

文章编号: 1000-4750(2009)04-0057-04

各向异性多重孔隙介质有效应力定律

*蔡新树^{1,3}, 陈 勉¹, 金 衍¹, 赵 颖²

(1. 中国石油大学(北京)石油工程教育部重点实验室, 北京 102249; 2. 中国科学院非线性力学实验室, 北京 100080;

3. 中石化胜利油田黄河钻井三公司, 山东, 东营 257091)

摘 要: 有效应力在研究流固耦合变形问题有其重要的地位。该文通过对各向同性多重孔隙介质有效应力定律和各向异性双重孔隙介质有效应力定律分析, 推导各向异性三重孔隙介质有效应力定律, 并对所建各向异性三重孔隙介质有效应力定律简化为已经发表各向异性双重孔隙介质有效应力定律, 证明模型的存在性、合理性。在各向异性三重孔隙介质有效应力定律的基础上推导各向异性多重孔隙介质有效应力定律。各向异性多重孔隙介质有效应力定律的表达式取决于对多重孔隙介质受力的分解。

关键词: 有效应力; 多重孔隙介质; 各向异性; 线弹性力学; 叠加原理

中图分类号: TU452; O343.8 **文献标识码:** A

AN EFFECTIVE STRESS LAW FOR ANISOTROPIC MULTI-POROSITY MEDIA

*CAI Xin-shu^{1,3}, CHEN Mian¹, JIN Yan¹, ZHAO Ying²

(1. MOE Key Laboratory of Petroleum Engineering in China University of Petroleum, Beijing 102249, China;

2. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

3. Yellow River Drilling Corporation of Shengli Oil Field, Dongying, Shandong 257091, China)

Abstract: The effective stress analysis is an important issue in the study of poroelastic formulations that couple solid deformations with fluid. Based on the effective stress law for isotropic multi-porosity and anisotropy double porous media law, this paper developed anisotropic triple porous media effective stress law. Then, it was simplified as anisotropic double porous media effective stress law, which was proved to be feasible and rational. Anisotropic multi-porosity media effective stress law is developed on the basis of anisotropic triple porous media effective stress law. The mathematical expression of anisotropic multi-porosity media effective stress law depends on the decomposition of loadings on multi-porosity media.

Key words: effective-stress; multi-porosity media; anisotropic; linear elasticity; superposition principle

有效应力定律对研究孔隙流体压力作用下的孔隙介质的力学行为十分重要。有效应力概念首先是由 Terzaghi^[1] 提出并应用于土壤力学分析。Terzaghi 基于以下两个观点提出适用于土壤的有效

应力表达式: 1) 增加外部静水压力与降低相同值的孔隙压力所产生材料的体积变化相等; 2) 剪切强度仅与法向应力与孔隙压力差值有关。

有效应力定律是研究固体和液体相互作用的

收稿日期: 2007-12-04; 修改日期: 2008-08-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(50274054); 教育部科学技术研究重点项目(01111)

作者简介: *蔡新树(1981—), 男, 湖北黄冈人, 助工, 硕士, 从事油气井岩石力学与工程研究(E-mail: caixinshu013@163.com);

陈 勉(1962—), 男(满族), 辽宁沈阳人, 教授, 博士, 中国石油大学(北京)石油与天然气工程学院院长, 中国深层岩石力学分会会长, 从事油气井岩石力学与工程研究(E-mail: chenmian@vip.sina.com);

金 衍(1972—), 男, 浙江人, 教授, 博士, 从事油气井岩石力学与工程研究(E-mail: 13701222683@vip.163.com);

赵 颖(1977—), 女, 辽宁人, 副研究员, 博士, 从事非线性力学研究(E-mail: zhaoying@imech.ac.cn).

桥梁, 而流固耦合作为一种共同的研究方法, 具有重要的普遍意义, 是当今渗流力学、岩土工程力学和计算力学研究和发展的方向, 在当前的地下岩土工程中所辐射的科学问题主要有^[2]: 采矿工程、土木工程、环境工程。

Biot(1941)^[3]首先建立了流体饱和多孔介质理论。Nur、Byerlee(1971)^[4]提出各向同性单重孔隙介质有效应力张量表达式; Barrenblat(1960)^[5]提出各向同性双重孔隙介质有效应力张量表达式^[6]; 陈勉、陈至达(1999)^[6]提出各向同性多重孔隙介质有效应力张量表达式; Carroll(1979)^[7-8]和 Thompson(1991)^[9]分别提出各向异性单重孔隙介质有效应力张量的表达式; 赵颖、陈勉(2004)^[10]提出各向异性双重孔隙介质有效应力定律张量表达式; 黎水泉、徐秉业、段永刚(2001)^[11]用各向同性双重孔隙介质有效应力分析了裂缝性油藏流固耦合渗流问题。

迄今为止, 还没有人提出各向异性多重孔隙介质有效应力表达式。本文将建立各向异性三重孔隙介质有效应力模型、推导其数学表达式。然后以各向异性三重孔隙介质有效应力定律为基础对各向异性多重孔隙介质有效应力定律进行研究。

1 各向异性三重孔隙介质线弹性变形有效应力定律

假定各向异性孔隙介质发生的变形为线弹性变形, 用张量表示应力-应变关系:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (1)$$

式中: C_{ijkl} 为弹性系数张量; M_{ijkl} 为弹性柔度张量。

弹性张量关于指标 (i, j) 、 (k, l) 和 (ij, kl) 对称, M_{ijkl} 和 C_{ijkl} 存在如下关系:

$$C_{ijkl} M_{klmn} = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \quad (2)$$

研究代表性的单元体(REV), 有固体颗粒、孔隙 1、孔隙 2、孔隙 3 组成(如图 1)。

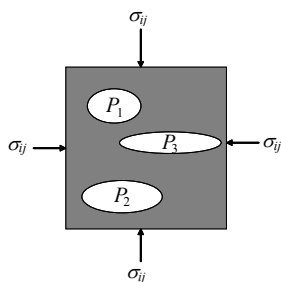


图 1 单元体(REV)受力示意图

Fig.1 Schematic drawing of haploid stress

其受载荷形式:

$$T_i^{\Omega_0} = \sigma_{ij} n_j; \quad T_i^{\Omega_1} = P_1 n_i;$$

$$T_i^{\Omega_2} = P_2 n_i; \quad T_i^{\Omega_3} = P_3 n_i。$$

式中: Ω_0 、 Ω_1 、 Ω_2 和 Ω_3 分别代表整个单元体、孔隙 1、孔隙 2 和孔隙 3 的边界; $T_i^{\Omega_0}$ 、 $T_i^{\Omega_1}$ 、 $T_i^{\Omega_2}$ 和 $T_i^{\Omega_3}$ 分别代表作用在整个单元体、孔隙 1、孔隙 2 和孔隙 3 边界上的力。

将单元体(REV)受力情况分解为 4 种单元体受力叠加的情况(如图 2—图 5)。分解后第 1 种受力情况(如图 2)。

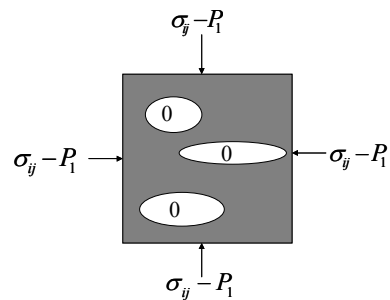


图 2 分解后第 1 种受力情况

Fig.2 The first kind of stress condition after decomposition

其受载荷形式:

$$T_i^{\Omega_0} = \sigma_{ij} n_j - P_1 n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = 0;$$

$$T_i^{\Omega_2} = 0; \quad T_i^{\Omega_3} = 0。$$

图 2 所示载荷相当于在干的三重孔隙材料, 在均质试样施加均匀应力 $\sigma_{ij} - P_1 \delta_{ij}$, 其产生的应变表达式为:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = M_{ijkl}^{1,2,3} (\sigma_{kl} - P_1 \delta_{kl}) \quad (3)$$

式中, $M_{ijkl}^{1,2,\dots,(n-1),n}$ 表示由固体骨架、第 1 种孔隙、第 2 种孔隙、... 第 n 孔隙组成的多孔介质材料的弹性柔度张量。

分解后第 2 种受力情况(如图 3)。

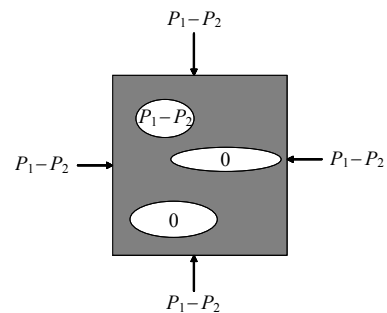


图 3 分解后第 2 种受力情况

Fig.3 The second kind of stress condition after de-composition

其受载荷形式:

$$\begin{aligned} T_i^{\Omega_0} &= (P_1 - P_2)n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = (P_1 - P_2)n_i; \\ T_i^{\Omega_2} &= 0; \quad T_i^{\Omega_3} = 0. \end{aligned}$$

图3所示载荷相当于在均质试样施加均匀应力 $P_1 - P_2$, 第一重孔隙相当于被固体颗粒填充, 第二重和第三重孔隙相当于干孔隙, 故产生的应变表达式为:

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = M_{ijkl}^{2,3} (P_1 - P_2) \delta_{kl} \quad (4)$$

分解后第3种受力情况(如图4)。

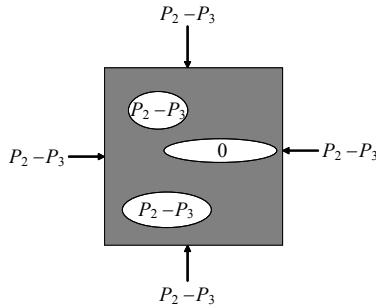


图4 分解后第3种受力情况

Fig.4 The third kind of stress condition after decomposition

其受载荷形式:

$$\begin{aligned} T_i^{\Omega_0} &= (P_2 - P_3)n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = (P_2 - P_3)n_i; \\ T_i^{\Omega_2} &= (P_2 - P_3)n_i; \quad T_i^{\Omega_3} = 0. \end{aligned}$$

图4所示载荷相当于在均质试样施加均匀应力 $P_2 - P_3$, 第一重和第三重孔隙相当于被固体颗粒填充, 第二重孔隙相当于干孔隙, 故产生的应变表达式为:

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = M_{ijkl}^3 (P_2 - P_3) \delta_{kl} \quad (5)$$

分解后第4种受力情况(如图5)。

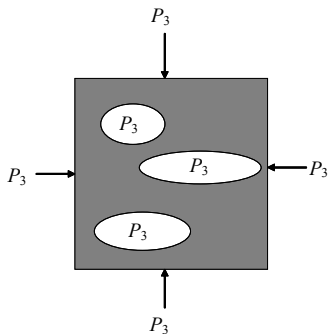


图5 分解后第4种受力情况

Fig.5 The fourth kind of stress condition after decomposition

其受载荷形式:

$$\begin{aligned} T_i^{\Omega_0} &= P_3 n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = P_3 n_i; \\ T_i^{\Omega_2} &= P_3 n_i; \quad T_i^{\Omega_3} = P_3 n_i. \end{aligned}$$

图5所示载荷相当于在均质试样施加均匀净水

压力 P_3 , 三重孔隙相当于都被固体颗粒填充, 故产生的应变表达式为:

$$\varepsilon_{ij}^{(4)} = M_{ijkl}^s P_3 \delta_{kl} \quad (6)$$

总应变:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} + \varepsilon_{ij}^{(4)} = \\ &M_{ijkl}^{1,2,3} (\sigma_{kl} - P_1 \delta_{kl}) + M_{ijkl}^{2,3} (P_1 - P_2) \delta_{kl} + \\ &M_{ijkl}^3 (P_2 - P_3) \delta_{kl} + M_{ijkl}^s P_3 \delta_{kl} \end{aligned} \quad (7)$$

有效应力-应变关系:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad \varepsilon_{ij}^e = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (8) \\ \sigma_{ij}^e &= \sigma_{ij} - P_1 (\delta_{ij} - C_{ijkl} M_{klmn}^{2,3}) - \\ &P_2 (C_{ijkl} M_{klmn}^{2,3} - C_{ijkl} M_{klmn}^3) - \\ &P_3 (C_{ijkl} M_{klmn}^3 - C_{ijkl} M_{klmn}^s) = \\ &\sigma_{ij} - \alpha_{ij}^1 P_1 - \alpha_{ij}^2 P_2 - \alpha_{ij}^3 P_3 \end{aligned} \quad (9)$$

则:

$$\begin{cases} \alpha_{ij}^1 = \delta_{ij} - C_{ijkl} M_{klmn}^{2,3} \\ \alpha_{ij}^2 = C_{ijkl} M_{klmn}^{2,3} - C_{ijkl} M_{klmn}^3 \\ \alpha_{ij}^3 = C_{ijkl} M_{klmn}^3 - C_{ijkl} M_{klmn}^s \end{cases}$$

α_{ij}^1 、 α_{ij}^2 、 α_{ij}^3 为各向异性三重孔隙介质有效应力定律中的有效应力系数。

对于双重孔隙介质, 假设 $P_2 = P_3$, 各向异性三重孔隙介质线弹性变形的有效应力定律简化为:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e &= \sigma_{ij} - P_1 (\delta_{ij} - C_{ijkl} M_{klmn}^2) - \\ &P_2 (C_{ijkl} M_{klmn}^2 - C_{ijkl} M_{klmn}^s) = \\ &\sigma_{ij} - \alpha_{ij}^1 P_1 - \alpha_{ij}^2 P_2 \end{aligned}$$

与赵颖、陈勉、张广青^[10]2004年给出的形式相同。

2 各向异性多重孔隙介质线弹性变形有效应力定律

各向异性多重孔隙介质, 假设: 在研究的单元体内包含有 n 种不同类型的孔隙, 其对应的空间边界分别为 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \dots, \Omega_n$, 在空间边界所围成的区域内, 分别存在大小为 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 的流体压力。孔隙流体压力分别称之为第一流体压力(第一种孔隙内), 第二孔隙压力(第二种孔隙内), 第三孔隙压力(第三种孔隙内), \dots , 第 n 孔隙压力(第 n 种孔隙内)。在所研究单元体(REV)的外边界 Ω_0 上, 受有 σ_{ij} 的外力作用。

在研究各向异性多重孔隙介质定律的时候,仍然对孔隙受力进行分解。将各向异性多重孔隙介质单元体所承载荷分解在空间域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ 上受力之和。

分解后第 1 种受力情况:

$$T_i^{\Omega_0} = \sigma_{ij} n_j - P_1 n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = 0; \quad T_i^{\Omega_2} = 0; \quad \dots;$$

$$T_i^{\Omega_{n-1}} = 0; \quad T_i^{\Omega_n} = 0。$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = M_{ijkl}^{1,2,\dots,(n-1),n} (\sigma_{kl} - P_1 \delta_{kl}) \quad (10)$$

分解后第 2 种受力情况:

$$T_i^{\Omega_0} = (P_1 - P_2) n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = (P_1 - P_2) n_i;$$

$$T_i^{\Omega_2} = 0; \quad \dots; \quad T_i^{\Omega_{n-1}} = 0; \quad T_i^{\Omega_n} = 0。$$

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = M_{ijkl}^{2,3,\dots,(n-1),n} (P_1 - P_2) \delta_{kl} \quad (11)$$

分解后第 3 种受力情况:

$$T_i^{\Omega_0} = (P_2 - P_3) n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = (P_2 - P_3) n_i;$$

$$T_i^{\Omega_2} = (P_2 - P_3) n_i; \quad T_i^{\Omega_{n-1}} = 0; \quad \dots; \quad T_i^{\Omega_n} = 0;$$

$$T_i^{\Omega_n} = 0。$$

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = M_{ijkl}^{3,4,\dots,(n-1),n} (P_2 - P_3) \delta_{kl} \quad (12)$$

:

分解后第 n 种受力情况:

$$T_i^{\Omega_0} = (P_{n-1} - P_n) n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = (P_{n-1} - P_n) n_i;$$

$$T_i^{\Omega_2} = (P_{n-1} - P_n) n_i; \quad T_i^{\Omega_3} = (P_{n-1} - P_n) n_i; \quad \dots;$$

$$T_i^{\Omega_{n-1}} = (P_{n-1} - P_n) n_i; \quad T_i^{\Omega_n} = 0。$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = M_{ijkl}^n (P_{n-1} - P_n) \delta_{kl} \quad (13)$$

分解后第 $(n+1)$ 种受力情况:

$$T_i^{\Omega_0} = P_n n_i; \quad T_i^{\Omega_1} = P_n n_i; \quad T_i^{\Omega_2} = P_n n_i; \quad \dots;$$

$$T_i^{\Omega_{n-1}} = P_n n_i; \quad T_i^{\Omega_n} = P_n n_i。$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n+1)} = M_{ijkl}^s P_n \delta_{kl} \quad (14)$$

$(n+1)$ 种分解后的力叠加, 产生的总应变:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} + \dots + \varepsilon_{ij}^{(n)} + \varepsilon_{ij}^{(n+1)} =$$

$$M_{ijkl}^{1,2,\dots,(n-1),n} (\sigma_{kl} - P_1 \delta_{kl}) +$$

$$M_{ijkl}^{2,3,\dots,(n-1),n} (P_1 - P_2) \delta_{kl} +$$

$$M_{ijkl}^{3,4,\dots,(n-1),n} (P_2 - P_3) \delta_{kl} + \dots +$$

$$M_{ijkl}^n (P_{n-1} - P_n \delta_{kl}) + M_{ijkl}^s (P_n \delta_{kl}) \quad (15)$$

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij} - P_1 (\delta_{ij} - C_{ijkl} M_{klmm}^{2,3,\dots,(n-1),n}) -$$

$$P_2 (C_{ijkl} M_{klmm}^{2,3,\dots,(n-1),n} - C_{ijkl} M_{klmm}^{3,4,\dots,(n-1),n}) -$$

$$P_3 (C_{ijkl} M_{klmm}^{3,4,\dots,(n-1),n} - C_{ijkl} M_{klmm}^{4,5,\dots,(n-1),n} - \dots -$$

$$P_{n-1} (C_{ijkl} M_{klmm}^{(n-1),n} - C_{ijkl} M_{klmm}^n) -$$

$$P_n (C_{ijkl} M_{klmm}^n - C_{ijkl} M_{klmm}^s) \quad (16)$$

各向异性多重孔隙介质有效应力定律:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} =$$

$$\sigma_{ij} - \alpha_{ij}^1 P_1 - \alpha_{ij}^2 P_2 - \alpha_{ij}^3 P_3 - \dots -$$

$$\alpha_{ij}^{n-1} P_{n-1} - \alpha_{ij}^n P_n \quad (17)$$

式中:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ij}^1 = (\delta_{ij} - C_{ijkl} M_{klmm}^{2,3,\dots,(n-1),n}) \\ \alpha_{ij}^2 = C_{ijkl} M_{klmm}^{2,3,\dots,(n-1),n} - C_{ijkl} M_{klmm}^{3,4,\dots,(n-1),n} \\ \alpha_{ij}^3 = C_{ijkl} M_{klmm}^{3,4,\dots,(n-1),n} - C_{ijkl} M_{klmm}^{4,5,\dots,(n-1),n} \\ \vdots \\ \alpha_{ij}^{n-1} = C_{ijkl} M_{klmm}^{(n-1),n} - C_{ijkl} M_{klmm}^n \\ \alpha_{ij}^n = C_{ijkl} M_{klmm}^n - C_{ijkl} M_{klmm}^s \end{array} \right.$$

$\alpha_{ij}^1, \alpha_{ij}^2, \alpha_{ij}^3, \dots, \alpha_{ij}^{n-1}, \alpha_{ij}^n$ 称之为有效应力系数。

3 结论

在假设固体材料和孔隙材料所产生的变形都为线弹性变形的基础上,通过三重孔隙单元体(REV)的受力分析、研究,得到两种各向异性三重孔隙介质有效应力定律的表达式,同时简化为各向异性双重孔隙介质的有效应力定律的表达式。

多重孔隙介质有效应力定律的数学表达式具有多样性,取决于对多孔介质所受力的分解形式,本文只给出一种数学形式。各向异性多重孔隙介质有效应力定律为研究各向异性多重孔隙材料的变形奠定了基础。

参考文献:

- [1] Terzaghi K. Theoretical soil mechanics [M]. New York: Wiley, 1943.
- [2] 白矛, 刘天泉. 孔隙裂隙弹性理论及其应用导论[M]. 北京: 石油工业出版社, 1999.
Bai Mao, Liu Tianquan. Introduction to dual-porosity poroelasticity [M]. Beijing, China: Petroleum Industry Press, 1999. (in Chinese)
- [3] Biot M A. General theory of three dimensional consolidation [J]. Journal of Applied Physics, 1941, 12: 155—164.
- [4] Nur A, Byerlee J D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids [J]. Journal of Geophysical Research, 1971, 76(26): 6414—6419.
- [5] Barrenblatt G I, Zhehtov Iu P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1960, 24: 1286—1303.

(参考文献[6]—[11]转第 67 页)

方程方法计算效率还是要好于增维方法, 主要原因在于每一个时间积分步包含有两个矩阵指数 $\Phi_A(t_{k+1}; t_k)$ 、 $\Phi_{\bar{A}}(t_{k+1}; t_k)$ 的计算, 而齐次 Riccati 方程方法每一个时间步只含有一个矩阵指数的计算。所以在计算效率方面齐次 Riccati 方程方法仍然高于增维方法。

5 结论

本文方法充分利用线性周期系统的特性, 针对周期系统而非一般时变系统提出了基于 Fourier 级数展开方法与精细积分方法求解线性时变周期系数 Lyapunov 微分方程的方法, 并通过数值算例验证了算法是正确可靠的。具体实施过程中, 齐次 Riccati 方程方法在求解精度与效率方面都要好于增维方法, 但增维方法提供了在某些情况下(例如 Riccati 方程解不可以求逆的情况)的备选方案。

参考文献:

- [1] Lovera M, Marchi E D, Bittanti S. Periodic attitude control techniques for small satellites with magnetic actuators [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2002, 10: 90—95.
- [2] Inalhan M T G, How J P. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits [J]. AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, 2002, 25: 48—59.
- [3] Montagnier P, Spiteri R J, Angeles J. The control of linear time-periodic systems using Floquet-Lyapunov theory [J]. International Journal of Control, 2004, 77: 472—490.
- [4] Varga A, Van Dooren P. Computational methods for periodic systems — An overview [C]. Proceedings of the IFAC Workshop on Periodic Control Systems, Como, Italy, 2001.
- [5] Balas M J, Yung Jae L. Controller design of linear periodic time-varying systems [C]. American Control Conference, Albuquerque, USA, 1997, 5: 2667—2671.
- [6] Kano H Y, Nishimura T. A note on periodic Lyapunov equations [C]. Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, 1996, 1: 35—36.
- [7] Varga A. On solving periodic differential matrix equations with applications to periodic system norms computation [C]. 44th IEEE Conference on Decision and Control, and 2005 European Control Conference (CDC-ECC'05), 2005: 6545—6550.
- [8] Varga A. Periodic Lyapunov equations: Some applications and new algorithms [J]. International Journal of Control, 1997, 67: 69—87.
- [9] Kressner D. Large periodic Lyapunov equations: Algorithms and applications [C]. Proceedings of the ECC'03. Cambridge, UK, 2003.
- [10] Zhang S Y, Deng Z C. An improved precise integration method for nonlinear dynamic system [J]. Mechanics Research Communications, 2003, 30: 33—38.
- [11] Gu Y X, Chen B S, Zhang H W, Guan Z Q. Precise time-integration method with dimensional expanding for structural dynamic equations [J]. AIAA Journal, 2001, 39: 2394—2399.
- [12] 钟万勰, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
Zhong Wanxie, Wu Zhigang, Tan Shujun. State space control theory and computation [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)
- [13] 钟万勰. 应用力学对偶体系 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
Zhong Wanxie. Duality system in applied mechanics and optimal control [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese)
- [14] Cai Z Q, Gu Y X, Zhong W X. A new approach of computing Floquet transition matrix [J]. Computers & Structures, 2001, 79: 631—635.
- [6] 陈勉, 陈至达. 多重孔隙介质有效应力定律 [J]. 应用数学和力学, 1999, 20(11): 1121—1127.
Chen Mian, Chen Zhida. Effective stress law for Multi-porosity media [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1999, 20(11): 1121—1127. (in Chinese)
- [7] Carroll M M. An effective stress law for anisotropic elastic deformation [J]. Journal of Geophysical Research, 1979, 84(B13): 7510—7512.
- [8] Carroll M M, Katsube N. The role of terzaghi effective stress in linearly elastic deformation [J]. Journal of Energy Resources Technology, 1983, 105: 509—511.
- [9] Thompos M, Wills J R. A reformation of the equations of anisotropic poroelasticity [J]. Journal of Applied Mechanics, 1991, 58(11): 612—616.
- [10] 赵颖, 陈勉, 张广清. 各向异性双重孔隙介质有效应力定律 [J]. 科学通报, 2004, 49(21): 2252—2255.
Zhao Ying, Chen Mian, Zhang Guangqing. Effective stress law for anisotropic double porous media [J]. Science Bulletin, 2004, 49(21): 2327—2331. (in Chinese)
- [11] 黎水泉, 徐秉业, 段永刚. 裂缝性油藏流固耦合渗流 [J]. 计算力学学报, 2001, 18(2): 133—137.
Li Shuiquan, Xu Bingye, Duan Yonggang. Flow through fissured reservoir with deformable media [J]. Chinese Journal of Computation Mechanics, 2001, 18(2): 133—137. (in Chinese)

(上接第 60 页)