

# 三维双楔面定常激波相互作用

杨旻 姜宗林

(中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100190)

**摘要** 本文通过理论分析, 将三维对称双楔面上定常激波相互作用简化到二维截面进行分析, 利用二维非定常激波楔面反射理论求解该三维激波相互作用结构。同时, 通过采用二阶精度的 NND 格式求解三维 Euler 方程, 对该理论分析结果做出数值模拟验证。理论分析和数值模拟结果显示, 对于三维双楔面超声速定常流动, 在取定的二维截面上激波结构兼有二维非定常及定常激波反射的性质, 即形成了类似于二维非定常激波楔面反射的规则反射、单马赫反射、过渡马赫反射及双马赫反射等结构, 同时其规则-马赫反射转变却遵循适用于二维定常激波反射的 von Neumann 准则。理论分析得出的各种反射结构的存在范围与数值模拟结果吻合良好。同时, 探讨了两楔面间夹角以及楔面前缘后掠角对该激波结构的影响。

**关键词** 三维双楔面 定常激波 数值模拟

## 0 引言

三维双楔面定常激波相互作用是一个具有广泛应用背景的研究问题。例如, 对于冲压发动机三面压缩进气道, 双楔面定常激波相互作用会形成具有较低总压恢复系数的桥波区, 对进气道整体性能有着较大影响<sup>[1]</sup>。由于该三维问题应用广泛, 人们给予了足够的重视并开展了较多的研究<sup>[1-7]</sup>。

Charwat 等<sup>[2]</sup>对该问题做出了较早的研究, 并依据实验结果阐述了三维激波相互作用后形成的桥激波、透射激波等基本波系结构。Marsilio<sup>[6]</sup>对该问题中涡的不稳定性做出了数值研究, 结果显示随着来流马赫数的增加, 截面上的滑移线逐渐卷起形成对称结构的涡, 并随着马赫数的进一步增加而失稳并不再对称。Goonko 等<sup>[7]</sup>对截面上的激波结构做出了较为深入的数值研究, 结果显示在垂直于来流速度方向的截面上会形成规则反射、单马赫反射、过渡马赫反射以及双马赫反射等一系列激波结构, 同时, 通过理论分析探讨了规则-马赫反射分界线以及双楔面间夹角、双楔面前缘后掠角对其的影响。大量实验业已证明, 对于二维激波反射问题, 定常激波反射只可能形成规则反射和单马赫反射, 而非定常激波楔面反射才会形成较为复杂的过渡马赫反射和双马赫反射<sup>[8]</sup>。值得注意的是, 在三维双楔面定常激波相互作用的二维截面上, 却形成了类似于二维非定常激波反射的过渡马赫反射和双

马赫反射结构。之前的研究大多是通过实验和数值结果得出结论, 并没有从理论上解释形成这些激波结构的原因。本文通过理论分析, 将该三维定常激波相互作用问题与二维非定常激波反射建立联系, 从理论上解释了二维截面上形成过渡马赫反射和双马赫反射的原因。同时, 通过二维简化, 利用二维非定常激波楔面反射理论得出截面上形成各种反射结构的范围以及双楔面间夹角、双楔面后掠角的影响, 并通过数值模拟加以验证。

## 1 物理模型和数值方法

本文研究的是三维对称双楔面定常激波相互作用, 其物理模型如图 1 所示。两个楔面的倾角  $\theta$  和前缘后掠角  $\chi$  都分别相等,  $\theta_n$  为垂直于楔面前缘的方向上的楔面角度。 $\theta_n$  与  $\theta$  有如下关系式:

$$\tan \theta_n = \frac{\tan \theta}{\cos \chi}$$

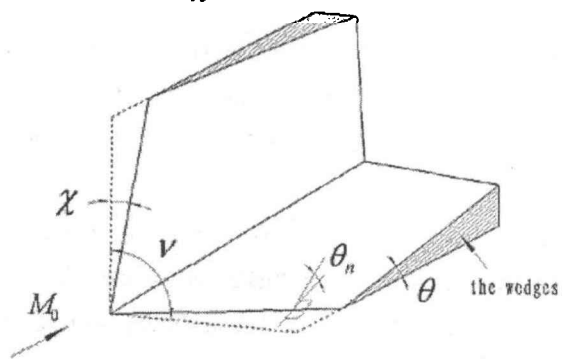


图 1 三维双楔面物理模型

当后掠角  $\chi$  趋于 0 时  $\theta_n$  趋于  $\theta$ 。两楔面间夹角为

$\nu$ ，来流马赫数为  $M_0$ 。

本文研究三维无粘激波相互作用问题，故采用三维 Euler 方程作为控制方程。对于理想气体，直角坐标系下的控制方程可以表达为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix}$$

上述表达式中， $\rho$ 、 $p$ 和 $E$ 分别代表气体密度、压力和单位质量总内能， $u$ 、 $v$ 和 $w$ 为气体在 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 方向上的速度分量，单位质量总内能表达式为：

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

控制方程的离散为如下方程：

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i,j,k}^n + \frac{1}{\Delta x} \left( F_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - F_{i-\frac{1}{2},j,k}^n \right) \\ & + \frac{1}{\Delta y} \left( G_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - G_{i,j-\frac{1}{2},k}^n \right) \\ & + \frac{1}{\Delta z} \left( H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n - H_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \right) = 0 \end{aligned}$$

其中的对流项通量项  $F$ 、 $G$ 、 $H$  利用二阶 NND 格式求解，采用  $\text{minmod}$  函数作为限制器。计算域网格采用正交化处理后的均匀结构网格。由于采用并行程序计算，网格数达千万量级。计算域入口给定来流条件；出口边界假定沿来流方向流场参数变化很小，边界条件由外推法给出；上边界和右边界均给定无反射边界条件；固壁边界采用无穿透边界条件。

## 2 结果与讨论

### 2.1 理论分析方法

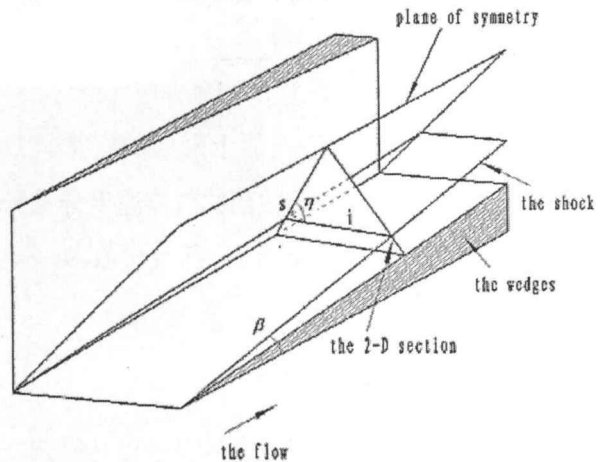


图2 三维空间的二维简化

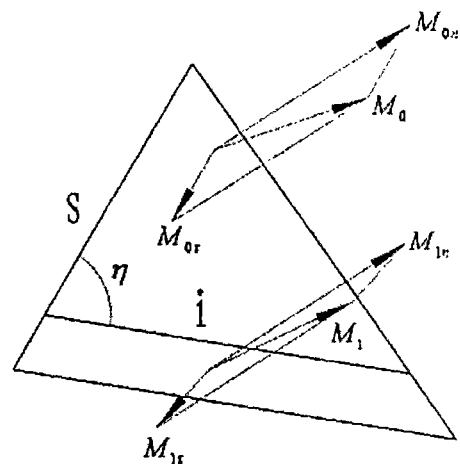


图3 二维特征截面

由于本文所探讨的双楔面是对称结构，两个楔面倾角和后掠角相等，因此在两楔面之间三维空间中存在有对称面，理论分析时只需考虑对称面的一侧即可。将三维激波简化到二维截面进行分析的前提是截面内的激波只具备二维特性，即在截面内二维激波前后垂直于截面的气流速度分量不因激波的存在而改变，二维激波的存在只改变了截面内平行于截面的气流速度分量，且该速度分量的变化符合二维激波关系式。基于以上考虑，对于两楔面间夹角  $\nu = 90^\circ$  且后掠角  $\chi = 0^\circ$  的情况，选取垂直于底楔面斜激波平面与对称面交线的截面作为二维特征截面简化该三维问题，如图2所示。图3是该截面的示意图，截面内激波  $i$  前后的气流速度分别被分解为垂直于截面的速度分量和平行于截面的速度分量。可以证明，截面内二维激波两侧垂直于

截面的气流速度分量相等, 即

$$M_{0n} = M_{1n} = \frac{M_0}{\sqrt{2 \tan^2 \beta + 1}},$$

其中  $\beta$  为自由来流在底楔面上形成的定常斜激波角度。而激波  $i$  前平行于截面的气流速度分量则平行于该截面与对称面的交线  $S$ , 其马赫数为:

$$M_{0r} = \frac{M_0 \tan \beta}{\sqrt{\tan^2 \beta + \frac{1}{2}}}$$

同时, 激波  $i$  与  $s$  线的夹角也可以通过几何关系求得:

$$\eta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta\right)$$

通过伽利略坐标变换, 截面内激波  $i$  前方空气可以看做静止状态, 激波  $i$  以  $M_{0r}$  的速度向前运动并在对称面  $s$  上形成反射。由于激波  $i$  运动速度  $M_{0r}$  以及激波  $i$  与对称面夹角  $\eta$  都已求得, 因此可以通过二维非定常激波楔面反射的结果得出该截面内激波反射构造, 即可得出三维空间内激波相互作用结构。由此也解释了在截面内出现类似于二维非定常激波反射的过渡马赫反射和双马赫反射的原因。

### 2.2 垂直双楔面

对于两个楔面间夹角  $\nu = 90^\circ$  且后掠角  $\chi = 0^\circ$  的情况, 在不同马赫数和楔面倾角的组合下, 在垂直于自由来流速度方向的截面上分别会形成规则反射、单马赫反射、过渡马赫反射以及双马赫反射等激波反射构造, 如图 4 所示。同时在选定的二维特征截面上也会形成上述同样的激波反射结构。由于二维非定常激波楔面反射理论中弱激波反射理论尚不完善, 本文中暂不考虑弱激波反射问题。图 5 为理论分析及数值验证结果, 图中横坐标为自由来流马赫数, 纵坐标为楔面倾角, 曲线代表通过 2.1 的理论分析得出的各种激波反射结构的分界线, 各图标代表在各马赫数和楔面倾角组合下的数值验证点, 其中实心圆点表示在给定马赫数下由于楔面倾角过大而形成了脱体激波。可以看到, 理论分析

结果与数值结果吻合良好, 由此可以证明通过二维简化分析该三维问题是可行的。

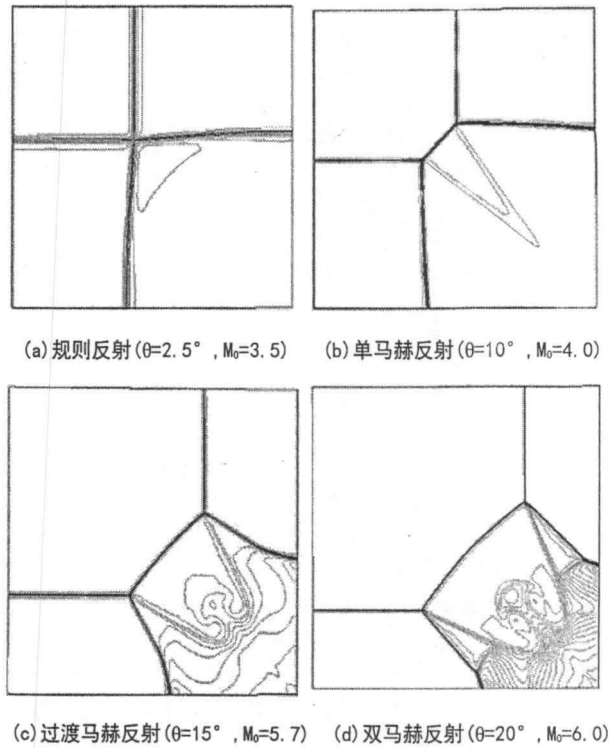


图 4 二维截面上激波反射构造

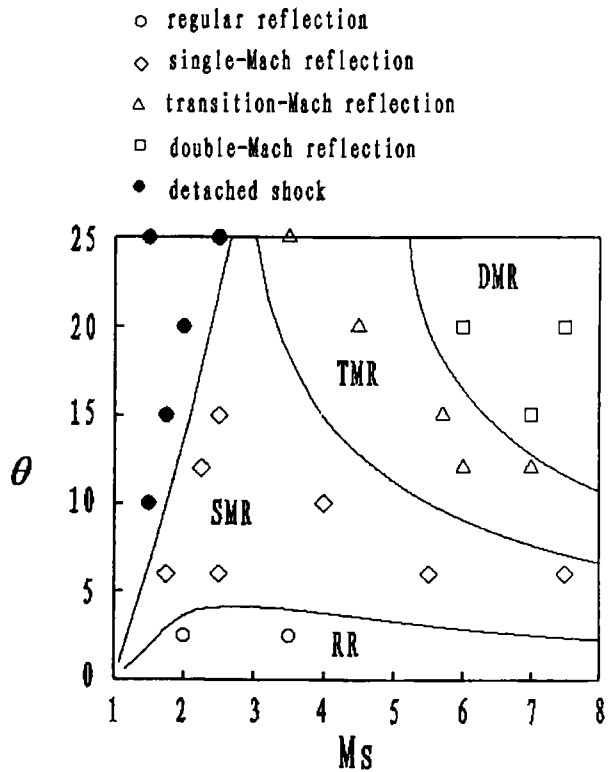


图 5 二维截面上激波反射构造分布

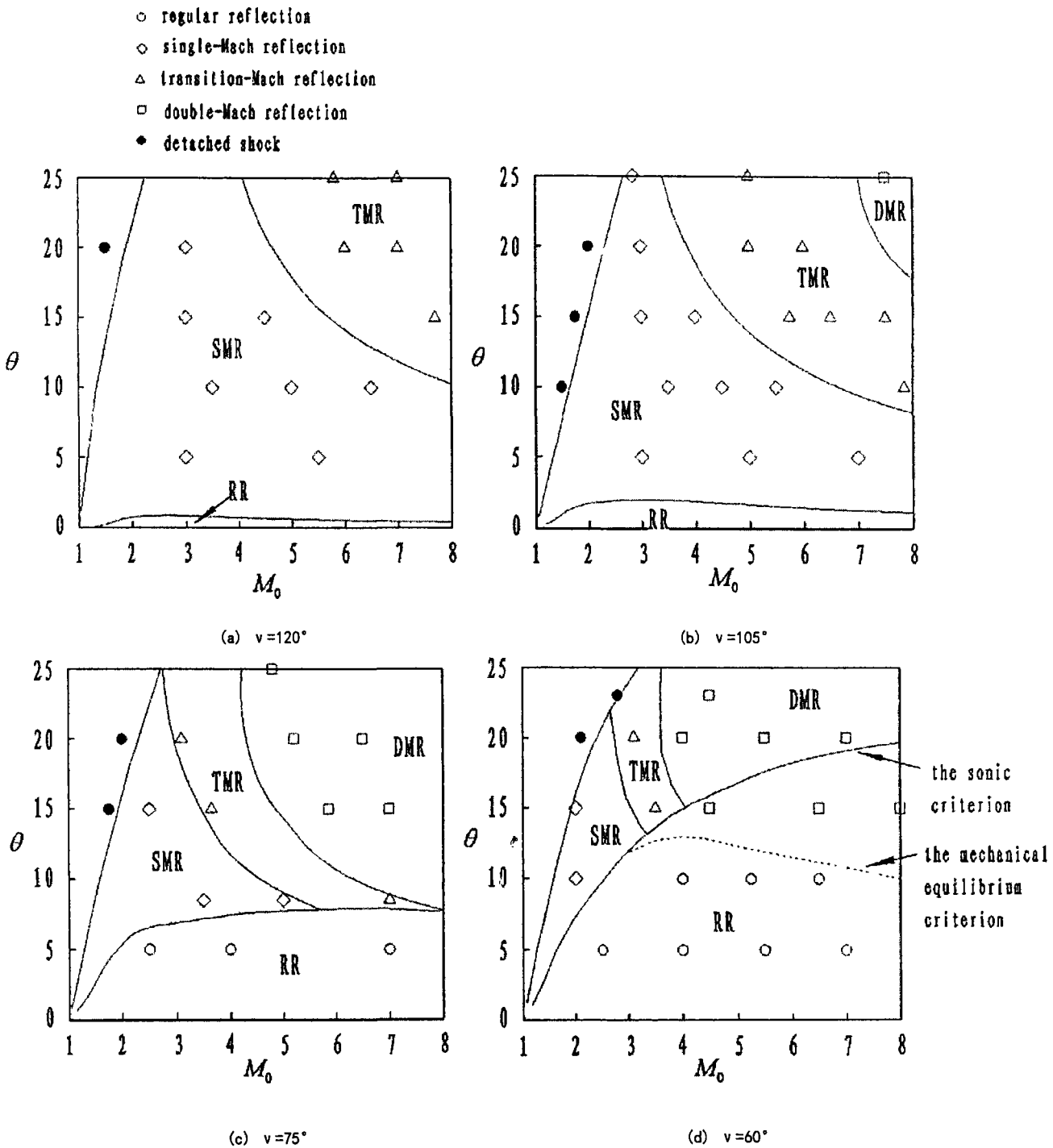


图6  $\nu \neq 90^\circ$  时截面上激波反射构造分布

### 2.3 两楔面间夹角及楔面前缘后掠角的影响

当两楔面间夹角  $\nu \neq 90^\circ$  或楔面前缘后掠角  $\chi \neq 0^\circ$  时，二维截面上各种激波反射结构的形成范围与无后掠角的垂直双楔面的结果有所不同。在此种情况下，进行二维简化仍使用 2.1 中的截面，即垂直于底楔面斜激波面与对称面的交线。此时激波  $i$  与波前空气的相对马赫数及与对称面  $s$  之间的夹角为：

$$M_{0r} = \frac{M_0 \tan^2 \beta_n \cos^2 \chi}{\sin^2 \frac{\nu}{2} (1 + \tan \beta_n \sin \chi)^2 + \tan^2 \beta_n \cos^2 \chi}$$

$$\eta = \arccos \left( \cos \frac{\nu}{2} \sqrt{\frac{(\tan \beta_n \sin \chi - 1)^2}{\tan^2 \beta_n + 1}} \right)$$

其中的  $\beta_n$  为垂直于楔面前缘的方向上斜激波的角度，其方向上所对应的楔面倾角为  $\theta_n$ 。 $\beta_n$  与  $\beta$  有如下关系式：

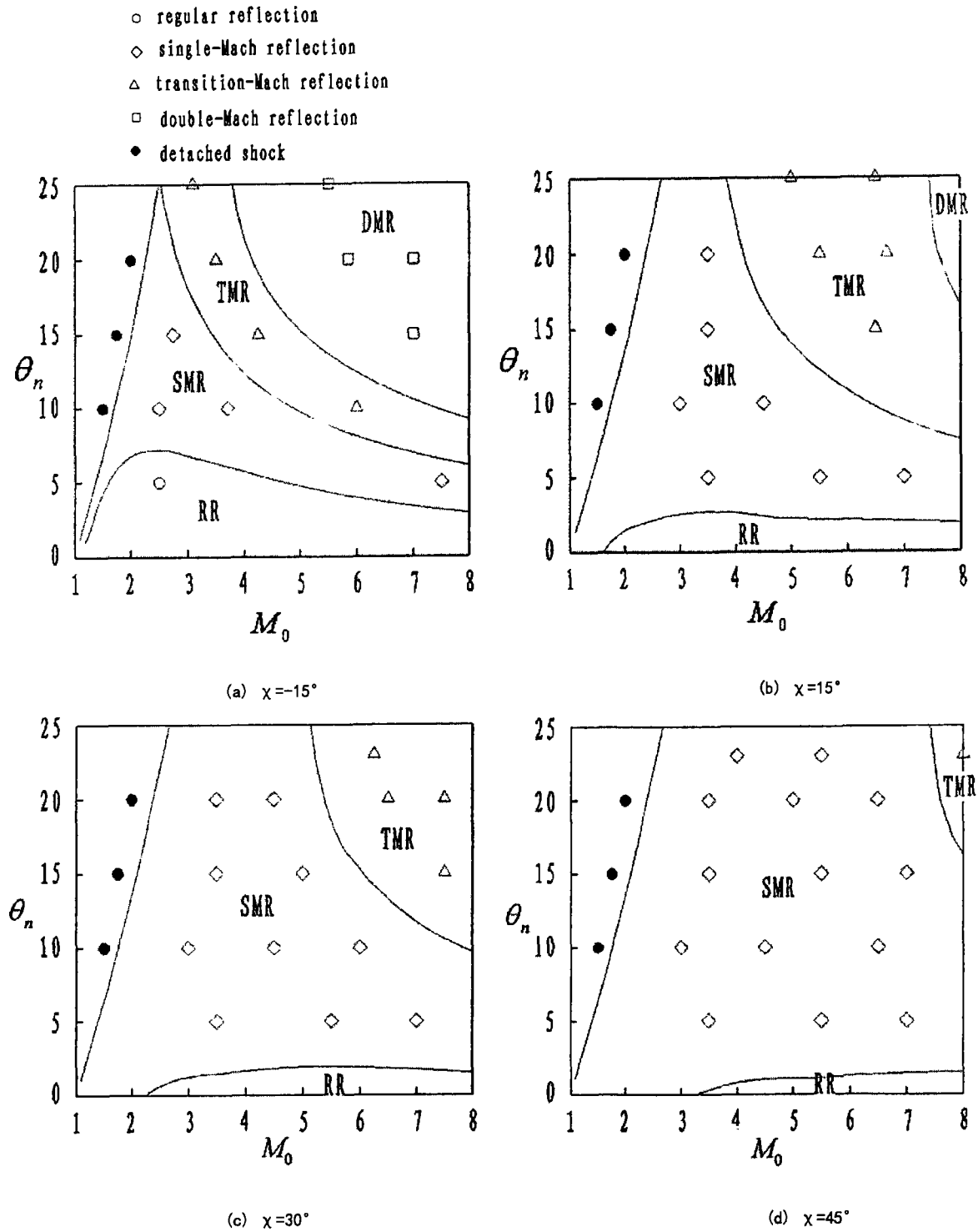


图7  $\chi \neq 0^\circ$  时截面上激波反射构造分布

$$\tan \beta_n = \frac{\tan \beta}{\cos \chi}$$

当后掠角  $\chi$  趋于 0 时  $\beta_n$  趋于  $\beta$ 。图 6 为两楔面夹角不垂直对截面上激波构造的影响，即  $\nu \neq 90^\circ$ ， $\chi = 0^\circ$  时的影响。可以看到，随着两楔面间夹角的变化，二维截面上各种激波反射结构出现的范围也有所变化，即随着两楔面间夹角的减小，单马赫-过渡马赫反射以及过渡马赫-双马赫反射的分界线

朝着来流小马赫数方向移动，而马赫-规则反射分界线朝大楔面倾角方向移动。注意到在图 6(d) 中由理论分析得出的规则反射区中出现了马赫反射的数值结果。值得注意的是，图 6 中的规则-马赫反射的实线分界线均是由声速准则得出的，而 von Neumann 准则则要求激波马赫数大于  $M_{c0} = 2.202$ 。当两楔面夹角为  $120^\circ$ 、 $105^\circ$  以及  $75^\circ$  时各种来

流马赫数和楔面倾角组合下二维截面内激波马赫数均小于  $M_{c0}$ ，而当  $\nu = 60^\circ$  时部分组合下截面内激波马赫数达到  $M_{c0}$ ，可以得出该情况下的 von Neumann 准则，即图 6(d) 中的虚线。通过数值模拟可以得出，在该虚线上下，激波结构分别呈马赫反射和规则反射结构，即此时二维定常激波反射所遵循的 von Neumann 准则代替声速准则成为规则—马赫反射转变的分界线。

图 7 是双楔面存在前缘后掠角时的截面内激波反射结构，即  $\nu = 90^\circ$ ， $\chi \neq 0^\circ$ 。随着后掠角增大，单马赫—过渡马赫反射以及过渡马赫—双马赫反射分界线向来流高马赫数方向移动，而规则—马赫反射分界线向小楔面倾角方向移动。注意到图 7 的几种情况下二维截面内的激波马赫数均达不到  $M_{c0}$ ，即不存在由 von Neumann 准则得出的规则—马赫反射分界线。

### 3 结论

本文采用理论分析和数值模拟相结合的方法，对三维双楔面定常激波相互作用问题做出了研究，得出以下结论：

(1) 三维双楔面定常激波结构可以通过二维简化利用二维激波反射理论分析得出。理论分析结果指出，在二维截面上会形成规则反射、单马赫反射、过渡马赫反射以及双马赫反射等多种激波反射结构。数值验证结果与理论分析吻合良好。

(2) 通过理论分析探讨了两楔面间夹角和楔面前缘后掠角对该激波结构的影响。分析得出，随着两楔面间夹角的减小，单马赫—过渡马赫反射以及过渡马赫—双马赫反射的分界线朝着来流小马赫数方向移动，而马赫—规则反射分界线朝大楔面倾角方向移动；随着后掠角增大，单马赫—过渡马赫反射以及过渡马赫—双马赫反射分界线向来流高马赫

数方向移动，而规则—马赫反射分界线向小楔面倾角方向移动。

(3) 在二维截面上兼有二维非定常激波和定常激波反射的性质，即形成了类似于二维非定常激波楔面反射的多种马赫反射结构，同时其规则—马赫反射转变却遵循二维定常激波反射所遵循的 von Neumann 准则。

### 参考文献

- [1] 岳连捷, 徐显坤, 张新宇, 陈立红. 三面压缩进气道三维激波相干研究, 中国力学学会学术大会, 2009.
- [2] A. Charwat, L. Redekeopp. Supersonic interference flow along the corner of intersecting wedges, 1967, 5(3):480-488.
- [3] D. Watson, M. Weinstein. A study of hypersonic corner flow interaction, 1971, 9(7):1280-1286.
- [4] P. Kutter, Supersonic flow in the corner formed by two intersecting wedges, 1974, 12(5):577-579.
- [5] F. Marconi. Supersonic, inviscid, conical corner flowfields, 1980, 18(1):78-84.
- [6] R. Marsilio. Vortical solutions in supersonic corner flows, 1993, 31(9):1651-1658.
- [7] Y. Goonko, A. Kudryavtsev, A. Chpoun. 3D interaction of shock waves in corner flow. Proceeding of 24<sup>th</sup> ISSW, Vol. 1, pp. 437-442, 2004.
- [8] G. Ben-Dor. Shock wave reflection phenomena. Springer-Verlag, 1991.
- [9] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式. 空气动力学学报, 1988, 6(2):143-165.