示单元内部质心节点自由度对应的特征，标示“b”表示单元边界自由度对应的特征。

假设式(1)已经做了边界约束处理。将其拆分为两个等式，即

$$K_{bb}^e u_b^e + K_{bi}^e u_i^e = f_b^e \quad (2)$$

$$M_{ii}^e \ddot{u}_i^e + K_{ib}^e u_b^e + K_{ii}^e u_i^e = f_i^e \quad (3)$$

式(2)和(3)能够精确描述单元质点系的惯性效应。其中式(3)是对单元质心节点惯性效应的描述，它在形式上是完备的： f_i 是作用在该单元质心节点上的结构外力， $K_{ib}^e u_b^e$ 是该单元边界节点对质心节点的

作用力，根据作用力与反作用力原理，它其实是相邻单元对该单元的作用力，即该单元受到的单元间相互作用的结构内力。这个内力不是给定的，需要通过单元间的平衡关系来求解。而式(2)表示的是单元边界节点的受力平衡，即相邻单元间边界节点的受力平衡，是静力平衡。它直接给出了单元质心节点和边界节点的位移关系。将单元边界节点位移表示为单元质心节点位移的函数，可以得到

$$u_b^e = K_{bb}^e{}^{-1} (f_b^e - K_{bi}^e u_i^e) \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)，整理后可得

$$M_{ii}^e \ddot{u}_i^e + (K_{ii}^e - K_{ib}^e K_{bb}^e{}^{-1} K_{bi}^e) u_i^e = f_i^e - K_{ib}^e K_{bb}^e{}^{-1} f_b^e \quad (5)$$

令 $M_c^e = M_{ii}^e$, $K_c^e = K_{ii}^e - K_{ib}^e K_{bb}^e{}^{-1} K_{bi}^e$, $f_c^e = f_i^e - K_{ib}^e K_{bb}^e{}^{-1} f_b^e$ ，则式(5)可表示为

$$M_c^e \ddot{u}_i^e + K_c^e u_i^e = f_c^e \quad (6)$$

式(6)即为质量质心集中单元的无阻尼动力方程。

类似地，按照有限元的集合方法可以得到单元质量质心集中的结构整体动力方程

$$M_C \ddot{u}_I + K_C u_I = F_C \quad (7)$$

其中， $M_C = M_{II}$, $K_C = K_{II} - K_{IB} K_{BB}^{-1} K_{BI}$, $F_C = F_I - K_{IB} K_{BB}^{-1} F_B$ 。下标“*I*”表示结构整体质心节点自由度对应的特征，下标“*B*”表示结构整体边界自由度对应的特征。

2.2 单元质量内部集中一维杆单元

为了将质量集中在单元质心，首先建立有内部节点的一维杆单元。按照插值函数法^[4-5]可以得到局部坐标系下，有内部节点杆单元的刚度矩阵

$$K^e = \frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ b \\ i \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中， E 为材料的弹性模量， A 和 l 分别是杆单元的截面积和长度。

按照这种单元节点位置的排列，质量质心集中一维杆单元的质量矩阵就表示为

$$M^e = \rho A l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ b \\ i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中 ρ 是材料密度。

3 算例

算例针对同一个力学问题, 在相同单元尺寸、材料参数和迭代时间步长的条件下, 采用单元质量质心集中模型和只具有边界节点的结构单元集中质量模型对比求解的方法来判断前者的有效性。

首先来看一维杆件的振动特性分析。单元几何尺寸: $l = 0.3\text{m}$, 截面积 0.01m^2 。材料参数: $E = 210\text{GPa}$, $\rho = 7.8 \times 10^3\text{kg/m}^3$ 。对比两种质量集中方法下 15 个杆单元组成的一维杆件右端固支时的固有频率。

对于无阻尼的系统, 已知结构的质量矩阵和刚度矩阵就可以求得系统的固有频率^[5-6]。单元质量质心集中的结果与解析的和边界集中的对比, 如图 1 所示。单元质量质心集中方法与边界集中方法结果相对误差的对比, 如图 2 所示。

图 2 所示, 单元质量质心集中方法得到的杆件前 6 阶固有频率值的相对误差都在 2% 以内, 第 8 阶固有频率的误差也不到 4%。而单元质量边界集中

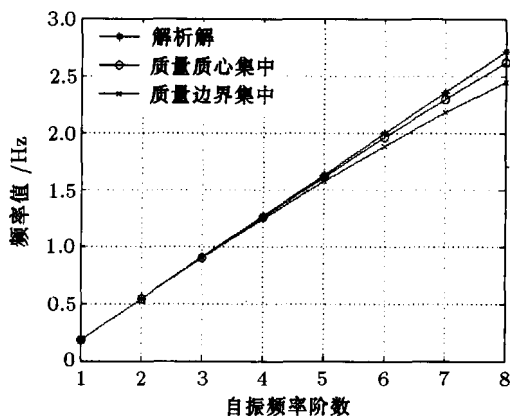


图 1 3 种方法的固有频率值

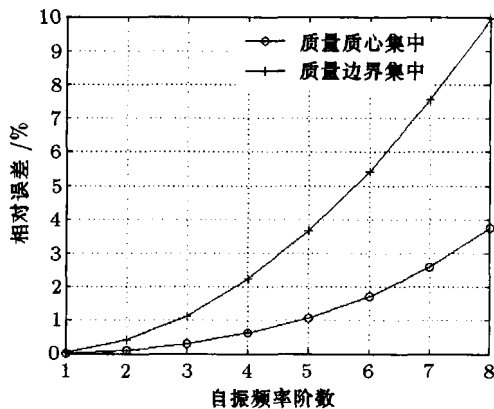


图 2 2 种离散模型固有频率的相对误差

结果第 6 阶固有频率的相对误差已超过 5%, 第 8 阶固有频率的相对误差更是已达 10%。这足以说明单元质量质心集中方法对结构振动特征分析的有效性。

其次是振动在两种离散模型中传播规律的比较。对比两种质量集中方法下 100 个杆单元组成的杆件, 同一简谐振动 (幅值 0.03m , 频率 ω) 在其中的传播规律。单元几何尺寸和材料参数不变, 求解都采用 Newmark 逐步积分法, 时间步长 Δt 选择为 $l/\sqrt{E/\rho}/2 \approx 1.4 \times 10^{-4}\text{s}$ 。定义特征频率 $\omega_c = 2\sqrt{E/\rho}/l$, 它是一维结构杆单元集中质量空间离散模型的截止频率^[7-8]。

简谐振动在一维离散模型中第 t 个时刻距离振源第 j 个节点的振动响应可以表示为^[7-9]

$$u_j^m = U_0[\eta \exp(i \cdot \varphi)]^j \exp(i \cdot t \cdot \omega \cdot \Delta t) \quad (10)$$

其中, i 是虚数单位, U_0 是振源振动幅值, ω 是振源振动频率, Δt 是时间步长。 $\eta \exp(i \cdot \varphi)$ 称为振动传递函数, 其中 η 表示传递函数的幅值; φ 表示传递函数的相位, 是离散模型里振动传播的波数 k' 与杆单元长度 l 乘积的相反数^[7-10]

$$\varphi = -k'l \quad (11)$$

η 和 k' 可以通过振动传递过程中任意一点的振动时程曲线得到^[12]。

根据波动有限元理论^[7-11], 离散模型中都存在着截止频率。当振源的振动频率大于模型的截止频率时, 离散模型中不存在任何能量的传播, 产生所谓的寄生振荡效应, 此时振幅随着节点到振源距离的增大而减小, 即传递函数幅值 $\eta < 1$ 。当节点振动频率小于模型的截止频率时, 振动可以在离散模型中传播, 此时振幅在传递过程中不变, 即传递函数幅值 $\eta = 1$ 。

通过比较同一个简谐振动分别在两种质量集中模型中传播的传递函数幅值 η (图 3 所示), 判断在相同空间和时间步长条件下两者截止频率值的大小。可以看到在算例选取的空间和时间步长条件下, 单元质量边界集中模型的 η 值在 $\omega/\omega_c = 1$ 附近开始衰减, 说明该条件下该离散模型的截止频率在 ω_c 附近。而在单元质量质心集中模型里, 同一现象出现在 $\omega/\omega_c = \pi/3$ 附近。这一对比说明, 在相同空间和时间步长条件下, 单元质量质心集中提高了离散模

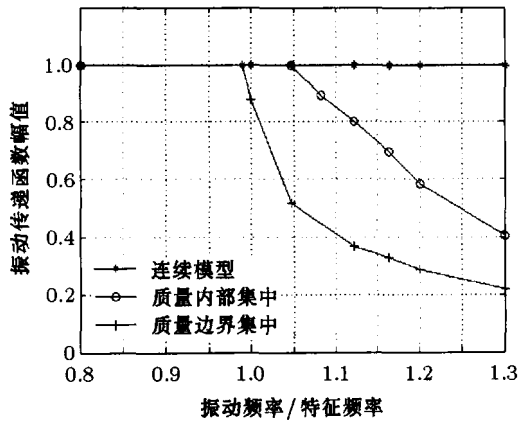


图 3 3 种模型的振动传递函数幅值

型的截止频率值. 我们分析了多组两相邻节点的振幅, 得到了相同的结论.

根据波动有限元理论 [7-11], 寄生振荡效应产生前, 振动可以在离散模型中传播. 但是在连续模型中的传播规律不同, 离散模型中振动传递函数相位值 φ 不再与振动频率 ω 成正比关系, 而是随着 ω 的增大越来越偏离连续模型中与 ω 的正比关系. 即所谓的频散效应. 寄生振荡效应产生后, 相邻两节点振动相位相反, 此时振动传递函数相位值 $\varphi = -\pi$.

相同空间和时间步长条件下, 两种离散模型对振动传播模拟精确度的高低可以通过比较两者传递函数的相位值 φ 来判断. 图 4 是不同 ω/ω_c 对应的 φ 值图, 可以看到在离散模型里, 随着 ω 的增加, φ 越来越偏离连续模型中它与 ω 所成的正比关系, 即频散效应越来越明显. 其中单元质量质心集中模型的 φ 值曲线与质量边界集中的相比偏离趋势缓和, 即振动在后者传播的频散效应相对弱.

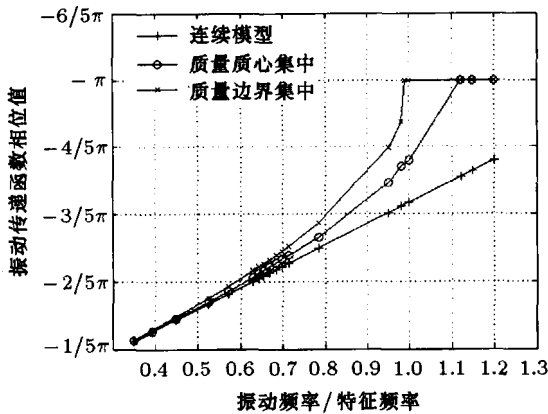


图 4 3 种模型的振动传递函数相位值

两种离散模型的振动传递函数相位值 φ 在 $0.35 \leq \omega/\omega_c \leq 0.7$ 间的相对误差如图 5 所示, 从中可以判断它们模拟振动传播的精确度. 可以看到

$\omega/\omega_c = 0.6$ 时, 单元质量质心集中模型 φ 值的相对误差还不到 3%, 而此时单元质量边界集中模型的已远远超过 5%, 而 $\omega/\omega_c = 0.7$ 时, 单元质量质心集中模型 φ 值的相对误差还在 5% 以内. 对比说明, 单元质量质心集中有效抑制了离散模型的频散效应, 提高了振动传播模拟的精确度. 我们分析了多个对应节点的振动时程曲线, 得到了相同的结论.

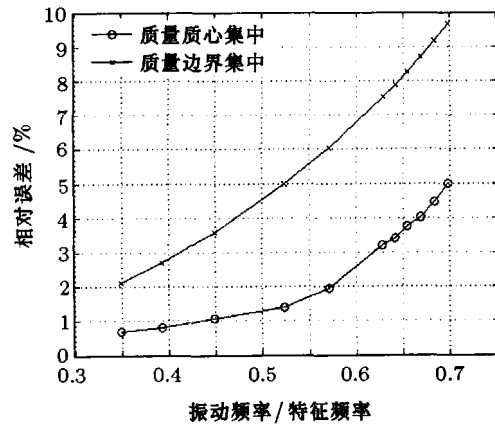


图 5 2 种离散模型传递函数相位值的相对误差

可见, 在相同空间和时间步长条件下, 单元质量质心集中离散模型对振动的传播有着更高的截止频率值和更广的精确度范围, 说明单元质量质心集中方法在振动传播模拟问题上的有效性.

4 结 论

提出利用单元质量质心集中方法来优化单元惯性效应表征、改善单元力学效应匹配的思想, 并利用该方法对一维杆件的动力学问题进行了详细的分析. 发现在一维杆件振动特性分析的问题上, 单元质量质心集中能够明显提高结构固有频率值计算的精确度. 在一维离散模型振动传播的问题上, 单元质量质心集中不仅使得离散模型的截止频率值提高了 10% 左右, 还有效抑制了振动传播过程中的频散效应, 提高了离散模型对振动传播模拟的精确度.

参 考 文 献

- 1 刘彬, 丁桦, 时忠民. 基于柔度修正的局部刚体化结构动力模型简化方法. 工程力学, 2007, 24(10): 25-29 (Liu Bin, Ding Hua, Shi Zhongmin. A model reduction method for dynamic analysis based on quasi-rigid-body mode and flexibility modification. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(10): 25-29 (in Chinese))

(下转第 57 页)

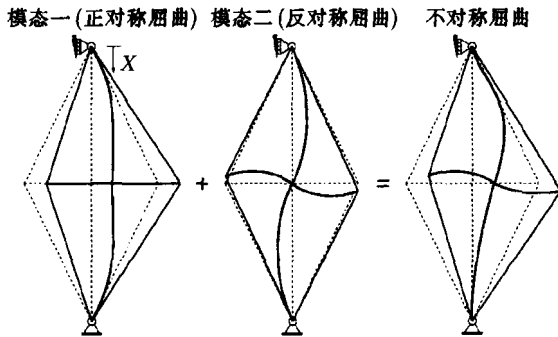


图 10 预应力钢压杆不对称屈曲

通过 $\frac{\partial P^{cr}}{\partial f_i} = 0$, 联立方程组, 即可解得 P^{cr} . 根据作者研究^[10], 对于不对称屈曲显著的钢压杆, 利用式 (6) 得到的临界荷载要低于式 (3) 或 (4) 求得的临界荷载, 但误差不超过 15%.

4 结 论

(1) 基于一般撑杆式预应力钢压杆正对称和反对称两个基本屈曲模态, 给出了相应的完备屈曲形态函数, 并推导得到相应的临界荷载计算公式.

(2) 取形态函数模拟项数为预应力钢压杆节间数, 计算得到的临界荷载可以很好的满足工程精度.

(3) 给出了不对称屈曲的形态函数.

参 考 文 献

1 de Andrade SAL, Vellasco PCGdaS, da Silva JGS. Sistema

- construtivo e montagem estrutural do palco principal do Rock in Rio III. *Constr Mag*, 2003, 7: 30-35 (in Portuguese)
- 2 de Andrade SAL, Vellasco PCGdaS, da Silva JGS. Concepção e projecto estrutural do palco principal do Rock in Rio III. *Constr Mag*, 2003, 6: 4-11 (in Portuguese)
- 3 Hafez HH, Temple MC, Ellis JS. Pretensioning of single-crossarm stayed columns. *J Struct Div ASCE*, 1979, 105(2): 359-375
- 4 Chan SL, Shu G, Lv Z. Stability analysis and parametric study of pre-stressed stayed columns. *Eng Struct*, 2002(24): 115-124
- 5 Saito D, Wade MA. Post-buckling behaviour of prestressed steel stayed columns. *Engineering Structures*, 2008, 30(5): 1224-1239
- 6 Saito D, Wade MA. Buckling behaviour of prestressed steel stayed columns with imperfections and stress limitation. *Engineering Structures*, 2009, 31(2): 1-15
- 7 Saito D, Wade MA. Numerical studies of interactive buckling in prestressed steel stayed columns. *Engineering Structures*, 2009, 31(3): 432-443
- 8 de Araujo RR, et al. Experimental and numerical assessment of stayed steel columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008, 64: 1020-1029
- 9 陆赐麟, 刘锡良, 尹思明. 现代预应力钢结构. 北京: 人民交通出版社, 2006. 75-93
- 10 朱晶晶. 预应力钢压杆初始预应力取值研究. [硕士论文]. 镇江: 江苏科技大学, 2009 (Zhu Jingjing. Research on initial prestress value of steel stayed columns. [Master Thesis]. Zhenjiang: Jiangsu University of Science and Technology, 2009 (in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

(上接第 61 页)

- 2 郑淑飞, 丁桦. 基于变形修正的局部刚体化动力模型简化方法. *力学与实践*, 2008, 30(6): 31-34 (Zheng Shufei, Ding Hua. A model reduction method for dynamic analysis based on deformation modification and local rigid body mode. *Institution of Mechanics. Mechanics in Engineering*, 2008, 30(6): 31-34 (in Chinese))
- 3 郑淑飞. 基于变形修正的局部刚体化动力模型简化方法及应用. [硕士论文]. 北京: 中国科学院力学研究所, 2009 (Zheng Shufei. A model reduction method and its application for dynamic analysis based on deformation modification and local rigid body mode. [Master Thesis]. Beijing: Institution of Mechanics, Chinese Academy of Science, 2009 (in Chinese))
- 4 辛柯维奇, 泰勒. 有限单元方法 (第 5 版). 北京: 清华大学出版社, 2008
- 5 徐荣桥. 结构分析的有限元法与 MATLAB 程序设计. 北京: 人民交通出版社, 2006
- 6 张亚辉, 林家浩. 结构动力学基础. 大连: 大连理工大学出版社, 2007
- 7 廖振鹏, 刘晶波. 离散网格中的弹性波动 (1). *地震工程与工程振动*, 1986, 6(2): 1-16 (Liao Zhenpeng, Liu Jingbo. Elastic wave motion in discrete grids(1). *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1986, 6(2): 1-16 (in Chinese))
- 8 刘晶波. 波动的有限元模拟及复杂场地对地震动的影响. [博士论文]. 国家地震局工程力学研究所, 1990 (Liu Jingbo. Wave motion in the finite element simulation and the influence of complex field on the earthquake motion. [PhD Thesis]. Beijing: Institution of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, 1990 (in Chinese))
- 9 廖振鹏. 近场波动问题的有限元解法. *地震工程与工程振动*, 1984, 4(2): 1-14 (Liao Zhenpeng. The finite element method of near-field wave motion problem. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1984, 4(2): 1-14 (in Chinese))
- 10 宗福开. 波传播问题中有限元分析的频散特性及离散化准则. *爆炸与冲击*, 1984, 4(4): 16-21 (Zong Fukai. Frequency-dispersion characteristic and discretization of the finite element analysis in wave propagation problems. *Explosion and Shock Waves*, 1984, 4(4): 16-21 (in Chinese))
- 11 廖振鹏. 近场波动的数值模拟. *力学进展*, 1997, 27(2): 193-213 (Liao Zhenpeng. Numerical simulation of near-field wave motion. *Advances in Mechanics*, 1997, 27(2): 193-213 (in Chinese))
- 12 华容. 信号分析与处理. 北京: 高等教育出版社, 2004

(责任编辑: 刘希国)