

支承弹簧对输液曲管固有频率和极限流速的影响^{*}

INFLUENCE OF SUPPORT SPRING ON NATURAL FREQUENCY AND LIMIT VELOCITY OF CURVED PIPE CONVEYING FLUID

张敦福^{**1} 康英永^{***2} 牛海燕^{****1}

(1. 山东大学 土建学院, 济南 250061)

(2. 中国科学院力学研究所 生物力学与生物工程中心, 北京 100190)

ZHANG DunFu¹ KANG YingYong² NIU HaiYan¹

(1. School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

(2. Center for Biomechanics and Bioengineering, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

摘要 基于Hamilton变分原理, 导出具有弹性支撑的 $1/4$ 圆形输液曲管的变分—积分方程。采用多个函数组合的方法, 选取满足边界条件的试函数, 利用Galerkin直接法求出系统的固有频率和极限流速的近似解析公式。数值结果表明, 弹簧对固有频率和极限流速都有显著影响。根据数值结果, 用最小二乘法给出固有频率和极限流速与弹簧刚度的关系公式。

关键词 支承弹簧 输液曲管 Galerkin直接法 固有频率 极限流速

中图分类号 O353 TE832 TH135

Abstract Based on Hamilton variation principle, the variational integration equations of a quad circle curved pipe conveying fluid with spring support were derived. Multi function combination method was employed. The test function satisfied boundary conditions were selected. The approximate analytic formulae of natural frequency and limit velocity were presented by Galerkin direct method. The numerical results illustrate that the spring has be of notable influence on natural frequency and limit velocity. According to the upwards numerical results, relation formulae of natural frequency and limit velocity along with spring modulus are presented by use of the least square method.

Key words Support spring; Curved pipe conveying fluid; Galerkin direct method; Natural frequency; Limit velocity

Corresponding author: ZHANG DunFu, E-mail: zhangdf@sdu.edu.cn, Tel: + 86-531-86358376, Fax: + 86-531-88392672

The project supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 50979052), and the Natural Science Foundation of Shandong Province of China(No. 2009ZRB02223).

Manuscript received 20081113, in revised form 20090220.

引言

输液管道被广泛应用于航空、航天、核动力工程、石油化工、船舶、能源和机械等领域。内流能引起管道的振动, 其中很重要的一种是输液管道的弯曲振动。对于输液曲管, 内流引起曲管弯曲振动, 同时还有扭转振动, 构成弯曲—扭转—流体三相耦合的动力学问题, 解耦而单独求出弯曲和扭转的解析解非常困难。

Feodosiev^[1]、Housner^[2]、Weaver^[3]对载流直管用不同的方法导出相同的运动微分方程。Chen S S在1972年用牛顿法推导了规则曲管的运动方程^[4], Chen S S又在1973年用哈密顿原理推导了规则曲管的运动方程^[5]。

王忠民^[6]、孙建刚^[7]、王世忠^[8]、王本利^[9]、李琳^[10]、张敦福^[11]分别用模态分析法、有限元法、摄动法及Galerkin直接法对不同支撑下的载流直管进行分析

* 20081113收到初稿, 20090220收到修改稿。国家自然科学基金(50979052)、山东省自然科学基金(2009ZRB02223)资助。

** 张敦福, 男, 1963年8月生, 山东省金乡县, 汉族。山东大学副教授, 博士, 主要从事计算力学、系统动力学分析、裂隙岩体破裂及应用研究。

*** 康英永, 男, 1986年1月生, 河南省杞县人, 汉族。中国科学院力学研究所生物力学与生物工程中心研究生, 研究方向为生物力学、生物组织宏观力学性质预测。E-mail: kangyingyong@yahoo.com.cn

**** 牛海燕, 男, 1984年10月生, 河南省新乡市人, 汉族。山东大学土建学院固体力学研究生, 研究方向为结构强度、裂纹扩展及锚固效应研究。E-mail: niuhaiyan0348@mail.sdu.edu.cn

研究, 得到极限流速的数值结果和近似解析解。

魏发远^[12]用迁移矩阵法计算两端固定的半圆形输液曲管的临界流速, 计算结果与 Chen S S 的结果相比偏小。张敦福^{[13][14][10][114]}用 Galerkin 直接法导出两端固定的半圆形输液曲管和悬臂 1/4 圆形输液曲管的极限流速的近似解析公式。

在振动过程中, 输液管道中的压力受有扰动, 扰动量与流场及流体的黏性都有关, 比较复杂, 没有考虑。考虑的是定常层流, 流体速度分布状态沿输送管道的轴线方向不变, 因此, 虽然流体具有黏性, 但是没有能量消耗。

采用 Galerkin 直接法, 寻求一端固定一端具有弹性支撑的 1/4 圆输液曲管面外自由振动下固有频率、极限流速的近似解析表达式。研究弹簧刚度对固有频率和极限流速的影响。

1 力学模型及边界条件

符号定义及说明如下, φ 为扭转角, M_n 为转矩, M 为弯矩, F 为剪力, r 为曲管的平均半径, R 为中心线圆弧半径, h 为曲管的壁厚, ρ 为曲管单位长度的密度, ρ_0 为流体的单位长度的密度, J_0 为单位长度的转动惯量, EI 为弯曲刚度, GJ 为扭转刚度 ($J = 2\pi r^3 h$), α 为切向倾斜角 (扭转引起), l 为曲管中心线的弧长, o 为坐标原点, x 、 y 分别为水平和铅垂坐标 (铅垂坐标值 y 即为输液曲管面外的挠度), θ 为环向坐标, k 为支承弹簧刚度。

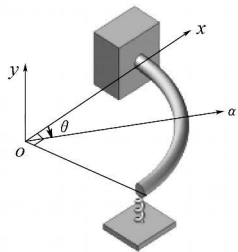


图 1 1/4 圆形输液曲管

Fig.1 A quad circle curved pipe conveying fluid

在微小变形假设下, 由变形几何关系和物理关系, 得

$$EI \left[\frac{d\alpha}{dl} + \frac{\varphi}{R} \right] = M \quad (1)$$

$$GJ \left[\frac{d\varphi}{dl} - \frac{1}{R} \frac{dy}{dl} \right] = M_n \quad (2)$$

$$\left[\frac{dM}{dl} + \frac{M_n}{R} \right] = F \quad (3)$$

其中 $\alpha = \frac{dy}{dl}$ $dl = R d\theta$

位移边界条件

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 & y'(0, t) = 0 \\ \varphi(0, t) = 0 & \varphi'(0, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $()'$ 代表对环向坐标 θ 的一阶导数, t 为时间。

力边界条件

$$\begin{cases} M_n(\pi/2, t) = 0 & M(\pi/2, t) = 0 \\ F(\pi/2, t) = ky(\pi/2, t) \end{cases} \quad (5)$$

2 变分 — 积分方程

系统动能由曲管弯曲动能、扭转动能和流体动能组成

$$T = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \rho R \dot{y}^2 d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} J_0 R \dot{\varphi}^2 d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \rho_0 R \left[u^2 + \left[\dot{y} + \frac{u}{R} \dot{y}' \right]^2 \right] d\theta \quad (6)$$

其中, u 为管道中液体的平均流速。

变形势能

$$V = \int_0^{\pi/2} \frac{EI}{2} \left[\frac{1}{R^2} y'' + \frac{1}{R} \varphi' \right]^2 R d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{GJ}{2} \left[\frac{1}{R^2} \varphi' - \frac{1}{R^2} \dot{y}' \right]^2 R d\theta + \frac{1}{2} ky^2(\pi/2, t) \quad (7)$$

将式 (6) 和式 (7) 代入 Hamilton 积分 — 变分方程^[15]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (8)$$

其中, t_1, t_2 为时间 t 的端点值。

并注意时间端点条件

$$\delta y|_{t_1} = \delta y|_{t_2} = \delta \varphi|_{t_1} = \delta \varphi|_{t_2} = 0 \quad (9)$$

和微分 — 变分关系

$$\delta y = \frac{d}{dt} \delta y \quad \delta y' = \frac{d}{d\theta} \delta y \quad (10)$$

对式 (8) 进行分步积分。

引入如下的参考量, 中心线圆弧半径 R 为长度参

考量, 时间参考量 $T_0 = \sqrt{\frac{(\rho + \rho_0) R^4}{EI}}$ 和速度参考量

$$U_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho_0 R^2}}$$

进行无量纲化处理, 并记

$$z = \frac{y}{R} \quad \tau = \frac{t}{T_0} \quad u_0 = \frac{u}{U_0} \quad k_e = \frac{kR^3}{EI}$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho + \rho_0}} \quad k_1 = \frac{GJ}{EI} \quad k_2 = \frac{J_0}{(\rho + \rho_0) R^2}$$

其中, z, τ, u_0, k_e 分别为无量纲挠度、时间、流速和比例弹簧刚度, k_0, k_1, k_2 为比例参数。

无量纲化处理, Galerkin 直接法列式为

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^{\pi/2} (N_1 \delta z + N_2 \delta \varphi) d\theta d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-N_3 + N_4 + N_5) |_0^{\pi/2} d\tau +$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} k_e z(\pi/2, \tau) \delta z(\pi/2, \tau) d\tau = 0 \quad (11)$$

其中,

$$N_1 = z'''' + (1 + k_1) \varphi'' + (u_0^2 - k_1) z'' + 2u_0 k_0 z' + \dot{z}$$

$$N_2 = (1 + k_1) z'' - k_1 \varphi'' + \varphi + k_2 \dot{\varphi}$$

$$N_3 = (k_0 u_0 z + u_0^2 z') \delta$$

$$N_4 = (z'' + \varphi) \delta' - (z'''' + \varphi) \delta$$

$$N_5 = k_1 (\varphi - z') \delta (\varphi - z)$$

3 试函数

将边界条件进行无量纲化处理, 可得

$$z(0, \tau) = z'(0, \tau) = 0 \quad (12)$$

$$\varphi(0, \tau) = \varphi'(0, \tau) = 0 \quad (13)$$

$$z''(\pi/2, \tau) + \varphi(\pi/2, \tau) = 0 \quad (14)$$

$$\varphi'(\pi/2, \tau) = z'(\pi/2, \tau) \quad (15)$$

$$z''(\pi/2, \tau) + \varphi(\pi/2, \tau) = k_e z(\pi/2, \tau) \quad (16)$$

取扭转角试函数 φ 为

$$\varphi = q_1(\tau) \varphi_1 + q_2(\tau) \varphi_2 + \dots \quad (17)$$

其中, q_1, q_2 为振子函数, φ_1, φ_2 为扭转振型函数。

$$\varphi_1 = \sum_{1,3,5,7} B_m (1 - \cos(m\theta))$$

$$\varphi_2 = \sum_{9,11,13,15} B_m (1 - \cos(m\theta))$$

上式中, $B_m (m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)$ 为待定常数。

对薄壁细管, $k_2 \ll 1$, 于是认为 $k_2 \approx 0$, 这时扭转惯性力偶矩等于零, 即动态情况下转矩和弯矩的关系与静态情况下完全一样, 即

$$\frac{M}{R} = \frac{dM_n}{dl} \quad (18)$$

将式(1)和式(2)代入式(18), 得

$$k_1 \varphi'' - \varphi = (1 + k_1) z'' \quad (19)$$

将扭转角试函数式(17)代入式(19), 得到位移试函数

$$z = q_1 z_1 + q_2 z_2 + \dots \quad (20)$$

其中, z_1, z_2 为挠度振型函数。

$$z_1 = \frac{k_1}{1 + k_{1,1,3,5,7}} \sum B_m (1 - \cos(m\theta)) + \frac{1}{1 + k_1} \sum_{1,3,5,7} B_m \left[-\frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1 - \cos(m\theta)}{m^2} \right] \quad (21)$$

$$z_2 = \frac{k_1}{1 + k_{1,9,11,13,15}} \sum B_m (1 - \cos(m\theta)) + \frac{1}{1 + k_1} \sum_{9,11,13,15} B_m \left[-\frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1 - \cos(m\theta)}{m^2} \right] \quad (22)$$

将扭转角试函数和位移试函数代入无量纲力边界条件, 求得

$$B_1 = 1$$

$$B_3 = -\frac{5\,670k_1 + 81k_e}{7(1\,170k_1 + k_e)}$$

$$B_5 = -\frac{5\,250k_1 + 25k_e}{7(1\,170k_1 + k_e)}$$

$$B_7 = -\frac{210k_1 + 7k_e}{1\,170k_1 + k_e}$$

$$B_9 = 1$$

$$B_{11} = \frac{7\,880\,730k_1 - 79\,172\,8k_e}{14\,770\,470k_1 + 43k_e}$$

$$B_{13} = -\frac{1.377\,0 \times 10^7 k_1 + 25.335\,1k_e}{14\,770\,470k_1 + 43k_e}$$

$$B_{15} = -\frac{8.881\,3 \times 10^6 k_1 + 61.507\,9k_e}{14\,770\,470k_1 + 43k_e}$$

按以上函数组合构造的试函数能满足所有的位移边界条件和力边界条件。

4 极限流速

4.1 当取一项计算时

$$\varphi = q_1(\tau) \varphi_1 \quad z = q_1 z_1 \quad (23)$$

取泊松比 $\mu = 0.3$, 则 $k_1 = 0.769\,23$ 。

Galerkin 直接法列式为

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^{\pi/2} (N_1 z_1 + N_2 \varphi_1) \delta q_1 d\theta d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-N_{31} + N_{41} + N_{51}) \Big|_0^{\pi/2} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} k_e z(\pi/2, \tau) z_1(\pi/2) d\tau = 0 \quad (24)$$

其中

$$N_{31} = (k_0 u_0 z + u_0^2 z') z_1$$

$$N_{41} = (z'' + \varphi) z_1' - (z'''' + \varphi) z_1$$

$$N_{51} = k_1 (\varphi - z') (\varphi_1 - z_1)$$

将式(23)代入式(24), 并注意到变分 δz 和 $\delta \varphi$ 是通过变分 δq_1 实现的。由 δq_1 的任意性, 可得到时间函数的微分方程。

4.1.1 当 $k_e \rightarrow \infty$ 时, $\theta = \pi/2$ 处相当于铰链支承

由式(24), 得

$$\ddot{q}_1 + (541.476\,956\,36 - 18.126\,587\,74u_0^2) q_1 = 0 \quad (25)$$

系统的无量纲固有频率为

$$\omega_{01} = \sqrt{541.476\,956\,36 - 18.126\,587\,74u_0^2} \quad (26)$$

在式(26)中, 令 $u_0 = 0$, 得到无液体流动时系统的无量纲固有频率

$$\omega_{01} = 23.269\,657\,42 \quad (27)$$

由式(26)可以看出, 当 $u_0 > 5.465\,526\,40$ 时 ω_{01} 为纯虚数, 在式(25)的解中会出现 $e^{\beta\tau}$ ($\beta > 0$) 项; 当 $u_0 = 5.465\,526\,40$ 时, 在式(25)的解中会出现关于 τ

的线性项。这两种情况下, 管道的挠度将随时间的增加而增加, 即出现扩大现象, 系统处于不稳定状态。因此, 为了使系统处于稳定状态, 则要求 $u_0 < 5.465\ 526\ 40$ 。

这时, 定义 u_0 的上限值 u_{0max} 为无量纲极限流速

$$u_{0max} = 5.465\ 526\ 40 \quad (28)$$

4.1.2 当 $k_e = 0$ 时, $\theta = \pi/2$ 处相当于自由端

由式(24), 得

$$\ddot{q}_1 + (195.694\ 638\ 64 - 13.020\ 587\ 56u_0^2)q_1 = 0 \quad (29)$$

系统的无量纲固有频率为

$$\omega_{0n1} = \sqrt{195.694\ 638\ 64 - 13.020\ 587\ 56u_0^2} \quad (30)$$

在式(30)中, 令 $u_0 = 0$, 得到无液体流动时系统的无量纲固有频率

$$\omega_{0n1} = 13.989\ 689\ 99 \quad (31)$$

由式(30)可以得出系统的无量纲极限流速

$$u_{0max} = 3.876\ 806\ 93 \quad (32)$$

4.1.3 当 $0 < k_e < \infty$ 时

由于表达式十分复杂, 固有频率和极限流速无法用 k_e 的解析式形式表示出来, 只能采用数值计算。给定不同的弹簧刚度 k_e , 计算出系统无量纲固有频率和无量纲极限流速, 如表 1 所示。

表 1 不同 k_e 下的固有频率和极限流速

Tab. 1 Natural frequency and limit velocity with different k_e

比例弹簧刚度 Spring modulus ratio k_e	固有频率 Natural frequency ω_{0n1}	极限流速 Limit velocity u_{0max}
0	13.989 689 99	3.876 806 93
10^{-3}	13.909 680 01	3.866 806 01
1	13.841 188 11	3.846 344 05
10	12.700 082 68	3.652 946 24
10^2	15.735 577 52	4.292 677 84
500	21.778 498 31	5.279 393 75
10^3	22.555 762 01	5.379 163 20
10^4	23.201 777 95	5.457 535 01
10^5	23.262 929 08	5.464 734 00
10^{10}	23.269 657 41	5.465 526 40
∞	23.269 657 42	5.465 526 40

4.2 当取两项计算时

$$\varphi = q_1(\tau)\varphi_1 + q_2(\tau)\varphi_2 \quad z = q_1z_1 + q_2z_2 \quad (33)$$

Galerkin 直接法列式为

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^{\pi/2} (N_1z_1 + N_2\varphi_1) \delta q_1 d\theta d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-N_{31} + N_{41} + N_{51}) \Big|_0^{\pi/2} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} k_e z (\pi/2, \tau) z_1(\pi/2) d\tau = 0 \quad (34)$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^{\pi/2} (N_1z_2 + N_2\varphi_2) \delta q_2 d\theta d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-N_{32} + N_{42} +$$

$$N_{52}) \Big|_0^{\pi/2} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} k_e z (\pi/2, \tau) z_2(\pi/2) d\tau = 0 \quad (35)$$

其中,

$$\begin{aligned} N_{32} &= (k_0 u_0 \dot{z} + u_0^2 z') z_2 \\ N_{42} &= (z'' + \varphi) z_2' - (z''' + \varphi') z_2 \\ N_{52} &= k_1 (\varphi - z') (\varphi_2 - z_2) \end{aligned}$$

4.2.1 当 $k_e \rightarrow \infty$ 时, $\theta = \pi/2$ 处相当于铰链支承, 由式(34)、式(35), 得到

$$A\dot{q} + Bq + Cq = 0 \quad (36)$$

其中,

$$\begin{aligned} q &= [q_1, q_2]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 36.584\ 656\ 10 & 0 \\ 0 & 1.027\ 106\ 70 \end{bmatrix} \\ B &= u_0 k_0 \begin{bmatrix} 0 & -4.467\ 724\ 74 \\ 4.467\ 724\ 74 & 0 \end{bmatrix} \\ C_{11} &= 19\ 809.748\ 233\ 40 - 663.184\ 569\ 20u_0^2 \\ C_{22} &= 25\ 087.561\ 840\ 18 - 152.620\ 344\ 63u_0^2 \\ C_{12} &= C_{21} = 0 \end{aligned}$$

极限流速的 Galerkin 直接法和科氏惯性力的影响^{[14]110-114} 一文中指出, 科氏惯性力项 Bq 对极限流速和系统固有频率的变化趋势没有影响, 只对固有频率的大小产生微弱的影响。这里忽略此项, 系统的固有频率与流速的关系为

$$\omega_{0n1}^2 = 541.476\ 956\ 36 - 18.126\ 584\ 74u_0^2 \quad (37)$$

$$\omega_{0n2}^2 = 24\ 425.468\ 006\ 57 - 148.592\ 492\ 5u_0^2 \quad (38)$$

无液体流动时, 系统前两阶无量纲固有频率

$$\omega_{0n1} = 23.269\ 657\ 42 \quad \omega_{0n2} = 156.286\ 493\ 36$$

对应的无量纲极限流速为

$$u_{0max} = 5.465\ 526\ 40$$

取两项的无液体流动时系统的第一阶固有频率等于取一项的无液体流动时的固有频率; 取两项的无液体流动时系统的极限流速等于取一项的无液体流动时的极限流速。根据以上计算结果的对比, 说明取 2 项的计算结果已有足够高的精度。

4.2.2 当 $k_e = 0$ 时, $\theta = \pi/2$ 处相当于自由端

由式(34)、式(35), 得到

$$A\dot{q} + Bq + Cq = 0 \quad (39)$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.273\ 345\ 06 & -0.008\ 338\ 60 \\ -0.008\ 338\ 60 & 0.381\ 682\ 11 \end{bmatrix} \\ B &= u_0 k_0 \begin{bmatrix} -0.049\ 724\ 38 & 0.265\ 383\ 56 \\ -0.265\ 383\ 56 & 0 \end{bmatrix} \\ C_{11} &= 53.492\ 162\ 76 - 3.559\ 113\ 29u_0^2 \\ C_{22} &= 7\ 959.457\ 729\ 85 - 52.001\ 099\ 32u_0^2 \\ C_{12} &= C_{21} = 0 \end{aligned}$$

这里忽略 Bq 项, 系统的固有频率与流速的关系为

$$\omega_{0n1}^2 = 10\,531.681\,551\,94 - 74.681\,020\,13u_0^2 - \Delta \quad (40)$$

$$\omega_{0n2}^2 = 10\,531.681\,551\,94 - 74.681\,020\,13u_0^2 + \Delta \quad (41)$$

其中,

$$\Delta = (1.068\,326\,51 \times 10^8 - 1.276\,421\,38 \times 10^6 u_0^2 + 5.577\,254\,77u_0^4)^{0.5}$$

无液体流动时, 系统前两阶无量纲固有频率

$$\omega_{0n1} = 13.989\,045\,83 \quad \omega_{0n2} = 144.456\,462\,99 \quad (42)$$

对应的无量纲极限流速为

$$u_{0max} = 3.710\,484\,86 \quad (43)$$

由此看出, 取两项时无液体流动的系统第一阶固有频率与取一项时无液体流动的系统第一阶固有频率相比, 误差仅为 0.000 31%; 取两项时的极限流速与取一项时的极限流速相比, 误差仅为 4.48%。

根据以上计算结果, 并引用前面定义的参数关系, 可知

(1) 当 $k_e = 0$ 时, 一端固定一端自由
第一阶固有频率为

$$\omega_{n1} = \frac{13.989\,045\,83}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_+ \rho_0}} \quad (44a)$$

极限流速为

$$u_{max} = \frac{3.710\,484\,86}{R} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0}} \quad (44b)$$

(2) 当 $k_e \rightarrow \infty$ 时, 一端固定一端铰链支撑
第一阶固有频率为

$$\omega_{n1} = \frac{23.269\,657\,42}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_+ \rho_0}} \quad (45a)$$

极限流速为

$$u_{max} = \frac{5.465\,526\,40}{R} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0}} \quad (45b)$$

(3) 当 $0 < k_e < \infty$ 时, 一端固定一端弹簧支撑

为了解析表示弹簧刚度对固有频率和极限流速的影响, 对计算数据进行分段最小二乘拟合。拟合函数用 F_{un} 表示, 拟合公式统一记为

$$\begin{cases} F_{un}(k_e) = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ x = \lg k_e \end{cases} \quad (46)$$

当 $0 < k_e \leq 500$ 时

第一阶固有频率

$$a = 13.835\,898\,709\,722\,06$$

$$b = -2.253\,512\,979\,113\,82$$

$$c = 0.661\,989\,438\,495\,22$$

$$d = 0.468\,311\,558\,640\,55$$

$$\omega_{n1} = \frac{F_{un}(k_e)}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_+ \rho_0}} \quad (47a)$$

极限流速

$$a = 3.828\,932\,830\,339\,72$$

$$b = -0.330\,058\,281\,316\,07$$

$$c = 0.120\,240\,587\,185\,63$$

$$d = 0.075\,320\,087\,873\,93$$

$$u_{max} = \frac{F_{un}(k_e)}{R} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0}} \quad (47b)$$

当 $500 \leq k_e < \infty$ 时

第一阶固有频率

$$a = 9.907\,774\,366\,307\,42$$

$$b = 7.444\,439\,973\,507\,54$$

$$c = -1.300\,878\,690\,035\,46$$

$$d = 0.069\,005\,790\,516\,03$$

$$\omega_{n1} = \frac{F_{un}(k_e)}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_+ \rho_0}} \quad (48a)$$

极限流速

$$a = 3.782\,290\,744\,242\,35$$

$$b = 0.940\,656\,061\,513\,44$$

$$c = -0.164\,746\,955\,628\,29$$

$$d = 0.008\,751\,429\,256\,82$$

$$u_{max} = \frac{F_{un}(k_e)}{R} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0}} \quad (48b)$$

固有频率随弹簧刚度的变化趋势, 如图 2 所示。极限流速随弹簧刚度的变化趋势, 如图 3 所示。

从图 2 和图 3 可以看出

当 $k_e < 1$ 时, 固有频率和极限流速接近于无弹簧支撑时的数值。

当 $k_e > 10^5$ 时, 固有频率和极限流速接近于固定铰链支撑时的数值。

当 $1 < k_e < 10^5$ 时, 固有频率和极限流速与 k_e 具有明显的非线性性质, 在 $k_e < 10$ 的范围内, 弹簧刚度增加, 固有频率和极限流速降低, 是由于弹簧的存在使得流体扰动引起管道颤振所致。在 $k_e > 10$ 之后, 固有

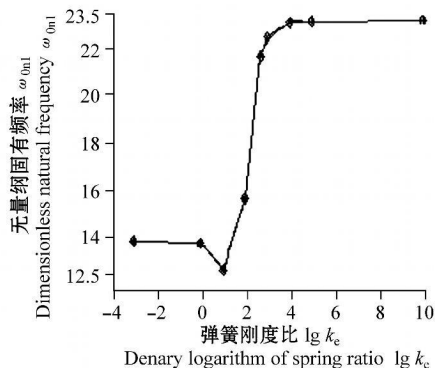


图 2 弹簧对固有频率的影响

Fig. 2 Influence of spring on natural frequency

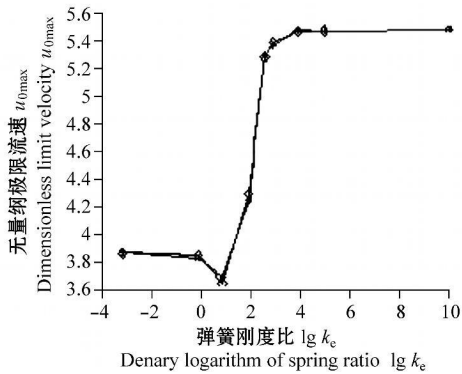


图 3 弹簧对极限流速的影响

Fig.3 Influence of spring on limit velocity

频率和极限流速随弹簧刚度的增加而急剧增加。

从整体趋势看,固有频率和极限流速随着弹簧刚度的增加而增加。

5 结论

1) 弹簧刚度较小时,对输液曲管的固有频率和极限流速影响不大,接近无弹簧支撑情况。弹簧刚度较大时,对输液曲管的固有频率和极限流速影响不大,接近固定铰链支撑情况。当 $1 < k_e < 10^5$ 时,对输液曲管的固有频率和极限流速影响显著,固有频率和极限流速与 k_e 具有较强的非线性性质。在 $1 < k_e < 10$ 时,弹簧刚度增加,固有频率和极限流速有所降低,是由于弹簧的存在使得流体扰动引起管道颤振所致。在 $10 < k_e < 10^5$ 时,固有频率和极限流速随着弹簧刚度的增加而急剧增加。

2) 固有频率和极限流速与弹簧刚度的最小二乘拟合公式,为相关工程提供理论计算依据。

3) 提高输液管道的抗弯刚度或减小输液曲管的弯曲半径,可以显著提高输液曲管的固有频率和极限流速。

参考文献(References)

- [1] Feodos'ev V P. Vibration and stability of a pipe when liquid flows through it[J]. Inzhenernyi Sbornik, 1951, 10(3): 169-170.
- [2] Houser G. W. Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid[J]. Appl. Mech., 1952, 19(6): 205-208.
- [3] Weaver D S. On the flutter of thin cylindrical shells conveying fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, 22(2): 247-248.
- [4] Chen S S. Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid[J]. Acoust. Soc. Am. 1972, 51: 223-232.
- [5] Chen S S. Out of plane vibration and stability of curved tubes conveying fluid[J]. J. Appl. Mech., 1973, 40: 362-368.
- [6] 王忠民,冯振宇,赵风群,等.弹性地基输液管道的耦合模态颤振分析[J].应用数学和力学,2000,21(10):1060-1068.

WANG ZhongMin, FENG ZhenYu, ZHAO FengQun, et al. Analysis of coupled mode flutter of pipes conveying fluid on the elastic foundation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(10): 1060-1068 (In Chinese).

- [7] 孙建刚,薛景宏,王振.架空输液管道系统动力响应分析[J].地震工程与工程振动,2000,20(2):129-133.
SUN JianGang, XUE JingHong, WANG Zhen. Dynamic response analysis of pipeline systems conveying fluid and supported above the ground[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2000, 20(2): 129-133 (In Chinese).
- [8] 王世忠,刘玉兰,黄文虎.输送流体管道的固-液耦合动力学研究[J].应用数学和力学,1998,19(11):987-993.
WANG ShiZhong, LIU YuLan, HUANG WenHu. Research on solid liquid coupling dynamics of pipe conveying fluid[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(11): 987-993 (In Chinese).
- [9] 王本利,王世忠,安为民,等.用有限元法分析导管固-液耦合振动[J].哈尔滨工业大学学报,1984,16(2):8-14.
WANG BenLi, WANG ShiZhong, AN WeiMing, et al. An analysis of solid fluid coupling vibration in piping by finite element method[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 1984, 16(2): 8-14 (In Chinese).
- [10] 李琳.载流管系流-固耦合振动分析中的摄动法[J].振动与冲击,1993(2):48-52.
LI Lin. The perturbation method for fluid solid coupling vibration analysis of pipe conveying fluid[J]. Vibration and Shock, 1993(2): 48-52 (In Chinese).
- [11] 张敦福,王锡平,赵俊峰.悬臂输送管道流-固耦合动力学系统的直接解法[J].机械工程学报,2004,40(3):195-198.
ZHANG DunFu, WANG XiPing, ZHAO JunFeng. Direct method for liquid solid coupled a dynamics analysis of camped pipe conveying fluid[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(3): 195-198 (In Chinese).
- [12] 魏发远,林长圣.分析输液曲管临界流速的迁移矩阵法[J].固体力学学报,2000,21(1):33-39.
WEI FaYuan, LIN ChangSheng. A new matrix method for solving problems of curved pipes conveying fluid[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2000, 21(1): 33-39 (In Chinese).
- [13] 张敦福,王锡平,张洪伟.半圆形输液曲管极限流速的直接法[J].机械工程学报,2005,41(5):221-224.
ZHANG DunFu, WANG XiPing, ZHANG HongWei. Direct method for limit velocity of a semi circle curved pipe conveying fluid[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(5): 221-224 (In Chinese).
- [14] 张敦福,汤红卫.极限流速的 Galerkin 直接法和科氏惯性力的影响[J].山东大学学报,2005,35(1):110-114.
ZHANG DunFu, TANG HongWei. Galerkin direct method for limit velocity and influence of coriolis inertial force[J]. Journal of Shandong University, 2005, 35(1): 110-114 (In Chinese).
- [15] 黄昭度,钟奉俄.工程系统分析力学[M].北京:高等教育出版社,1992:407-463.
HUANG ZhaoDu, ZHONG FengE. Analysis mechanics of engineering system[M]. Beijing: Higher Education Press, 1992, 407-461 (In Chinese).