第 31 卷 第 2 期
2010 年 4 月
固体力学学报
CHINESE JOURNAL OF SOLID MECHANICS
Vol. 31 No. 2
April 2010

# 极分解的一类近似计算与比较*

王 足[1**] 兑关锁[1] 王志乔[2]
([1]北京交通大学力学系, 北京, 100044) ([2]中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

摘 要 基于级数展开给出了极分解中右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的级数表示, 通过对级数项的选取得到右伸长张量的不同近似表达式. 针对不同级数展开表示, 得到表达式最小误差的级数展开形式. 进而结合一些简单实例, 验证了近似公式的有效性. 最后与文献[1]关于计算右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的近似表达式进行了比较, 本文的级数展开方式得到的右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的近似表达式不但简洁, 而且计算精度更高、适用范围更广.

关键词 级数展开, 极分解, 伸长张量, 转动张量, 近似表达

## 0 引言

在连续介质有限变形理论中, 转动张量和伸长张量的求解占有重要的位置. 对于连续变形, 变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的极分解表示为:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{R} \tag{1}$$

式中正交张量 $\boldsymbol{R}$ 为转动张量, 对称正定张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别为右、左伸长张量.

已知变形梯度 $\boldsymbol{F}$, 确定相应的转动张量和伸长张量的工作仅在二维情况下可获得简单形式表示[2]. 对于三维空间问题, $\boldsymbol{F}$ 的极分解计算一直被认为是一个相当复杂的问题. 文献[3-6]等给出了 $\boldsymbol{U}$ 的显示表达, 文献[7]给出了转轴与转角的计算公式, 其中需要计算的伸长张量不变量的表示式不便在实际计算中应用. 文献[8]采用工程界通常采用的变形梯度张量的加法分解形式, 得到了三维空间中极分解的转动张量和伸长张量的直接表示, 但是所给出的伸长张量的准确表达式比较冗长, 给直接应用带来不便.

文献[1]利用伸长张量的特征值和 Biot 主应变特征值的关系, 针对 $\varepsilon^3\ll 1$ 的中等变形问题, 将伸长张量的不变量的表达式进行近似, 代入用 $\boldsymbol{C}$ 来表示的 $\boldsymbol{U}$ 的显示表达, 得到了近似的表达式. 但是得到的表达式比较复杂, 而且适用范围很小. 因此寻求伸长张量形式简洁、计算方便的表达式是非常必要的. 本文采用幂级数展开的方式得到右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的近似表达, 并通过实例与文献[1]的近似方法作了比较.

## 1 右伸长张量的表示

根据 Cayley-Hamilton 定理, 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 满足[9]:

$$\boldsymbol{U}^3-i_1\boldsymbol{U}^2+i_2\boldsymbol{U}-i_3\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

其中 $i_1$, $i_2$ 和 $i_3$ 分别称为 $\boldsymbol{U}$ 的第一、第二和第三主不变量.

根据式(2)能够推导出右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的表达式:

$$\boldsymbol{U}=(i_1i_2-i_3)^{-1}[i_1i_3\boldsymbol{I}+(i_1^2-i_2)\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^2] \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}^2$ 为右 Cauchy-Green 变形张量.

$\boldsymbol{U}$ 的三个不变量与右 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$ 的三个不变量 $I_1$, $I_2$ 和 $I_3$ 的关系为[10]:

$$\begin{cases} i_1=\sqrt{I_1+2i_2} \\ i_2=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{I_3}\lambda^3+I_2\lambda^2-I_3}+\sqrt{I_3}}{\lambda} \\ i_3=\sqrt{I_3} \end{cases} \tag{4}$$

其中:

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[I_1+2(I_1^2-3I_2)^{1/2}\cos\left(\dfrac{1}{3}\phi\right)\right]^{1/2} \\ \phi=\arccos\left[\dfrac{2I_1^3-9I_1I_2+27I_3}{2(I_1^2-3I_2)^{3/2}}\right] \end{cases} \tag{5}$$

文献[1]考虑到实际中许多几何非线性问题往往是以小变形、中等转动或中等变形、大转动的形式出现, 而伸长张量的三个特征值反映的是物质点处三个应变主轴方向的物质线元伸长比, 当中等变形

* 国家自然科学基金项目(10772021, 90205007)资助.
2009-07-24 收到第 1 稿, 2009-10-24 收到修改稿.
** 通讯作者. Tel: 010-51684072, E-mail: 04115220@bjtu.edu.cn.

问题满足 $\varepsilon^3 \ll 1$, 右伸长张量的不变量可写成下面的形式:

$$\begin{cases} i_1 = 2 + \left(\dfrac{I_2 - 1}{2}\right)^{1/2} \\ i_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{I_3 - I_1}{4} + (2I_2 - 2)^{1/2} \\ i_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{I_3 - I_1}{4} + \left(\dfrac{I_2 - 1}{2}\right)^{1/2} \end{cases} \tag{6}$$

则将式(6)代入右伸长张量的表达式(3)可得:

$$\boldsymbol{U} = \left\{\left[\frac{3}{2} + \frac{I_3 - I_1}{4} + \left(\frac{9}{2} + \frac{I_3 - I_1}{4}\right)\left(\frac{I_2 - 1}{2}\right)^{1/2} + I_2\right]\right\}^{-1} \cdot \left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{I_3 - I_1}{2} + \left(\frac{5}{2} + \frac{I_3 - I_1}{4}\right)\left(\frac{I_2 - 1}{2}\right)^{1/2} + \frac{I_2}{2}\right]\boldsymbol{I} + \left[2 - \frac{I_3 - I_1}{4} + 2\left(\frac{I_2 - 1}{2}\right)^{1/2} + \frac{I_2}{2}\right]\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^2\right\} \tag{7}$$

转动张量 $\boldsymbol{R}$ 可由式(1)得到:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{U} \tag{8}$$

## 2 右伸长张量的级数展开近似表示

对于各向同性张量函数 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})$ 可以写成[11]:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = \phi_0 \boldsymbol{I} + \phi_1 \boldsymbol{A} + \phi_2 \boldsymbol{A}^2 \tag{9}$$

这里标量 $\phi_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的主不变量函数 $\phi_k = \varphi_k(\mathrm{I}_A, \mathrm{II}_A, \mathrm{III}_A)$, 其中 $\mathrm{I}_A$, $\mathrm{II}_A$ 和 $\mathrm{III}_A$ 表示张量 $\boldsymbol{A}$ 的主不变量; 同时 $\phi_k$ 也是 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})$ 的不变量.

由于右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 是右 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}$ 的平方根, 即:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}^{1/2} \tag{10}$$

所以 $\boldsymbol{U}$ 是张量 $\boldsymbol{C}$ 的各向同性张量值函数. 那么右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的各向同性表示为:

$$\boldsymbol{U} = \phi_0 \boldsymbol{I} + \phi_1 \boldsymbol{C}_\alpha + \phi_2 \boldsymbol{C}_\alpha^2 \tag{11}$$

式中 $\alpha$ 为任意常标量, $\boldsymbol{C}_\alpha = \boldsymbol{C} - \alpha\boldsymbol{I}$.

根据张量函数的开方定义和泰勒级数的展开公式, 有:

$$\boldsymbol{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}(\alpha\boldsymbol{I})^{1/2-n}\boldsymbol{C}_\alpha^n \tag{12}$$

若对式(12)只保留 $n$ 项, 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 级数展开的误差 $\varepsilon$ 表示为:

$$\varepsilon = \sqrt{\mathrm{tr}(R_n(\boldsymbol{C}))^2} = |a_n| \sqrt{\mathrm{tr}[(\xi^{-2})^{1/2+n}(\boldsymbol{C}_\alpha^2)^{n+1}]} \tag{13}$$

式中 $\xi$ 表示特征值介于 1 和 $2\alpha$ 之间的张量, $R_n(\boldsymbol{C})$ 表示式(12)级数展开部分的拉格朗日型余项, $a_n = [1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n)]/(n+1)!$. 式(12)若收敛, 要求 $\boldsymbol{C}$ 的特征值介于 0 和 $2\alpha$ 之间.

由式(13)可以看出, 针对给定的 $n$, 其中 $|a_n|$ 是级数展开共同的有界量. 而对于任意的 $\alpha$, $\mathrm{tr}(\xi^{-2}) \leqslant 3$ 总成立.

因此误差的判别关键是看 $f(\alpha) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_\alpha^2)$ 这个标量值函数在 $\alpha$ 为何值时能够取得极值. 而可知 $\alpha = I_1/3$, 即 $\boldsymbol{C}_\alpha = \boldsymbol{C} - I_1\boldsymbol{I}/3$ 为对称二阶张量的偏斜张量函数时, $f(\alpha)$ 存在极小值, 公式(12)得到的级数展开公式收敛速度较快, 展开相同项, 误差最小.

假设偏斜张量函数 $\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} - I_1\boldsymbol{I}/3$, 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的各向同性表示为:

$$\boldsymbol{U} = \phi_0\boldsymbol{I} + \phi_1\overline{\boldsymbol{C}} + \phi_2\overline{\boldsymbol{C}}^2 \tag{14}$$

其主不变量 $J_1$, $J_2$ 和 $J_3$ 可写为:

$$J_1 = 0, \quad J_2 = I_2 - \frac{1}{3}I_1^2, \quad J_3 = \frac{2}{27}I_1^3 - \frac{1}{3}I_1 I_2 + I_3 \tag{15}$$

式(14)中不变量 $\phi_0$, $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 的表达式:

$$\begin{cases} \phi_0 = \left(\dfrac{3}{I_1}\right)^{1/2}\left[\dfrac{I_1}{3} + \dfrac{9}{16}I_1^{-2}J_3 - \dfrac{567}{256}I_1^{-4}J_2J_3 + \cdots\right] \\ \phi_1 = \left(\dfrac{3}{I_1}\right)^{1/2}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{16}I_1^{-2}J_2 - \dfrac{135}{128}I_1^{-3}J_3 + \dfrac{567}{256}I_1^{-4}J_2^2 + \cdots\right] \\ \phi_2 = \left(\dfrac{3}{I_1}\right)^{1/2}\left[-\dfrac{3}{8}I_1^{-1} + \dfrac{135}{128}I_1^{-3}J_2 + \dfrac{567}{256}I_1^{-4}J_3 + \cdots\right] \end{cases} \tag{16}$$

其中张量 $\boldsymbol{C}$ 的特征值满足:

$$0 \leqslant \lambda_{C_i} \leqslant \frac{2}{3}I_1 \tag{17}$$

针对工程中的一般形变, 这里取不变量表达式的前 4 项, 将式(15)和(16)代入公式(14)得到右伸长张量的近似表达式, 得到:

$$\boldsymbol{U} = \left(\frac{3}{I_1}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{I_1}{3} + \frac{9}{16}I_1^{-2}J_3\right)\boldsymbol{I} + \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{16}I_1^{-2}J_2\right)\overline{\boldsymbol{C}} - \frac{3}{8}I_1^{-1}\overline{\boldsymbol{C}}^2\right] \tag{18}$$

进一步, 如果取不变量表达式的前 3 项, 式(14)简化为:

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{I_1}\right)^{1/2}(I_1\boldsymbol{I} + 6\boldsymbol{C} - 3I_1^{-1}\boldsymbol{C}^2) \tag{19}$$

## 3 计算实例

下面通过三个不同实例, 分别说明级数展开得到的近似表达式在不同 $\alpha$ 时的近似程度, 并与公式(7)进行分析比较.

例 1 简单的剪切变形的例子

考虑简单的剪切变形情况. 单位基向量为$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, 相应的变形梯度可以写为:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + k_0 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2$$

这里 $k_0$ 是切应变.

选定 $k_0 = 0.5$, 表 1 给出 $\alpha = I_1/3$ 和 $\alpha = 1$ 两种情况下取前 4 项(即 $n = 3$)时右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的误差和近似表达. 表 2 给出取前 3 项时右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的误差和近似表达.

**表 1**　右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 采用不同级数展开 $n = 3$ 时的误差比较

Table 1　The error comparison of right strech tensor $\boldsymbol{U}$ expanded by different series when $n = 3$

| 标量 α | 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的近似表达式 | 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的精确表达式 | 转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的近似表达式 | 转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的精确表达式 |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 1$ | $\begin{pmatrix} 0.9727 & 0.2441 & 0 \\ 0.2441 & 1.0947 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.9701 & 0.2425 & 0 \\ 0.2425 & 1.0914 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.9727 & 0.2441 & 0 \\ -0.2422 & 0.9727 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.9701 & 0.2425 & 0 \\ -0.2425 & 0.9701 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ |
| 误差 | 0.0047 | | $1.2993\times 10^{-5}$ | |
| $\alpha = \frac{I_1}{3}$ | $\begin{pmatrix} 0.9723 & 0.2425 & 0 \\ 0.2425 & 1.0935 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | | $\begin{pmatrix} 0.9723 & 0.2425 & 0 \\ -0.2436 & 0.9723 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | |
| 误差 | 0.0030 | | $8.1862\times 10^{-6}$ | |

**表 2**　右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 采用不同级数展开 $n = 2$ 时的误差比较

Table 2　The error comparison of right strech tensor $\boldsymbol{U}$ expanded by diffterent series when $n = 2$

| 标量 α | 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的近似表达式 | 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的精确表达式 | 转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的近似表达式 | 转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的精确表达式 |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 1$ | $\begin{pmatrix} 0.9688 & 0.2344 & 0 \\ 0.2344 & 1.0859 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | | $\begin{pmatrix} 0.9688 & 0.2344 & 0 \\ -0.2500 & 0.9688 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | |
| 误差 | 0.0128 | $\begin{pmatrix} 0.9701 & 0.2425 & 0 \\ 0.2425 & 1.0914 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | $9.4700\times 10^{-5}$ | $\begin{pmatrix} 0.9701 & 0.2425 & 0 \\ -0.2425 & 0.9701 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ |
| $\alpha = \frac{I_1}{3}$ | $\begin{pmatrix} 0.9723 & 0.2426 & 0 \\ 0.2426 & 1.0901 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | | $\begin{pmatrix} 0.9723 & 0.2356 & 0 \\ -0.2506 & 0.9723 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$ | |
| 误差 | 0.0102 | | $9.8966\times 10^{-5}$ | |

从表 1 和表 2 可以看出, 展开相同项, 对于右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的近似表达, $\alpha = I_1/3$ 时展开级数的误差比 $\alpha = 1$ 时展开的误差小. 而 $\alpha = I_1/3$ 时级数展开得到的近似表达式比较简洁.

下面给出 $\alpha = I_1/3$ 时的级数展开得到的近似表达式与文献[1]得到表达式的误差对比.

例 2　小变形中等转动情况

文献[1]中的例子. 初始构形和当前构形的坐标系$\{X^i\}$和$\{x^i\}$都选为同一个直角坐标系, 变形梯度具有分量:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 1.04 & -0.4 & -0.2 \\ 0.5 & 0.98 & 0.13 \\ 0.2 & 0.15 & 0.97 \end{pmatrix}$$

将关于右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的近似表达式(7)及本文公式(18)和(19)比较, 以及由此得到的转动张量的近似表达式及误差, 见表 3.

表 **3** 两种近似方法的近似表达式与实际误差比较

Table 3 The error comparison of the two approximate expressions

| 展开项 | $n=2$ | $n=3$ | 公式(7) |
|---|---|---|---|
| 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的近似表达式 | $\begin{pmatrix} 1.1704 & 0.0193 & 0.0232 \\ 0.0193 & 1.0685 & 0.0296 \\ 0.0232 & 0.0296 & 0.9985 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.1708 & 0.0194 & 0.0233 \\ 0.0194 & 1.0685 & 0.0297 \\ 0.0233 & 0.0297 & 0.9982 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.1708 & 0.0193 & 0.0232 \\ 0.0193 & 1.0685 & 0.0297 \\ 0.0232 & 0.0297 & 0.9983 \end{pmatrix}$ |
| 误差 | $5.4201\times 10^{-4}$ | $6.0582\times 10^{-5}$ | $9.6979\times 10^{-5}$ |
| 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的精确表达式 | | $\begin{pmatrix} 1.1708 & 0.0193 & 0.0232 \\ 0.0193 & 1.0685 & 0.0297 \\ 0.0232 & 0.297 & 0.9982 \end{pmatrix}$ | |
| 转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的近似表达式 | $\begin{pmatrix} 0.8986 & -0.3848 & -0.2099 \\ 0.4100 & 0.9071 & 0.0935 \\ 0.1542 & -0.1704 & 0.9736 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.8989 & -0.3848 & -0.2098 \\ 0.4102 & 0.9072 & 0.0937 \\ 0.1543 & -0.1703 & 0.9733 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.8989 & -0.3848 & -0.2099 \\ 0.4102 & 0.9072 & 0.0937 \\ 0.1543 & -0.1703 & 0.9733 \end{pmatrix}$ |
| 误差 | $5.0362\times 10^{-4}$ | $2.2143\times 10^{-9}$ | $7.3138\times 10^{-9}$ |
| 转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的精确表达式 | | $\begin{pmatrix} 0.8988 & -0.3848 & -0.2098 \\ 0.4102 & 0.9072 & 0.0937 \\ 0.1543 & -0.1703 & 0.9732 \end{pmatrix}$ | |

从表 3 可见, 对于级数展开的近似表达式, 虽然在 $n=2$ 时得到的误差比文献[1]中近似表达式的误差大, 但其表达式(19)远比公式(7)简洁. 如果在进行级数展开时增加一项, 即在 $n=3$ 时得到的误差就小于文献[1]中近似表达式的误差, 而且此时的表达式(18)仍远比公式(7)简洁.

这两种近似方法关于大变形情况的对比分析见例 3.

例 3 大变形

初始构形和当前构形的坐标系$\{X^i\}$和$\{x^i\}$都选为同一个直角坐标系, 变形梯度具有分量:

$$F_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

同样级数展开取前 4 项和前 3 项, 则二者误差比较见表 4.

表 **4** 两种近似方法的近似表达式与实际误差比较

Table 3 The error comparison of the two approximate expressions

| 展开项 | $n=2$ | $n=3$ | 公式(7) |
|---|---|---|---|
| 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的近似表达式 | $\begin{pmatrix} 3.0882 & 0.5834 & 0.3338 \\ 0.5834 & 2.8477 & 0.7939 \\ 0.3338 & 0.7939 & 3.9753 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3.0924 & 0.6235 & 0.3639 \\ 0.6235 & 2.8418 & 0.8540 \\ 0.3639 & 0.8540 & 4.0496 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.9016 & -0.0542 & -0.0500 \\ -0.0542 & 0.9067 & -0.0886 \\ -0.0500 & -0.0886 & 0.7947 \end{pmatrix}$ |
| 误差 | 0.1176 | 0.0534 | 4.6651 |
| 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的精确表达式 | | $\begin{pmatrix} 3.0795 & 0.6294 & 0.3475 \\ 0.6294 & 2.8084 & 0.8466 \\ 0.3475 & 0.8466 & 4.0203 \end{pmatrix}$ | |
| 转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的近似表达式 | $\begin{pmatrix} 0.5038 & -0.8938 & 0.1528 \\ 0.8615 & 0.4924 & 0.0603 \\ -0.1319 & 0.0754 & 0.9787 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.4921 & -0.8766 & 0.1435 \\ 0.8667 & 0.5000 & 0.0735 \\ -0.1257 & 0.0885 & 0.9940 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.2197 & -0.3718 & 0.0999 \\ 0.2273 & 0.1059 & -0.0500 \\ -0.0693 & -0.0486 & 0.2112 \end{pmatrix}$ |
| 误差 | 0.0015 | $2.5983\times 10^{-4}$ | 0.9206 |
| 转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的精确表达式 | | $\begin{pmatrix} 0.4854 & -0.8631 & 0.1398 \\ 0.8647 & 0.4975 & 0.0692 \\ -0.1293 & 0.0873 & 0.9878 \end{pmatrix}$ | |

从这个实例可以看出，计算右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 时，级数展开法得到的近似表达式的误差很小，而由公式(7)所得到的近似表达的误差远大于级数展开公式(18)和(19)的误差，其精度根本不能满足近似表达右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的要求，这主要是因为右 Cauchy-Green 张量的特征值分别为 4.6753，9.3566 和 21.9680，已经超出了文献[1]近似的前提，但是却还在级数收敛的范围之内.

综上可以看出，对右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 进行近似求解的时候，如果满足上面提及二种近似方法的前提，文献[1]中近似方法的误差是固定的，无法改进，而级数展开的近似方法通过适当增加级数展开的项数，得到比文献[1]的方法精度更高的近似表达式；同时，文献[1]中近似方法比级数展开近似方法要求有更苛刻的前提条件，级数展开近似方法应用更为广泛. 实例证明，采用级数展开近似方法时，一般取前 4 项就能够获得很好的精度，而且此时的近似表达式远远比文献[1]的表达式简洁.

## 4　结论

本文基于各向同性函数的各向同性表示，通过级数展开的方式给出了右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 和转动张量 $\boldsymbol{R}$ 的近似表达，进而给出了级数收敛速度较快的级数展开的形式，以及简单的各向同性表示. 最后还与文献[1]的近似方法进行了对比，发现截取前 4 项不变量的各向同性表示得到的近似表达式不但形式简洁，计算简便，而且适用范围广. 而对于精度的要求可以由增加展开的项数调整到所要求的范围. 各向同性表示的近似表达为工程上计算伸长张量提供了一个简单而实用的计算方法.

## 参考文献

[1] 黄模佳，李鸣，扶名福. 关于几种新的极分解计算方法[J]. 固体力学学报，1999，20(1)：26-34. (Huang M J, Li M, Fu M F. Several new methods of polar decomposition computation [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1999, 20(1): 26-34. (in Chinese))

[2] 陈至达. 有理力学[M]. 徐州：中国矿业学院出版社，1988. (Chen Zhida. Rational Mechanics [M]. Xuzhou: China Institute of Mining and Technology Press, 1988. (in Chinese))

[3] Ting T C. Determination of $\boldsymbol{C}^{1/2}$ and $\boldsymbol{C}^{-1/2}$ more general isotropic tensor functions of $\boldsymbol{C}$[J]. Journal of Elasticity, 1985, 15: 319-385.

[4] Hoger A, Carlson D E. Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1984, 42: 113-117.

[5] Sawyers K. Comments on the paper "Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient" by A Hoger and D E Carlson[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1986, 44: 309-311.

[6] Xiong Z H, Zheng Q S. General algorithms for the polar decomposition and strains[J]. Acta Mechanica Sinica, 1988, 4: 175-181.

[7] 兑关锁，左晓宝. 主转动角与主转动轴的显式表示[J]. 应用数学和力学，1999，20(6)：613-618. (Dui G S, Zuo X B. The explicit representation to the principal rotation angle and the principal rotation axis [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1999, 20(6): 613-618. (in Chinese))

[8] 王文标，段祝平. 变形梯度张量极分解中转动张量的直接表示及其应用[J]. 固体力学学报，1992，13(4)：285-291. (Wang W B, Duan Z P. The exact representation of the rotation tensor in polar decomposition of deformation gradient and its applications [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1992, 13(4): 285-291. (in Chinese))

[9] 黄筑平. 连续介质力学基础[M]. 北京：高等教育出版社，2003. (Huang Zhuping. Fundamentals of Comtinuum Mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2003. (in Chinese))

[10] Dui G S. Determination of the rotation tensor in the polar decomposition[J]. Journal of Elasticity, 1998, 50: 197-208.

[11] Alan D. Freed representing tensor functions with a cholesky transform [J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 1999, 4: 169-181.

# A CLASS OF APPROXIMATE CALCULATION OF POLAR DECOMPOSITION AND THE CORRESPONDING COMPARISON

Zu Wang[1] Guansuo Dui[1] Zhiqiao Wang[2]

([1]*Department of Mechanics, Beijing Jiaotong University, Beijing*, 100044)

([2]*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing*, 100080)

**Abstract** Based on the series expansion, the series forms of right stretch tensor in polar decomposition are given, and the different approximate expressions of right stretch tensor are obtained by selecting different number of series terms. From the different expressions, the series expansion with the least error is found. The effectiveness of the approximate expression is verified using some simple examples. Compared with the approximate expressions of right stretch tensor $\boldsymbol{U}$ and rotation tensor $\boldsymbol{R}$ proposed by Ref. [1], the approximate expressions of right stretch tensor $\boldsymbol{U}$ and rotation tensor $\boldsymbol{R}$ given in this paper are of simple forms, high accurate and widely applicability.

**Key words** series expansions, polar decomposition, stretch tensor, rotation tensor, approximate expressions